

**Dragoș Petrică
Marius Antonescu**

**Paul-Cosmin Manea
Florin Antohe
Agnes Voica**

**Florin Stănescu
Lucia Popa**

Matematică

algebră, geometrie

Caiet de lucru. Clasa a VII-a

Partea a II-a

- ✓ Modalități de lucru diferențiate**
- ✓ Pregătire suplimentară prin planuri individualizate**

Soluțiile testelor de autoevaluare pot fi consultate la adresa:

http://www.edituraparelela45.ro/wp-content/uploads/2018/01/solutii_teste_de_autoevaluare_consolidare_clasa7_sem2_2018.pdf

Lucrare elaborată în conformitate cu Programa școlară în vigoare pentru clasa a VII-a, aprobată prin Ordinul Ministrului Educației, Cercetării și Inovării nr. 5097/09.09.2009.

Redactare: Daniel Mitrăn
Tehnoredactare: Iuliana Ene
Corectură: Andreea Cîrstea, Olimpia Filip
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Ionuț Broșțianu

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

Matematică - consolidare : algebră, geometrie : caiet de lucru : clasa a

VII-a / Dragoș Petrică, Paul-Cosmin Manea, Florin Stănescu, –

Pitești : Paralela 45, 2017

2 vol.

ISBN 978-973-47-2604-2

Partea 2. - 2018. - ISBN 978-973-47-2677-6

I. Petrică, Dragoș
II. Manea, Paul-Cosmin
III. Stănescu, Florin

51

COMENZI – CARTEA PRIN POȘTĂ

EDITURA PARALELA 45

Pitești, jud. Argeș, cod 110174, str. Frații Golești 130

Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444

0721 247 918

Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492

E-mail: comenzi@edituraparelela45.ro

sau accesați www.edituraparelela45.ro

Tiparul executat la tipografia *Editurii Paralela 45*

E-mail: tipografie@edituraparelela45.ro

Copyright © Editura Paralela 45, 2018

Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate,
iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.

1

Adunarea și scăderea numerelor reale reprezentate prin litere

Competențe:

- Identificarea unor reguli de calcul numeric sau algebric pentru simplificarea unor calcule
- Aplicarea regulilor de calcul și folosirea parantezelor în efectuarea operațiilor cu numere reale

Ce știu

Cu ajutorul metodei factorului comun, putem calcula:

$$3\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 8\sqrt{3} = (3 - 5 + 8)\sqrt{3} = 6\sqrt{3};$$

$$10xy - 7xy = (10 - 7)xy = 3xy, \text{ unde } x \text{ și } y \text{ sunt numere reale};$$

$$2^{2018} - 5 \cdot 2^{2017} + 6 \cdot 2^{2016} = 2^{2016} \cdot (2^2 - 5 \cdot 2 + 6) = 2^{2016} \cdot 0 = 0.$$

Proprietățile adunării:

1. Asociativitatea: $(x + y) + z = x + (y + z)$, oricare ar fi numerele reale x, y, z .
2. Comutativitatea: $x + y = y + x$, oricare ar fi numerele reale x, y .
3. Elementul neutru este 0: $x + 0 = 0 + x = x$, oricare ar fi numărul real x .
4. Opusul unui număr real x este $-x$: $x + (-x) = -x + x = 0$.
5. Distributivitatea înmulțirii față de adunare: $x \cdot (y + z) = xy + xz$, oricare ar fi numerele reale x, y, z .

Ce aflu

O sumă în care unele numere sunt reprezentate prin litere se numește **sumă algebrică**.

Exemple: $3x - 7xy^2 + z + y; (1 - \sqrt{2})a^2 + 3ab + (1 + \sqrt{3})b^3$.

Putem nota $E(x) = x^3 - 7x^2 + 5x - 3, x \in \mathbb{R}$.

În suma $5a + 18b$, numerele $5a$ și $18b$ se numesc **termenii** sumei, numerele 5 și 18 se numesc **coeficienții** termenului a , respectiv b , iar a și b reprezintă **partea literală**.

Dacă într-o sumă apar termeni cu aceleași litere, iar literele apar o singură dată și sunt ridicate la aceleași puteri, acești termeni se numesc **asemenea**.

Astfel, în suma $12x^2y - 7xyz + 3x^2y + 9xyz + xyz$, termenii asemenea sunt:

- $12x^2y$ și $3x^2y$;
- $-7xyz, 9xyz$ și xyz .

Sumele acestor termeni asemenea sunt: $12x^2y + 3x^2y = (12 + 3)x^2y = 15x^2y$ și $-7xyz + 9xyz + xyz = (-7 + 9 + 1)xyz = 3xyz$. Prin adunarea termenilor asemenea, se spune că **se reduc termenii asemenea**.

Astfel, suma inițială este egală cu $15x^2y + 3xyz$.

Exemple:

a) $3a + 2b - 5a + 7c - 20b + c = (3 - 5)a + (2 - 20)b + (7 + 1)c = -2a - 18b + 8c$;

b) $2x^2y - 7xz + 14x^2 - 4x^2y + 12xz + 2x^2y = (2 - 4 + 2)x^2y + (12 - 7)xz + 14x^2 = 5xz + 14x^2$;

c) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)ab - (\sqrt{2} + 2)ab = \left(\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \sqrt{2} - 2\right)ab = (\sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} - 2)ab = -ab$;

$$\text{d) } 3(x - y + 1) - 2(2x - 3y - 2) + 5(3x - 2y - 3) = 3x - 3y + 3 - 4x + 6y + 4 + 15x - 10y - 15 = \\ = 14x - 7y - 8;$$

$$\text{e) } xa + ya + xb + yb = a(x + y) + b(x + y) = (a + b)(x + y).$$

Ce am înțeles

1. În cazul următoarelor enunțuri, dacă enunțul este adevărat, încercuiește litera **A**, în caz contrar, încercuiește litera **F**:

a) $5x^9y^2$ și $5x^2y^9$ sunt termeni asemenea; **A** **F**

b) $x^2 + x^2 + x^2 = 3x^6$; **A** **F**

c) $(3xy + 2y) + (6xz - 3z) = 5xy + 3xz$. **A** **F**

2. Completează spațiile punctate cu răspunsul corect:

a) Suma coeficienților numerelor reale, reprezentate prin litere, din următoarea sumă algebrică:

$$3x - 5y + 12x^2z + \frac{2}{3}xyz - (\sqrt{3} + 1)xyz^2 + 0, (3)y \text{ este } \dots\dots\dots$$

b) Opusul lui $-5x^2 + y^2$ este $\dots\dots\dots$

c) Termenii asemenea din suma algebrică $x^2 - 7xy + 12x^2 + (\sqrt{3} + 1)xyz - 9xy + 0, 4x^2 + xyz$ sunt: $\dots\dots\dots$

d) $\frac{2}{\sqrt{2}}y - 7y + \frac{2}{\sqrt{3}-1}y = \dots\dots\dots \cdot y$.

Știu cum să rezolv

1 Redu termenii asemenea:

a) $-3x + 9x - 24x$; b) $\frac{1}{2}ab^2 - \frac{7}{4}ab^2 + \frac{13}{18}ab^2 - \frac{1}{12}ab^2$.

Soluție: a) Avem $-3x + 9x - 24x = (-3 + 9 - 24) \cdot x = -18x$.

b) $\frac{1}{2}ab^2 - \frac{7}{4}ab^2 + \frac{13}{18}ab^2 - \frac{1}{12}ab^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{4} + \frac{13}{18} - \frac{1}{12}\right)ab^2 = \left(\frac{18}{36} - \frac{63}{36} + \frac{26}{36} - \frac{3}{36}\right)ab^2 = -\frac{22}{36}ab^2 = -\frac{11}{18}ab^2$.

2 Considerăm un triunghi echilateral, cu latura $2a + 4b$, și un dreptunghi cu lățimea $b + 3a$, iar lungimea $2b + 3a$, unde $a, b > 0$. Dacă perimetrul triunghiului echilateral este egal cu cel al dreptunghiului, arată că $a = b$.

Soluție: Perimetrul triunghiului echilateral este $6a + 12b$, iar cel al dreptunghiului este $6b + 12a$. Prin urmare, $6a + 12b = 6b + 12a \Rightarrow 12b - 6b = 12a - 6a$, deci $6b = 6a$, ceea ce este echivalent cu $a = b$.

3 Dacă numerele $11n + 7$ și $4n + 3$ dau același rest la împărțirea cu 5, arată că 5 divide cele două numere.

Soluție: Avem $5 \mid (11n + 7) - (4n + 3) \Rightarrow 5 \mid 7n + 4 \Rightarrow n = 5k + 3 \Rightarrow 11n + 7 = 55k + 40$, deci restul este 0. Astfel, 5 divide cele două numere.

Competențe:

- Identificarea unor reguli de calcul numeric sau algebric pentru simplificarea unor calcule
- Aplicarea regulilor de calcul și folosirea parantezelor în efectuarea operațiilor cu numere reale

Ce știu

Proprietățile înmulțirii:

1. Asociativitatea: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, oricare ar fi numerele reale x, y, z .
2. Comutativitatea: $x \cdot y = y \cdot x$, oricare ar fi numerele reale x, y .
3. Numărul 1 este element neutru: $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$, oricare ar fi numărul real x .
4. Înmulțirea este distributivă față de adunare și scădere: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ și $x \cdot (y - z) = x \cdot y - x \cdot z$, oricare ar fi numerele reale x, y, z .

Numărul $\frac{1}{x}$ se numește **inversul** numărului real nenul x . Avem: $x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1$.

Notație: $\frac{1}{x} = x^{-1}$. Dacă y este un număr real nenul, atunci $x : y = x \cdot \frac{1}{y} = \frac{x}{y}$.

Avem proprietatea: $(a + b + c) : d = a : d + b : d + c : d$, unde a, b, c, d sunt numere reale, cu $d \neq 0$.

Ce aflu

Pentru calcule cu înmulțiri și împărțiri de numere reprezentate prin litere, vom folosi aceste proprietăți. De asemenea, vor fi utilizate și **regulile de calcul cu puteri**:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, unde $a \in \mathbb{R}$;
2. $a^m : a^n = a^{m-n}$, unde $a \in \mathbb{R}^*$.

Exemple: $2(3a - 2b) - 4(2a - 3b) = 6a - 4b - 8a + 12b = -2a + 8b$;

$$2x(3y + 4z) = (2x) \cdot (3y) + (2x) \cdot (4z) = 2 \cdot 3xy + 2 \cdot 4xz = 6xy + 8xz$$

$$-2x(2a + y - z) = (-2x) \cdot (2a) + (-2x) \cdot y + (-2x) \cdot (-z) = -4xa - 2xy + 2xz$$

$$2x \cdot 3x = 2 \cdot 3 \cdot x \cdot x = 6x^2; \quad -5xy^2 \cdot (-4xyz^2) = (-5) \cdot (-4) \cdot (x \cdot x) \cdot (y^2 \cdot y) \cdot z^2 = 20x^2y^3z^2;$$

$$(5ab^2c^3) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}} a^2bc^2 \right) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} (a \cdot a^2) \cdot (b^2 \cdot b) (c^3 \cdot c^2) = \sqrt{5} a^3 b^3 c^5;$$

$$(9x^3y^5z^2) : (-3x^2yz) = -3xy^4z, xyz \neq 0;$$

$$4(3x + 4)^3 : (3x + 4)^2 = 4(3x + 4) = 12x + 16, x \neq -\frac{4}{3};$$

$$(12x^4 - 8x^3 + 2x^2 + 10x) : (2x) = (12x^4) : (2x) + (-8x^3) : (2x) + (2x^2) : (2x) + (10x) : (2x) = 6x^3 - 4x^2 + x + 5, x \neq 0.$$

Vom folosi și **regula de desfacere a parantezelor**: $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$.

Exemple: $(3x - 1)(2x + 1) = (3x) \cdot (2x) + 3x \cdot 1 + (-1) \cdot 2x + (-1) \cdot 1 = 6x^2 + 3x - 2x - 1 = 6x^2 + x - 1$;

$$(a + 2b)(2a - b - 2) = a \cdot (2a) + a \cdot (-b) + a \cdot (-2) + (2b) \cdot (2a) + (2b) \cdot (-b) + (2b) \cdot (-2) = 2a^2 - ab - 2a + 4ab - 2b^2 - 4b = 2a^2 + 3ab - 2b^2 - 2a - 4b.$$

Ce am înțeles

1. Pentru următoarele enunțuri, dacă enunțul este adevărat, încercuiește litera A, în caz contrar, încercuiește litera F:

- a) $2x \cdot 2x = 4x$; A F
 b) $(3x^3y^2) : (2x^2) = 1,5xy^2$; A F
 c) $(6x^3y^2) : (2xy) - x \cdot (xy) = 2x^2y$. A F

2. Completează spațiile punctate cu răspunsul corect:

- a) Rezultatul calculului $(3x^2y) \cdot (-5xy^2)$ este egal cu
- b) Dacă $a = -1$ și $b = 3$, atunci $(3a + 2b) \cdot (b + 2a) =$
- c) Efectuând produsul $(x + 7)(3x - 5)$, obținem
- d) Rezultatul calculului $(x^2y^2z^3) : (xyz^2) - 4(xyz^2) : z$ este egal cu

Știu cum să rezolv

1 Efectuează:

a) $\left(\frac{4}{9}x\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}y\right) \cdot (6xz)$; b) $(26x^3) : (2x^2) - (5x^2) : x + (12x^5) : (-4x^4)$.

Soluție: a) $\left(\frac{4}{9}x\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}y\right) \cdot (6xz) = \left(-\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{2} \cdot 6\right)(x \cdot x)yz = -4x^2yz$;

b) $(26x^3) : (2x^2) - (5x^2) : x + (12x^5) : (-4x^4) = 13x - 5x - 3x = 5x$.

2 Calculează:

a) $(x - 2y)(4x - 3y)$; b) $(a + 1)(a^2 - a + 2) - (12a^5 - 6a^4 - 3a^3) : (-3a^2)$.

Soluție: a) $(x - 2y)(4x - 3y) = 4x^2 - 3xy - 8xy + 6y^2 = 4x^2 - 11xy + 6y^2$;

b) $(a + 1)(a^2 - a + 2) - (12a^5 - 6a^4 - 3a^3) : (-3a^2) = a^3 - a^2 + 2a + a^2 - a + 2 + 4a^3 - 2a^2 - a = 5a^3 - 2a^2 + 2$.

3 Dacă $41 \mid a^2 + b^2$, arată că $41 \mid 5a + 4b$ sau $41 \mid 5b + 4a$.

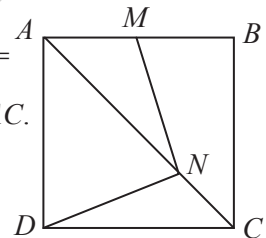
Soluție: Efectuând calculele, obținem: $(4a + 5b)(5a + 4b) = 20(a^2 + b^2) + 41ab$. Cum $41 \mid a^2 + b^2$ și $41 \mid 41ab$, rezultă că $41 \mid 5a + 4b$ sau $41 \mid 5b + 4a$.

4 Considerăm numărul $A = x^2 + 4x + 4$, $x \in \mathbb{N}$. Arată că numărul $A + 1$ are un număr par de divizori.

Soluție: Avem $A = x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2x + 2x + 4 = x(x + 2) + 2(x + 2) = (x + 2)(x + 2) = (x + 2)^2$. Rezultă că $A + 1$ nu este pătrat perfect. Astfel, descompunerea în factori primi a lui $A + 1$ conține un termen de forma $p^{2\alpha_1+1}$, deci $A + 1 = p_1^{2\alpha_1+1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$, de unde obținem faptul că numărul de divizori ai lui $A + 1$ este $(2\alpha_1 + 2)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_n + 1)$, ce reprezintă un număr par.

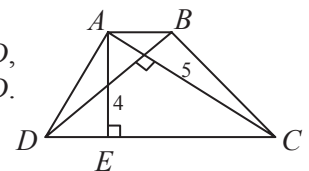
TEZA 1

- (1p) **1.** Arată că numărul $a = 2(x^2 + x - 1) - x(x + 2) + 2$ este pătrat perfect, oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}$.
- (1p) **2.** În sistemul de axe xOy , considerăm punctele $A(3, -1)$ și $B(1, 1)$. Află distanța dintre punctele A și B .
- (1p) **3.** La un spectacol s-au vândut 100 de bilete de câte 5 lei și, respectiv, de câte 20 de lei. Află câte bilete de 20 de lei s-au vândut, știind că suma încasată a fost de 950 lei.
- 4.** Se consideră expresia $E(x) = 2(x + 2)^2 - (x - 1)^2 - (7x + 5)$, unde $x \in \mathbb{R}$.
- (1p) **a)** Arată că $E(x) = (x + 1)(x + 2)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
- (1p) **b)** Demonstrează că $E(a)$ nu este pătrat perfect, oricare ar fi $a \in \mathbb{N}$.
- (1p) **5.** Pe cercul $\mathcal{C}(O, R)$ se consideră punctele A, B, C astfel încât $m(\sphericalangle BAC) = 70^\circ$ și $m(\sphericalangle ABC) = 60^\circ$. Află $m(\widehat{AB})$ și $m(\sphericalangle AOC)$.
- 6.** Un teren are forma unui pătrat $ABCD$, ca cel din figura alăturată, cu $AB = 24$ m. Considerăm M mijlocul lui $[AB]$ și $N \in (AC)$ astfel încât $NC = \frac{1}{4}AC$.
- (1p) **a)** Află lungimea lui DM .
- (2p) **b)** Arată că dreptele NM și ND sunt perpendiculare.



TEZA 2

- (1p) **1.** Dacă $a - b = 4$ și $a^2 - b^2 = 36$, află valoarea sumei $a + b$.
- (1p) **2.** Rezolvă în \mathbb{R} ecuația $\sqrt{(x-2)^2} = 4$.
- (1p) **3.** Într-o urnă sunt bile de culoare albă și de culoare neagră. Se știe că numărul bilelor albe este cu 5 mai mare decât numărul bilelor negre. Află numărul bilelor din urnă, știind că probabilitatea extragerii unei bile albe este egală cu $\frac{3}{5}$.
- 4.** Se consideră expresia $E(x) = (x^2 - x + 1)^2 - (x^2 - x)^2 + 1$, unde $x \in \mathbb{R}$.
- (1p) **a)** Arată că $E(x) = 2(x^2 - x + 1)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
- (1p) **b)** Arată că $E(x) > 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
- (2p) **5.** Se consideră triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle BAC) = 90^\circ$, $\text{tg}(\sphericalangle ACB) = \frac{3}{4}$ și $AC = 8$ cm. Află perimetrul triunghiului ABC , $\sin(\sphericalangle ABC)$, $\cos(\sphericalangle ABC)$, $\text{tg}(\sphericalangle ABC)$ și $\text{ctg}(\sphericalangle ABC)$.
- (2p) **6.** În figura alăturată, $ABCD$ este un trapez, $AB \parallel CD$, $AB < CD$, $AC \perp BD$, $AE \perp CD$, $E \in (CD)$, $AE = 4$ cm și $AC = 5$ cm. Află aria trapezului $ABCD$.



Cuprins

ALGEBRĂ

Capitolul I. CALCUL ALGEBRIC

1. Adunarea și scăderea numerelor reale reprezentate prin litere	3
2. Înmulțirea și împărțirea numerelor reale reprezentate prin litere	10
3. Ridicarea la putere cu exponent întreg a numerelor reale reprezentate prin litere	16
Test de autoevaluare.....	21
Recapitulare și sistematizare prin teste	22
4. Formule de calcul prescurtat $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$; $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$, unde $a, b \in \mathbb{R}$	24
5. Descompuneri în factori utilizând reguli de calcul în \mathbb{R}	30
5.1. Metoda factorului comun.....	30
5.2. Descompunerea în factori folosind formulele de calcul prescurtat	34
5.3. Metode combinate de descompunere în factori	39
6. Rezolvarea ecuației $x^2 = a$, $a \in \mathbb{Q}_+$	44
Test de autoevaluare.....	48
Recapitulare și sistematizare prin teste	49
Probleme pregătitoare pentru olimpiade și concursuri	51
Capitolul II. ECUAȚII ȘI INECUAȚII	52
7. Ecuații de gradul I cu o necunoscută	52
8. Inecuații de forma $ax + b > 0$ ($<$, \leq , \geq), $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$	57
9. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor	62
Test de autoevaluare.....	66
Recapitulare și sistematizare prin teste	67
Capitolul III. ELEMENTE DE ORGANIZARE A DATELOR	69
10. Produsul cartezian a două mulțimi nevide. Coordonate în plan. Distanța dintre două puncte din plan	69
11. Dependență funcțională. Reprezentarea și interpretarea unor dependențe funcționale prin tabele, diagrame și grafice ...	74
12. Probabilități. Probabilitatea realizării unor evenimente.....	78
Test de autoevaluare.....	81
Recapitulare și sistematizare prin teste	82
Probleme pregătitoare pentru olimpiade și concursuri	84

GEOMETRIE

Capitolul I. RELAȚII METRICE ÎN TRIUNGHIIUL DREPTUNGHIC

13. Proiecții ortogonale pe o dreaptă	85
14. Teorema înălțimii	89
15. Teorema catetei	93
16. Teorema lui Pitagora	97
17. Reciproca teoremei lui Pitagora.....	102
Test de autoevaluare.....	106
Recapitulare și sistematizare prin teste	107
18. Noțiuni de trigonometrie în triunghiul dreptunghic: sinusul, cosinusul, tangenta și cotangenta unui unghi ascuțit	109
19. Aria triunghiului.....	114
20. Ariile patrulaterelor.....	119
Test de autoevaluare.....	124
Recapitulare și sistematizare prin teste	125

Capitolul II. CERCUL

21. Definiția cercului. Elemente ale cercului: centru, rază, coardă, diametru etc. Interiorul și exteriorul cercului. Discul. Unghi la centru. Măsura arcelor. Arce congruente	127
22. Unghi înscris în cerc; patrulater inscriptibil; pozițiile relative ale unei drepte față de un cerc; pozițiile a două cercuri ...	132
23. Poligoane regulate. Lungimea cercului și aria discului	137
Test de autoevaluare.....	143
Recapitulare și sistematizare prin teste	144
Probleme pregătitoare pentru olimpiade și concursuri	146
MODELE DE TEZĂ	148
MODELE DE EVALUARE NAȚIONALĂ	150
RĂSPUNSURI	154