EDITURA PARALELA 45

colecția

concursuri școlare

Autorii aduc mulțumiri speciale Societății de Științe Matematice din România pentru sprijinul acordat.

Redactare: Ramona Rossall
Tehnoredactare: Iuliana Ene
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Delia Gheorghe

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
Matematică : Olimpiade și concursuri școlare : clasele IV-VI : **2017-2018** / Gheorghe Căiniceanu (coord.), Emilia-Ștefania Răducan, Gabriela Roxana Bondoc, ... - Pitești : Paralela 45, 2018
ISBN 978-973-47-2828-2

I. Căiniceanu, Gheorghe
II. Răducan, Emilia Ștefania
III. Bondoc, Gabriela Roxana

51

Copyright © Editura Paralela 45, 2018
Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate, iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.

EDITURA PARALELA 45

Gheorghe Căiniceanu
(coordonator)
Emilia-Ștefania Răducan, Carmen-Victorița Chirfot,
Gabriela Roxana Bondoc, Mariana Draga-Tătucu,
Vlad Lungu, Elena Rîmniceanu,
Daniel Stretcu, Tomiță-Constantin Vasile

matematică

olimpiade și concursuri școlare

clasele IV-VI

2017-2018

Editura Paralela 45

EDITURA PARALELA 45

clasa a IV-a

ETAPA LOCALĂ

Ilfov

4.O.1. a) Calculaţi:

$$1\,500 + \{250 : 5 + 15 : 3 \times [262 - (50 : 25 + 2) \times 65] \times 150\}.$$

b) Aflaţi valoarea lui a din egalitatea:

$$254 - \{[36 + 64 - (15 + 18 : a)\ ] \times 3\} = 17.$$

4.O.2. În excursie au plecat 55 de elevi, câte 3 fete pentru 2 băieţi. Câţi băieţi şi câte fete sunt?

4.O.3. Într-o librărie erau 1 234 creioane şi stilouri. După ce s-au vândut 87 de creioane şi 43 de stilouri, numărul creioanelor rămase reprezintă o treime din numărul stilourilor rămase. Câte creioane şi câte stilouri erau la început în librărie?

4.O.4. La un cerc de matematică participă 34 de copii. Dacă numărul fetelor ar fi cu 4 mai mic, atunci jumătate din numărul lor ar fi cu 3 mai mare decât un sfert din numărul băieţilor. Câţi băieţi şi câte fete participă la cercul de matematică?

CONCURSURI INTERJUDEȚENE

„Euxin Math”, Constanța, 13 mai 2017

Subiectul I

4.C.1. Care este cel mai mic număr impar format din 6 cifre distincte nenule care are cifra sutelor de mii 7, iar cifra zecilor 5?

A. 712 359; B. 702 359; C. 172 359; D. 71 379.

4.C.2. Care este cel mai mare număr de 5 cifre cu cifra sutelor 2, ştiind că se împarte exact la 5?

A. 98 295; B. 92 195; C. 98 700; D. 99 295.

4.C.3. Aflaţi numărul necunoscut din relaţia: $[(78 : b + 5) : 2 + 40] : 7 - 300 : 50 = 1$.

A. 3; B. 6; C. 10; D. 1.

EDITURA PARALELA 45

4.C.4. Cât reprezintă $\frac{2}{3}$ din jumătatea numărului 966?

A. 644; B. 1 449; C. 322; D. 483.

4.C.5. Perimetrul unui pătrat este 64 m. Aflaţi suma laturilor unui dreptunghi care are lungimea de 3 ori mai mare decât doimea laturii pătratului şi lăţimea de 15 m.

A. 39 m; B. 78 m; C. 24 m; D. 30 m.

4.C.6. Mă gândesc la un număr, îl adun cu 1 800, micşorez rezultatul cu 1 823 şi obţin 45 111. La ce număr m-am gândit?

A. 45 134; B. 40 111; C. 45 088; D. 41 488.

Subiectul II

4.C.7. Din produsul numerelor 360 şi 47 scădeţi câtul numerelor 375 şi 5.

4.C.8. Aflaţi deîmpărţitul, ştiind că împărţitorul este 8, câtul este de 37 de ori mai mare, iar restul este 6.

4.C.9. Un muncitor vopseşte un perete. În prima zi vopseşte $\frac{2}{7}$ din lungimea peretelui, iar a doua zi cu $\frac{1}{7}$ mai mult. Ce lungime are peretele, dacă au mai rămas de vopsit 36 m?

4.C.10. Suma a trei numere este 640. Primul număr este dublul lui 113, iar al doilea număr reprezintă o treime din numărul 627. Aflaţi al treilea număr.

4.C.11. Un şofer parcurge 270 km şi constată că mai are de parcurs $\frac{2}{5}$ din drum. Câţi kilometri trebuia să parcurgă şoferul?

4.C.12. Un ţăran aduce la piaţă 6 lădiţe cu mere, cântărind fiecare 16 kg. El vinde câte 9 kg din fiecare lădiţă. Câte kilograme de mere i-au rămas nevândute, ştiind că o lădiţă goală cântăreşte 1 kg?

Subiectul III

4.C.13. Suma a trei numere este 930. Ştiind că jumătăţile lor sunt numere consecutive, aflaţi cele 3 numere.

4.C.14. Într-o livadă sunt 1 560 meri, cireşi, vişini şi peri. Meri sunt cu 100 mai puţini decât peri. Numărul merilor şi al cireşilor este egal cu 630, iar diferenţa dintre numărul vişinilor şi al perilor este 130. Câţi pomi sunt de fiecare fel?

„Laurenţiu Panaitopol", Giurgiu, 13-14 mai 2017

4.C.15. Aflaţi numărul x din egalitatea: $10 - [9 + (8 + 7) : (6 - x)] : 4 - 3 \times 2 = 1$.

4.C.16. Se consideră numărul $N = 50515253...118119120$, format din scrierea numerelor de la 50 la 120, în ordine crescătoare. Aflaţi:

a) câte cifre are numărul N;

b) suma cifrelor numărului N.

4.C.17. Victor, Aida şi Mara au împreună 474 lei. Dacă Aida îi dă lui Victor 10 lei şi Mara îi dă lui Victor 5 lei, atunci Aida are de trei ori mai mulţi bani decât Victor şi Mara are de două ori mai mulţi bani decât Victor. Câţi lei a avut fiecare la început?

Pavel Rîncu, *Gazeta Matematică* nr. 2/2017

EDITURA PARALELA 45

„Concurs de selecție Centrul Județean de Excelență Dolj”, Craiova, 23 septembrie 2017

4.C.18. a) Aflaţi numărul necunoscut:

$$125 - (7 \times 9 + 3 \times 9) : a - (10 \times 10 + 5) = 8 \times 5 : 4.$$

b) Produsul a 11 numere naturale este 11. Aflaţi suma numerelor.

c) Dacă din dublul unui număr scădem sfertul său, obţinem 98. Care este numărul?

4.C.19. Se dă numărul $A = 123456789101112...99100$, obţinut prin alipirea tuturor numerelor naturale de la 1 la 100.

a) Care este cifra de pe locul 22 a numărului A?

b) Câte cifre are numărul A?

c) Eliminaţi 170 de cifre din numărul A astfel încât numărul care rămâne să fie cel mai mare posibil. Care este acesta? Justificaţi!

4.C.20. Se pot pune 250 de bile în 16 cutii astfel încât în fiecare cutie să fie cel puţin 8 bile şi să nu fie 2 cutii cu acelaşi număr de bile?

4.C.21. La un club sportiv sunt înscrişi 873 de copii care practică unul dintre sporturile: fotbal, tenis şi baschet. Dintre aceştia 584 nu practică fotbalul, iar 645 nu practică tenisul. Câţi copii de la acest club practică fotbal? Dar tenis? Dar baschet?

„Cristian S. Calude”, Galați, 21 octombrie 2017

4.C.22. Ana şi Cosmin împart 72 de bomboane astfel: de câte ori ia Ana 4 bomboane, Cosmin ia 5 bomboane. Câte bomboane are Cosmin în final?

A. 35; B. 32; C. 45; D. 30; E. Alt răspuns.

4.C.23. 12 băieţi şi 8 fete sunt membri ai cercului de matematică. În fiecare săptămână, încă 2 fete şi 1 băiat sunt acceptaţi ca membri ai cercului. Câţi membri va avea cercul de matematică atunci când numărul băieţilor va fi egal cu numărul fetelor?

A. 23; B. 26; C. 44; D. 32; E. Alt răspuns.

4.C.24. Numărului a i se adaugă cifra 0 la sfârşit, obţinându-se numărul b. Ştiind că $a + b = 539$, aflaţi-l pe a.

A. 53; B. 49; C. 59; D. 43; E. Alt răspuns.

4.C.25. Ultima cifră a numărului $a = 45 \times 3 - 13 \times 2$ este:

A. 9; B. 1; C. 19; D. 0; E. Alt răspuns.

4.C.26. Rezultatul calculului $300 - 290 + 280 - 270 + \ldots + 40 - 30 + 20 - 10$ este:

A. 150; B. 250; C. 300; D. 155; E. Alt răspuns.

4.C.27. Jumătatea unui număr este 18. Dublul lui este:

A. 72; B. 36; C. 9; D. 78; E. Alt răspuns.

EDITURA PARALELA 45

clasa a VI-a

ETAPA LOCALĂ

Alba

6.O.1. Se consideră mulţimea: $A = \left\{ \frac{a}{2018}; \frac{a+1}{2018}; \frac{a+2}{2018}; ...; \frac{a+6054}{2018} \right\}$, unde $a \in \mathbb{N}$.

a) Determinaţi cea mai mică valoare a lui a pentru care media aritmetică a elementelor mulţimii A este număr natural.

b) Aflaţi a ştiind că mulţimea A conţine exact patru numere naturale.

6.O.2. a) Arătaţi că numărul $A = 2^{9n+4} \cdot 5^{9n+1} + 1$ este divizibil cu 81.

b) Dacă $\frac{2018}{a+4} + \frac{2018}{b+5} + \frac{2018}{c+6} + \frac{2018}{d+7} = 2017$, calculaţi $\frac{a+3}{a+4} + \frac{b+4}{b+5} + \frac{c+5}{c+6} + \frac{d+6}{d+7}$.

Gazeta Matematică nr. 5/2017 (enunț modificat)

6.O.3. Fie segmentul $[AB]$ şi punctele C, D, E pe acest segment, astfel încât $4 \cdot BC = AB$, D este mijlocul segmentului $[AC]$ şi $DE = \frac{AD}{3}$, $E \in (AD)$.

a) Arătaţi că $[AE] \equiv [BC]$.

b) Arătaţi că segmentele $[AB]$ şi $[CE]$ au acelaşi mijloc.

6.O.4. Se consideră unghiul AOB având măsura egală cu 150°. În interiorul său se construiesc semidreptele $[OR_1$, $[OR_2$, ..., $[OR_{29}$ şi apoi semidreptele $[OV_1$, $[OV_2$, ..., $[OV_{24}$. Semidreptele $[OR_1$, $[OR_2$, ..., $[OR_{29}$ sunt colorate cu roşu şi împart unghiul AOB în 30 de unghiuri congruente, iar semidreptele $[OV_1$, $[OV_2$, ..., $[OV_{24}$ sunt colorate cu verde şi împart unghiul AOB în 25 de unghiuri congruente. Aflaţi numărul semidreptelor verzi ce se suprapun peste semidreptele roşii, respectiv câte unghiuri cu măsura egală cu 1° apar în desen.

Arad

6.O.5. a) Aflaţi numerele $\overline{xyz}$, astfel încât $x + y + z = \frac{144}{\overline{xy}}$.

b) Aflaţi numerele naturale x şi y, astfel încât $x \cdot y = 2019 + y - 2x$.

6.O.6. Determinaţi numerele prime p, astfel încât $p^2 + 3^p + 1 = 37^{4^a}$, unde a este număr natural dat.

EDITURA PARALELA 45

6.O.7. Fie A_0, A_1, ..., A_n puncte situate în această ordine pe o dreaptă d, astfel încât $A_0A_1 = 1$, $A_1A_2 = 2$, $A_2A_3 = 2^2$, ..., $A_{n-1}A_n = 2^{n-1}$.

a) Arătaţi că $A_0A_{2018} = 2^{2018} - 1$.

b) Aflaţi p, astfel încât $A_0A_p = 1023$.

c) Dacă M este mijlocul lui A_2A_{12} şi N este mijlocul lui $A_{12}A_{24}$, determinaţi MN.

6.O.8. Fie unghiul ascuţit $\sphericalangle AOB$. În semiplanul determinat de OA care nu conţine pe $(OB$ se duc dreptele $OX \perp OA$ şi $OY \perp OB$. Dacă $(OE$ este bisectoarea $\sphericalangle XOB$, iar $(OY$ este bisectoarea $\sphericalangle XOE$, arătaţi că $(OA$ este bisectoarea $\sphericalangle BOE$ şi aflaţi măsura unghiului $\sphericalangle AOB$.

Argeș

6.O.9. În Şcoala Altfel, cei 25 de elevi ai clasei a VI-a A s-au jucat următorul joc: *Romaniţa a scris pe tablă toate numerele naturale până la 500, inclusiv. Apoi, în ordine, pe rând, cu colegii ei au efectuat următorul pas: „au ieşit la tablă, au şters de pe tablă şase dintre numerele scrise şi, în locul unui număr şters, au scris suma tuturor numerelor şterse”. Jocul s-a terminat când pe tablă au rămas mai puţin de şase numere.*

a) De câte ori a ieşit la tablă Romaniţa?

b) Calculaţi câte numere şi care dintre ele au rămas pe tablă, la finalul jocului.

Ligia Surugiu

6.O.10. Fie numărul 12345. Se efectuează toate permutările posibile ale cifrelor acestui număr şi notăm cu A mulţimea tuturor numerelor obţinute prin permutările de mai sus. (Exemplu: toate permutările posibile ale cifrelor numărului 123 generează numerele 123, 132, 213, 231, 312, 321.)

a) Arătaţi că în mulţimea A nu sunt pătrate perfecte.

b) Aflaţi media aritmetică a elementelor mulţimii A.

Dragoș Petrică și Cosmin Manea

6.O.11. În ΔABC, $[AB] \equiv [AC]$, $m(\sphericalangle A) < 90°$, considerăm punctele $M \in (BC$, $N \in (AB$, astfel încât $[BM] \equiv [AB]$ şi $[BN] \equiv [CM]$.

a) Demonstraţi că ΔAMN este isoscel.

b) Dacă $AB = AC = 2a$ şi $BC = a$, $a \in \mathbb{Q}_+^*$, justificaţi că $(AC$ nu poate fi bisectoare a $\sphericalangle MAN$.

Daniel Codeci

6.O.12. Pe dreapta d se consideră punctele O, A, B, C, D, E, F, în această ordine, astfel încât $[OA] \equiv [AB]$, B este mijlocul lui $[AC]$, C este mijlocul lui $[AD]$, D este mijlocul lui $[BE]$ şi $EF = 2 \cdot DE$.

a) Arătaţi că segmentele $[OE]$ şi $[CD]$ au acelaşi mijloc.

b) Demonstraţi că $\frac{AC}{BE} + \frac{BC}{CD} + \frac{AB}{AD} > \frac{BF}{AF}$.

Anișoara Gheorghe (prelucrare Olimpiada Locală Iași, 2014)

EDITURA PARALELA 45

CONCURSURI INTERJUDEȚENE

„**G**rigore **M**oisil”, Zalău, 31 martie–2 aprilie 2017

6.C.1. Fie $(a, b) = d \Rightarrow \exists\, a', b' \in \mathbb{N}$ astfel încât $a = da'$, $b = db'$, cu $(a', b') = 1$. $[a, b] = da'b'$. Ecuaţia devine $d + da'b' = db' + 9$; $d \mid d + da'b'$ şi $d \mid db' \Rightarrow d \mid 9 \Rightarrow d \in \{1, 3, 9\}$. I. $d = 1 \Rightarrow 1 + a'b' = b' + 9 \Rightarrow b'(a' - 1) = 8$. i) $b' = 1 \Rightarrow b = 1$ şi $a' - 1 = 8 \Rightarrow a' = 9 \Rightarrow a = 9$. ii) $b' = 2 \Rightarrow b = 2$ şi $a' - 1 = 4 \Rightarrow a' = 5 \Rightarrow a = 5$. iii) $b' = 4 \Rightarrow$ $\Rightarrow b = 4$ şi $a' - 1 = 2 \Rightarrow a' = 3 \Rightarrow a = 3$. iv) $b' = 8 \Rightarrow b = 8$ şi $a' - 1 = 1 \Rightarrow a' = 2 \Rightarrow a = 2$, care nu este însă soluţie căci $(a, b) \neq 1$. II. $d = 3 \Rightarrow 3 + 3a'b' = 3b' + 9 \Rightarrow 1 + a'b' = b' + 3 \Rightarrow b'(a' - 1) = 2$. i) $b' = 2 \Rightarrow b = 6$ şi $a' - 1 = 1 \Rightarrow a' = 2 \Rightarrow a = 6$, care nu este însă soluţie căci $(6, 6) \neq 3$. ii) $b' = 1 \Rightarrow b = 3$ şi $a' - 1 = 2 \Rightarrow a' = 3 \Rightarrow$ $\Rightarrow a = 9$. III. $d = 9 \Rightarrow 9 + 9a'b' = 9b' + 9 \Leftrightarrow a'b' = b'$. i) $b' = 0 \Rightarrow b = 0$ şi $(a, b) = a$, $[a, b] = 0$ obţinem $a = 9$. ii) $b' \neq$ $\neq 0 \Rightarrow a'b' = b' \Rightarrow a' = 1 \Rightarrow a = 9$. Şi orice pereche de forma $(9, 9k)$, cu $k \in \mathbb{N}^*$ verifică. Deci mulţimea perechilor de numere naturale (a, b) care verifică relaţia din enunţ este formată din elementele: $(9, 1)$, $(5, 2)$, $(3, 4)$, $(9, 3)$ şi $(9, 9k)$, $k \in \mathbb{N}$.

6.C.2. Fie P mijlocul $[EF]$. ΔABC este dreptunghic isoscel $\Rightarrow \mathrm{m}(\sphericalangle BCA) = 45° \Rightarrow \mathrm{m}(\sphericalangle BCE) = 15°$ (1). ΔBCF este dreptunghic şi BP – mediană $\Rightarrow [BP] \equiv [CP] \equiv [PF]$ (2). $CF = 2AB \Rightarrow \dfrac{CF}{2} = AB \Rightarrow [CP] \equiv [AB] \equiv [BC]$ (3). Din (1), (2) şi (3) $\Rightarrow \Delta BCP$ – echilateral $\Rightarrow \mathrm{m}(\sphericalangle ECP) = 45°$. ΔABC şi ΔECP, $[AB] \equiv [PC]$; $\mathrm{m}(\sphericalangle BAC) = \mathrm{m}(\sphericalangle ECP) =$ $= 45°$; $[AC] \equiv [EC]$ (ΔAEC – echilateral) $\overset{\text{L.U.L.}}{\Rightarrow}$ $\Delta ABC \equiv \Delta CPE \Rightarrow [EP] \equiv [BC] \equiv [AB] \equiv [PC] \Rightarrow \Delta EPC$ – isoscel cu baza EC şi cum $\mathrm{m}(\sphericalangle PCE) = 45° \Rightarrow \mathrm{m}(\sphericalangle EPC) = 90° \Rightarrow EP \perp CF$. Dar EP mediană în $\Delta CEF \Rightarrow \Delta CEF$ isoscel cu baza CF şi cum $\mathrm{m}(\sphericalangle ECF) = 45° \Rightarrow \mathrm{m}(\sphericalangle CEF) = 90° \Rightarrow EF \perp EC$.

6.C.3. Calculăm exponentul lui 2 în produsul $501 \cdot 502 \cdot ... \cdot 2016$: $502 = 2 \cdot 251$, $504 = 2 \cdot 252$, …, $2016 = 2 \cdot 1008$. În prima etapă avem $1008 - 251 + 1 = 758$. $252 = 2 \cdot 126$, $254 = 2 \cdot 127$, …, $1008 = 2 \cdot 504$. În a doua etapă avem $504 - 126 + 1 = 379$. $126 = 2 \cdot 63$, …, $504 = 2 \cdot 252$. În a treia etapă avem $252 - 63 + 1 = 190$. $64 = 2 \cdot 32$, …, $252 = 2 \cdot 126$. În a patra etapă avem $126 - 32 + 1 = 95$. $32 = 2 \cdot 16$, …, $126 = 2 \cdot 63$. În a cincea etapă avem $63 - 16 + 1 = 48$. $16 = 2 \cdot 8$, …, $62 = 2 \cdot 31$. În a şasea etapă avem $31 - 8 + 1 = 24$. $8 = 2 \cdot 4$, …, $30 = 2 \cdot 15$. În a şaptea etapă avem $15 - 4 + 1 = 12$. Rămân $4 = 2^2$, $6 = 2 \cdot 3$, $8 = 2^3$, $10 = 2 \cdot 5$, $12 = 2^2 \cdot 3$, $14 = 2 \cdot 7$, adică $2 + 1 + 3 + 1 + 2 + 1 = 10$. Aşadar, exponentul lui 2 în produsul dat este $758 + 379 + 190 + 95 + 48 + 24 + 12 +$ $+ 10 = 1516 \Rightarrow x = 1516$.

6.C.4. $2211^{2018} = 2211^{2016} \cdot 2211^2$. $2211 = 33 \cdot 67 = \dfrac{66 \cdot 67}{2} = 1 + 2 + \ldots + 66$. Este cunoscută formula $1^3 + 2^3 +$ $+ \ldots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Deci, $1^3 + 2^3 + \ldots + 66^3 = \left(\dfrac{66 \cdot 67}{2}\right)^2 = 2211^2$. Deci, $2211^{2016} = 2211^{2016} \cdot$ $\cdot (1^3 + 2^3 + \ldots + 66^3) = \left(2211^{672}\right)^3 + \left(2211^{672} \cdot 2\right)^3 + \ldots + \left(2211^{672} \cdot 66\right)^3$.

„**E**uclid”, Iași, 12 mai 2017

SUBIECT INDIVIDUAL

6.C.5. $1 + 2 + 3 + \ldots + 2016 = 1008 \cdot 2017$; $2016 - 2015 + 2014 - 2013 + \ldots + 4 - 3 + 2 - 1 = 1008$; $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + ... + \dfrac{1}{2016 \cdot 2017} = \dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + ... + \dfrac{1}{2016} - \dfrac{1}{2017} = \dfrac{2016}{2017}$. Găsim apoi $x = 2016$.

EDITURA PARALELA 45

CUPRINS

EDITURA PARALELA 45