

EDITURA PARALELA 45



Redactare: Olimpia Filip, Daniel Mitran  
Tehnoredactare: Mioara Benza  
Pregătire de tipar: Marius Badea  
Design copertă: Marius Badea

**Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României**

**CHIRCIU, MARIN**

**Inegalități cu linii importante în triunghi : de la inițiere la performanță** / Marin Chirciu. - Pitești : Paralela 45, 2018

Conține bibliografie

ISBN 978-973-47-2692-9

51

**COMENZI – CARTEA PRIN POȘTĂ**

EDITURA PARALELA 45

Bulevardul Republicii, Nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești,  
jud. Argeș, cod 110177

Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918

Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492

E-mail: [comenzi@edituraparelela45.ro](mailto:comenzi@edituraparelela45.ro)

sau accesați [www.edituraparelela45.ro](http://www.edituraparelela45.ro)

Tiparul executat la tipografia *Editurii Paralela 45*

E-mail: [tipografie@edituraparelela45.ro](mailto:tipografie@edituraparelela45.ro)

Copyright © Editura Paralela 45, 2018

Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate,  
iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.

Marin Chirciu

---

**INEGALITĂȚI CU LINII IMPORTANTE  
ÎN TRIUNGHI**

DE LA INIȚIERE LA PERFORMANȚĂ

---

ÎNVĂȚARE DE EXCELENȚĂ<sup>®</sup>

*supersucces*



*Editura Paralela 45*

## Cuprins

	Soluții
Capitolul 1 – Inegalități cu medianele triunghiului ( $m_a, m_b, m_c$ ) .....	7 138
§ 1. 1. – Identități remarcabile cu laturile triunghiului .....	7 -
§ 1. 2. – Identități remarcabile cu mediane .....	12 138
§ 1. 3. – Inegalități remarcabile cu mediane .....	16 142
§ 1. 4. – Inegalități cu mediane .....	17 143
Capitolul 2 – Inegalități cu înălțimile triunghiului ( $h_a, h_b, h_c$ ) .....	41 176
§ 2. 1. – Identități remarcabile cu înălțimi .....	41 176
§ 2. 2. – Inegalități cu înălțimi .....	51 183
Capitolul 3 – Inegalități cu bisectoarele triunghiului ( $l_a, l_b, l_c$ ) .....	109 255
§ 3. 1. – Identități remarcabile cu bisectoare .....	109 255
§ 3. 2. – Inegalități remarcabile cu bisectoare .....	110 256
§ 3. 3. – Inegalități cu bisectoare .....	111 257
Capitolul 4 – Inegalități diverse .....	120 272
§ 4. 1. – Identități diverse cu mediane, înălțimi și bisectoare .....	120 272
§ 4. 2. – Inegalități cu mediane și înălțimi .....	121 273
§ 4. 3. – Inegalități cu mediane și bisectoare .....	129 287
§ 4. 4. – Inegalități cu bisectoare și înălțimi .....	133 292
§ 4. 5. – Inegalități diverse .....	136 297
<i>Bibliografie</i> .....	301

## capitolul

# 1

## Inegalități cu medianele triunghiului ( $m_a, m_b, m_c$ )

„Încearcă să trăiești în așa fel încât să nu  
prea te faci remarcat acolo unde ești, însă  
să îți se simtă lipsa imediat ce dispari de  
acolo.”

Victor Hugo

### § 1.1. Identități remarcabile cu laturile triunghiului

- $IG^2 = \frac{1}{9}(p^2 + 5r^2 - 16Rr)$ .
- $IH^2 = 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - p^2$ .
- $OG^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$ .
- $OH^2 = 9R^2 + 8Rr + 2r^2 - 2p^2$ .
- $\sum a = 2p$ .
- $\sum a^2 = 2(p^2 - r^2 - 4Rr)$ .
- $\sum a^3 = 2p(p^2 - 3r^2 - 6Rr)$ .
- $abc = 4Rrp$ .
- $\sum a^4 = 2[p^4 - p^2(6r^2 + 8Rr) + r^2(4R + r)^2]$ .
- $\sum a^5 = 2p^5 - 20p^3(Rr + r^2) + 10p(8R^2r^2 + 6Rr^3 + r^4)$ .
- $\sum a^6 = p^6 - 3p^4(4Rr - r^2) + 3p^2r^4 + r^3(4R + r)^3$ .
- $\sum bc = p^2 + r^2 + 4Rr$ .
- $\sum b^2c^2 = p^4 + p^2(2r^2 - 8Rr) + r^2(4R + r)^2$ .
- $\sum b^3c^3 = p^6 - p^4(12Rr - 3r^2) + 3p^2r^4 + r^3(4R + r)^3$ .
- $2\sum bc - \sum a^2 = 4r(4R - r)$ .

$$16. \sum \frac{a}{b+c} = \frac{2(p^2 - r^2 - Rr)}{p^2 + r^2 + 2Rr}.$$

$$18. \sum \frac{b+c}{a} = \frac{p^2 + r^2 - 2Rr}{2Rr}.$$

$$20. \sum \frac{(b+c)^2}{bc} = \frac{p^2 + r^2 + 10Rr}{2Rr}.$$

$$22. \sum \frac{1}{bc} = \frac{1}{2Rr}.$$

$$23. \sum \frac{1}{a^2} = \frac{p^4 - 2p^2(4Rr - r^2) + r^2(4R+r)^2}{16R^2r^2p^2}.$$

$$24. \prod (p-a) = r^2 p.$$

$$26. \prod (b+c-a) = 8r^2 p.$$

$$28. \sum a(p-a) = 2r(4R+r).$$

$$30. \sum a(p-a)^3 = 4Rrp^2 - 2r^2(4R+r)^2.$$

$$31. \sum a(p-a)^4 = 2rp[2p^2R - r(24R^2 + 2Rr - r^2)].$$

$$32. \sum a^3(p-a) = p^2(4Rr + 6r^2) - 2r^2(4R+r)^2.$$

$$33. \sum a(p-b)(p-c) = 2rp(2R-r).$$

$$34. \sum a^2(p-a) = 4rp(R+r).$$

$$35. \sum a^2(p-b)(p-c) = 4rp^2(R-r).$$

$$36. \sum bc(a-b)(a-c) = p^4 + p^2(2r^2 - 16Rr) + r^2(4R+r)^2.$$

$$37. \sum a^3(p-b)(p-c) = 2pr[p^2(2R-3r) + r^2(4R+r)].$$

$$38. \sum bc(p-b)(p-c) = r^2[p^2 + (4R+r)^2].$$

$$39. \sum bc(p-a)(a+b)(a+c) = p^5 + p^3(2r^2 - 4Rr) + pr^3(4R+r).$$

$$40. \sum (p-a)^2 = p^2 - 2r^2 - 8Rr.$$

$$42. \sum (p-b)(p-c) = r(4R+r).$$

$$44. \sum a^2(p-a)^2 = 2r^2[(4R+r) - p^2].$$

$$45. \sum (p-b)^2(p-c)^2 = r^2[(4R+r)^2 - 2p^2].$$

$$46. \sum a^2(p-b)^2(p-c)^2 = 2r^2p^2(8R^2 + r^2 - p^2).$$

$$47. \sum a^3(a-b)(a-c) = 16r^2p(4R^2 + 5Rr + r^2 - p^2).$$

$$17. \sum \frac{1}{b+c} = \frac{5p^2 + r^2 + 4Rr}{2p(p^2 + r^2 + 2Rr)}.$$

$$19. \sum \frac{1}{a} = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4Rrp}.$$

$$21. \sum \frac{(b+c)^2}{b+c-a} = \frac{2p(R+2r)}{r}.$$

$$25. \prod (b+c) = 2p(p^2 + r^2 + 2Rr).$$

$$27. \sum a(b-c)^2 = 2p(p^2 + r^2 - 14Rr).$$

$$29. \sum a(p-a)^2 = 2rp(2R-r).$$

$$41. \sum (p-a)^3 = p(p^2 - 12Rr).$$

$$43. \sum (p-a) = p.$$

## capitolul

# 2

## Inegalități cu înălțimile triunghiului ( $h_a, h_b, h_c$ )

„Problema cea mai mare e că proștii sunt absolut siguri de teoria lor, iar deșteptii sunt mereu nesiguri de ei.”

Bertrand Russel

### § 2.1. Identități remarcabile cu înălțimi

$$1. h_a + h_b + h_c = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{2R}.$$

$$2. h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a = \frac{2rp^2}{R}.$$

$$3. h_a h_b h_c = \frac{2r^2 p^2}{R}.$$

$$4. h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 = \frac{p^4 + 2r^2 p^2 + r^2 (4R + r)^2}{4R^2}.$$

$$5. \prod (h_b + h_c) = \frac{rp^2 (p^2 + r^2 + 2Rr)}{R^2}.$$

$$6. \sum ah_a^2 = \frac{rp}{R} \cdot (p^2 + r^2 + 4Rr).$$

$$7. \sum \frac{1}{h_a} = \frac{1}{r}.$$

$$8. \sum \frac{1}{h_a^2} = \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2r^2 p^2}.$$

$$9. \frac{1}{r^2} - \sum \frac{1}{h_a^2} = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{2r^2 p^2}.$$

$$10. \sum \frac{1}{h_a^3} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{4p^2 r^3}.$$

$$11. \frac{1}{r^3} - \sum \frac{1}{h_a^3} = \frac{3(p^2 + r^2 + 2Rr)}{4p^2 r^3}.$$

$$12. \sum \frac{1}{h_b + h_c} = \frac{p^4 + 2p^2(8Rr + r^2) + r^2(4R + r)^2}{4rp^2(p^2 + r^2 + 2Rr)} \leq \frac{1}{2r}.$$

$$13. \sum \frac{1}{h_b h_c} = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4r^2 p^2}.$$

$$14. \sum \frac{h_a}{p - a} = \frac{p^2 + (4R + r)^2}{2Rp}.$$

$$15. \sum \frac{p(p - a)}{h_b h_c} = \frac{p^2 + r^2 - 8Rr}{4r^2}.$$

$$16. \sum \frac{(p - b)(p - c)}{ah_a} = \frac{4R + r}{2p}.$$

- $$17. \sum \frac{ah_a}{(p-b)(p-c)} = \frac{2p}{r}.$$
- $$18. \sum \frac{h_b h_c}{(p-b)(p-c)} = 2 \left( \frac{r}{R} + 4 \right) \leq 9.$$
- $$19. \sum \frac{(h_a - r)^2}{(p-b)(p-c)} = \frac{p^2 + r^2 - 6Rr}{4R^2}.$$
- $$20. \sum \frac{(h_a - r)^2 + h_b h_c}{(p-b)(p-c)} = \frac{p^4 + p^2(2r^2 - 20Rr) + 208R^2 r^2 + 28Rr^3 + r^4}{16R^2 r^2}.$$
- $$21. \sum \frac{h_a^2}{(p-a)^2} = \frac{p^4 - 2p^2(16R^2 - r^2) + (4R+r)^4}{4R^2 p^2}.$$
- $$22. \sum \frac{(h_b + h_c)^2}{h_b h_c} = \frac{p^2 + r^2 + 10Rr}{2Rr}.$$
- $$23. \sum h_a (h_b + h_c)^2 = \frac{rp^2(p^2 + r^2 + 10Rr)}{R^2}.$$
- $$24. \sum \frac{h_b + h_c}{h_a} = \frac{p^2 + r^2 - 2Rr}{2Rr}.$$
- $$25. \sum \frac{h_b h_c}{h_b + h_c} = r \cdot \frac{5p^2 + r^2 + 4Rr}{p^2 + r^2 + 2Rr} \geq \frac{9r}{2}.$$
- $$26. \sum \frac{a}{h_b + h_c} = \frac{R}{p} \cdot \frac{5p^2 + r^2 + 4Rr}{p^2 + r^2 + 2Rr} \geq \sqrt{3}.$$
- $$27. \sum \frac{a^2}{h_b + h_c} = 4R \cdot \frac{p^2 - r^2 - Rr}{p^2 + r^2 + 2Rr} \geq 3R.$$
- $$28. \sum \frac{h_a}{b+c} = \frac{p^4 + 2p^2(8Rr + r^2) + r^2(4R+r)^2}{4Rp(p^2 + r^2 + 2Rr)}.$$
- $$29. \sum \frac{h_b + h_c}{a} = \frac{2p}{R}.$$
- $$30. \sum \frac{r_b + r_c}{a} = \frac{p}{r}.$$
- $$31. \sum \frac{h_b h_c}{a} = \frac{3rp}{R}.$$
- $$32. \sum \frac{a}{h_b h_c} = \frac{3R}{rp}.$$
- $$33. \sum \frac{h_b h_c}{a^2} = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4R^2}.$$
- $$34. \sum \frac{a^2}{h_b h_c} = \frac{2R}{r}.$$
- $$35. \sum \frac{h_b h_c}{ah_a} = \frac{p}{R}.$$
- $$36. \sum \frac{bc}{ah_a} = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{2rp}.$$
- $$37. \sum \frac{ah_a}{bc} = \frac{p}{R}.$$
- $$38. \sum \frac{h_a}{bc} = \frac{3}{2R}.$$