

Nume:

Prenume:

Clasă:

Școală:

.....

Colecția **MATE 2000 +**



Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.N. nr. 3022/08.01.2018.

Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programul școlar în vigoare pentru clasa a VIII-a, aprobată prin O.M.E.C.I. nr. 5097/09.09.2009.

Referință științifică: Lucrarea a fost definitivată prin contribuția și recomandările Comisiei științifice și metodice a publicațiilor Societății de Științe Matematice din România. Aceasta și-a dat avizul favorabil în ceea ce privește alcătuirea și conținutul matematic.

Redactare: Amalia Mărășescu
Tehnoredactare: Carmen Rădulescu
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
NEGRILĂ, ANTON

Matematică : algebră, geometrie : clasa a VIII-a / Anton Negrilă,
Maria Negrilă. - Ed. a 7-a. - Pitești : Paralela 45, 2018
2 vol.
ISBN 978-973-47-2766-7
Partea 2. - 2018. - ISBN 978-973-47-2873-2

I. Negrilă, Maria

51

Copyright © Editura Paralela 45, 2018

Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate,
iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.

Anton NEGRILĂ
Maria NEGRILĂ

Soluțiile testelor de autoevaluare
pot fi consultate la adresa:
[https://www.edituraparelela45.ro/
download/solutii_teste_de_autoevaluare
_consolidare_clasa8_p2_2018-2019.pdf](https://www.edituraparelela45.ro/download/solutii_teste_de_autoevaluare_consolidare_clasa8_p2_2018-2019.pdf)



algebră geometrie

clasa a VIII-a

partea a II-a

ediția a VII-a

mate 2000 – consolidare

ÎNVĂȚARE DE CONSOLIDARE[®]

antrenament



Capitolul V

Rezolvarea ecuației de gradul al doilea

PP Competențe specifice

- C1. Identificarea unor reguli de calcul numeric sau algebric pentru simplificarea unor calcule
- C2. Utilizarea operațiilor cu numere reale și a proprietăților acestora în rezolvarea unor ecuații
- C3. Aplicarea regulilor de calcul și folosirea parantezelor

PE-PP

Ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ ($x \in \mathbb{R}$), $a \neq 0$, este echivalentă cu ecuația

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0, \text{ adică:}$$

$$x^2 + 2 \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0 \text{ sau } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0.$$

Putem descompune membrul stâng în factori de gradul I numai dacă numărul $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \geq 0$. Semnul acestui număr este același cu semnul numărătorului $b^2 - 4ac$. De aceea, numărul $b^2 - 4ac$ este numit *discriminantul ecuației*. El se notează, de obicei, cu litera grecească Δ (se citește „delta”).

Distingem trei cazuri:

1. $\Delta > 0$. În acest caz, vom putea descompune în factori:

$$\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0,$$

deci ecuația are două soluții:

$$-\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ și } -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Se obișnuiește să se noteze soluțiile cu x_1 și x_2 .

Adică: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, unde $\Delta = b^2 - 4ac$.

2. $\Delta = 0$. În acest caz, ecuația devine $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$ și are o singură soluție, anume $-\frac{b}{2a}$.

3. $\Delta < 0$. În acest caz, $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0 \Rightarrow$ ecuația nu are nicio soluție reală.

□ Dacă $b = 2b'$, observăm că formula de rezolvare este:

$$x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}.$$

□ Dacă, în plus, $a = 1$, formula de rezolvare este $x_{1,2} = -b' \pm \sqrt{b'^2 - c}$.

Exemple:

1. Determinați numărul real $a \in \mathbb{R}$ pentru care ecuația $(a + 1)x^2 + (2a + 3)x - a = 0$ are soluția $x = \frac{1}{3}$. Determinați cea de-a doua soluție pentru valoarea lui a determinată anterior.

Soluție: Dacă $x = \frac{1}{3}$, înlocuind în ecuație, se obține ecuația $\frac{a+1}{9} + \frac{2a+3}{3} - a = 0$, care are ca soluție $a = 5$. Prin înlocuirea lui a în ecuație, se obține ecuația $6x^2 + 13x - 5 = 0$. Calculăm $\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 289$, iar $\sqrt{\Delta} = \sqrt{289} = 17$. Atunci, soluțiile ecuației sunt:

$$x_1 = \frac{-13-17}{12} = \frac{-30}{12} = -\frac{5}{2}; \quad x_2 = \frac{-13+17}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

2. Rezolvați ecuația $\frac{6}{x^2-1} - \frac{2}{x-1} = 2 - \frac{x+4}{x+1}$.

Soluție: Ecuația este definită pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Se înmulțește ecuația cu $(x^2 - 1)$ și se obține ecuația echivalentă cu ea: $6 - 2(x + 1) = 2(x^2 - 1) - (x + 4)(x - 1)$. Prin desfacerea parantezelor și trecerea termenilor în același membru se obține ecuația echivalentă $x^2 - x - 2 = 0$, cu soluțiile $x_1 = 1$; $x_2 = 2$, și, cum $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \Rightarrow x = 2$.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Rezolvați ecuațiile:

a) $x(x + 7) = 0$;

b) $(x - 1)(x + 2) = 0$;

c) $(x - 3)(x + 4) = 0$;

d) $(x + 1)(x - 6) = 0$;

e) $(x + 3)(x - 2) = 0$;

f) $(2x - 1)(2x + 3) = 0$;

g) $(2x + 5)(5x + 2) = 0$;

h) $(3x - 8)(2x + 9) = 0$.

2. Rezolvați ecuațiile:

a) $x^2 + 3x = 0$;

b) $x^2 - 2x = 0$;

c) $3x^2 + 9x = 0$;

d) $4x^2 - 8x = 0$;

e) $6x^2 - x = 0$;

f) $-5x^2 + 8x = 0$;

g) $-0,6x^2 + 3,6x = 0$;

h) $-0,5x^2 - 2,5x = 0$.

3. Găsiți mulțimea soluțiilor reale ale ecuațiilor:

a) $x^2 - 1 = 0$;

b) $x^2 - 4 = 0$;

c) $4x^2 - 9 = 0$;

d) $25x^2 - 16 = 0$;

e) $64x^2 - 81 = 0$;

f) $36x^2 - 25 = 0$;

g) $5x^2 - 45 = 0$;

h) $3x^2 - 12 = 0$;

i) $6x^2 - 216 = 0$;

j) $x^2 + 4 = 0$;

k) $-x^2 - 12 = 0$.

4. Rezolvați în \mathbb{R} ecuațiile:

a) $x^2 - 7x + 6 = 0$;	b) $x^2 + 2x - 8 = 0$;	c) $x^2 + 5x - 14 = 0$;
d) $x^2 - 8x - 20 = 0$;	e) $x^2 + 4x - 12 = 0$;	f) $x^2 - 7x - 30 = 0$;
g) $x^2 - 9x + 14 = 0$;	h) $x^2 - 10x + 16 = 0$;	i) $x^2 + 7x + 10 = 0$.

5. Rezolvați în \mathbb{R} ecuațiile:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$;	b) $x^2 + x - 6 = 0$;	c) $x^2 - 7x + 12 = 0$;
d) $x^2 + x - 12 = 0$;	e) $x^2 - 6x + 8 = 0$;	f) $x^2 + 3x - 10 = 0$;
g) $x^2 - 8x + 15 = 0$;	h) $x^2 + 2x - 24 = 0$;	i) $x^2 - 4x - 21 = 0$.

6. Rezolvați în \mathbb{R} ecuațiile:

a) $2x^2 + x - 3 = 0$;	b) $2x^2 - x - 15 = 0$;	c) $3x^2 - 5x + 2 = 0$;
d) $2x^2 - 5x + 2 = 0$;	e) $2x^2 + 3x + 1 = 0$;	f) $2x^2 - x - 3 = 0$;
g) $3x^2 + x - 2 = 0$;	h) $3x^2 + 4x - 7 = 0$;	i) $2x^2 + x - 1 = 0$.

PE Aplicare și exersare **

7. Rezolvați ecuațiile:

a) $(x - 1)^2 - 4 = 0$;	b) $(x + 2)^2 - 9 = 0$;	c) $(x - 3)^2 - 16 = 0$;
d) $(x + 4)^2 - 25 = 0$;	e) $(x - 2)^2 - 100 = 0$;	f) $(x + \sqrt{3})^2 - 12 = 0$.

8. Rezolvați ecuațiile:

a) $(x + 2)^2 - 25 = 0$;	b) $x^2 + 6x + 9 = 1$;	c) $x^2 + 4x + 4 = -1$;
d) $x^2 + 4x + 4 = 0$;	e) $x^2 + 10x + 16 = 0$;	f) $x^2 + 10x + 25 = 0$;
g) $x^2 + (a + b)x + ab = 0$ ($a > 0, b > 0$);	h) $abx^2 + (a + b)x + 1 = 0$ ($a > 0, b > 0$).	

9. Determinați valoarea lui $a \in \mathbb{R}$, știind că ecuația $2x^2 + ax - 4 = 0$, $x \in \mathbb{R}$, are soluția -4 .

Rezolvați apoi ecuația pentru valoarea determinată a lui a .

10. Știind că 2 este soluție a ecuației $ax^2 - 3x + a - 4 = 0$, determinați valoarea lui $a \in \mathbb{R}$.

Pentru a determinat, rezolvați ecuația.

11. Ecuația $(a - 1)x^2 + 7x + a = 0$ are soluția $x = -3$. Determinați $a \in \mathbb{R}$ în această condiție și rezolvați apoi ecuația obținută.

12. Rezolvați în \mathbb{R} ecuațiile:

a) $x^2 + 9x + 20 = 0$;	b) $x^2 + 11x + 30 = 0$;	c) $x^2 + 14x + 48 = 0$;
d) $x^2 - 15x + 56 = 0$;	e) $x^2 - 12x + 27 = 0$;	f) $x^2 - 6x - 27 = 0$;
g) $x^2 - 8x - 33 = 0$;	h) $x^2 - 11x - 26 = 0$.	

13. Rezolvați ecuațiile:

a) $2x^2 - 3x - 2 = 0$;	b) $2x^2 + 7x - 4 = 0$;	c) $6x^2 - 7x + 2 = 0$;
d) $3x^2 - x - 2 = 0$;	e) $4x^2 + 5x - 6 = 0$;	f) $2x^2 - 5x - 12 = 0$;
g) $3x^2 + 4x - 4 = 0$;	h) $2x^2 - 9x + 4 = 0$;	i) $2x^2 + 3x - 5 = 0$;
j) $2x^2 + 7x + 3 = 0$;	k) $2x^2 - 7x + 3 = 0$;	l) $6x^2 + x - 2 = 0$.

14. Găsiți mulțimea soluțiilor raționale ale ecuațiilor:

a) $3x^2 + 7x = 5(x + 1)$;	b) $2x^2 + 10x = 6(x + 1)$;	c) $3x^2 + 13x = 8(x + 1)$;
d) $2x^2 - 5(x - 1) = 2$;	e) $3x^2 - 4(x + 1) = -3x$;	f) $(x + 2)^2 - 5x = 6$;
g) $(2x - 3)^2 = 6 - 5x$;	h) $(2x + 1)^2 + 3x = -2$.	

Capitolul II

Piramida regulată

PP Competențe specifice

- C1. Recunoașterea și descrierea unor proprietăți ale unor figuri geometrice plane în piramide sau pe desfășurările acestora
- C2. Folosirea instrumentelor geometrice adecvate pentru reprezentarea prin desen, în plan, a piramidelor
- C3. Alegerea reprezentărilor geometrice adecvate în vederea optimizării descrierii piramidelor și în vederea optimizării calculelor de lungimi de segmente și de măsuri de unghiuri dintr-o piramidă
- C4. Calcularea ariilor și volumului unei piramide
- C5. Clasificarea piramidelor după anumite criterii date sau alese
- C6. Transpunerea unor situații-problemă în limbaj geometric; rezolvarea problemei obținute și interpretarea rezultatului

PE-PP

Piramida regulată are baza poligon regulat, iar proiecția ortogonală a vârfului piramidei pe planul bazei este centrul cercului circumscris poligonului de bază.

Muchiile laterale ale unei piramide regulate sunt congruente.

Înălțimea unei fețe laterale se numește **apotema piramidei**.

Notații:

\mathcal{P}_b – perimetrul bazei;

a_b – apotema bazei;

r – raza cercului înscris bazei;

h – înălțimea piramidei.

a_p – apotema piramidei;

R – raza cercului circumscris bazei;

m – muchia laterală a piramidei;

Formule utile:

$$\mathcal{A}_l = \text{suma ariilor fețelor laterale}; \quad \mathcal{A}_l = \frac{\mathcal{P}_b \cdot a_p}{2} \quad \text{sau} \quad \mathcal{A}_l = \frac{n \cdot l \cdot a_p}{2},$$

unde n este numărul de laturi ale poligonului de la bază;

$$\mathcal{A}_l = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_b;$$

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \mathcal{A}_b \cdot h;$$

$$m^2 = h^2 + R^2;$$

$$a_p^2 = a_b^2 + h^2.$$

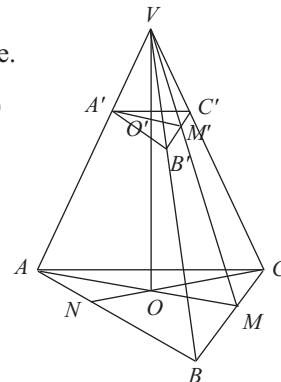
Observație:

Dacă se secționează o piramidă cu un plan paralel cu baza, se obține o piramidă asemenea cu piramida inițială.

$(A'B'C') \parallel (ABC) \Rightarrow VA'B'C' \sim VABC$

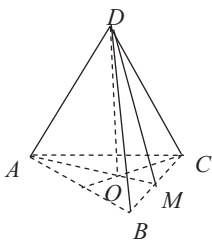
Notăm cu k raportul de asemănare a două segmente omoloage.

1. $\frac{A'B'}{AB} = \frac{VO'}{VO} = \frac{VM'}{VM} = \frac{O'M'}{OM} = \frac{A'O'}{AO} = \frac{VA'}{VA} = k$. (Justificați!)
2. $\frac{\mathcal{A}_b}{\mathcal{A}_B} = k^2$; $\frac{\mathcal{V}_{VA'B'C'}}{\mathcal{V}_{VABC}} = k^3$.
3. $\frac{\mathcal{V}_{VA'B'C'}}{\mathcal{V}_{VABC}} = k^3$.



PE Probleme rezolvate

1. Fie $ABCD$ un tetraedru regulat de muchie a . Aflați volumul tetraedrului.

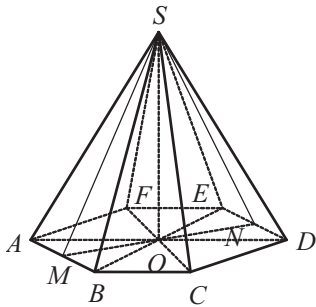


Rezolvare: AM este înălțime în triunghiul echilateral ABC , deci $AM = a\sqrt{3}/2$, iar $AO = \frac{2}{3}AM$, deci $AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ și $OM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul AOD sau DOM , obținem $DO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. DM este apotema tetraedrului, $DM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ fiind înălțime a triunghiului echilateral. Știm că aria triunghiului echilateral poate fi

calculată și cu formula $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$. Deci $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, iar $\mathcal{V} = \frac{\mathcal{A}_b \cdot h}{3} = \frac{\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

2. O piramidă hexagonală regulată $SABCDEF$ are muchia bazei $AB = a$ și muchia laterală $AS = 2a$. Determinați:

- a) volumul și aria totală a piramidei;
- b) o funcție trigonometrică a unghiului plan corespunzător unghiului diedru dintre planele (SAB) și (SDE) .



Rezolvare: a) În $\triangle SOA$ dreptunghic, cu $m(\sphericalangle O) = 90^\circ$ avem:
 $SO^2 = SA^2 - AO^2 \Rightarrow SO^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2 \Rightarrow SO = a\sqrt{3}$; $\mathcal{A}_{ABCDEF} = 6 \cdot \mathcal{A}_{AOB} = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \mathcal{V} = \frac{1}{3} \mathcal{A}_b \cdot h \Rightarrow \mathcal{V} = \frac{3a^2}{2}$; $OM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Din $\triangle SAM$ sau $\triangle SOM$ obținem: $SM = \frac{a\sqrt{15}}{2} \Rightarrow \mathcal{A}_l = 6 \cdot \mathcal{A}_{SAM} \Rightarrow \mathcal{A}_l = \frac{3a^2\sqrt{15}}{2}$.

b) Cele două plane au punctul S comun, deci au o dreaptă de puncte comune: cum $(SAB) \supset AB \parallel DE \subset (SDE) \Rightarrow$ cele două plane au o dreaptă comună ce trece prin S și este paralelă cu AB și DE , deci unghiul plan corespunzător unghiului diedru este MSN . În triunghiul SMN , isoscel, ducem o înălțime de la bază pe care o aflăm folosind proprietatea că produsul dintre o latură și înălțimea corespunzătoare într-un triunghi este constant sau folosind relațiile metrice cunoscute și o găsim egală cu $\frac{2a\sqrt{15}}{5}$. Calculăm în continuare

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. În tabelul următor am notat cu l , h , a_p , m , R , a_b , \mathcal{A}_l , \mathcal{A}_t , \mathcal{V} latura bazei, înălțimea piramidei, apotema piramidei, muchia laterală a piramidei, raza cercului circumscris bazei, apotema bazei, aria laterală, aria totală și, respectiv, volumul unei piramide triunghiulare regulate. Completați tabelul, știind că dimensiunile sunt măsurate în centimetri.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
l	24		$12\sqrt{3}$		18	
h	12	6		$6\sqrt{3}$		
a_p		10				
m						12
R				12		
a_b						$2\sqrt{3}$
\mathcal{A}_l			$216\sqrt{3}$			
\mathcal{A}_t						
\mathcal{V}					243	

2. În tabelul următor am notat cu l , h , a_p , m , R , a_b , \mathcal{A}_l , \mathcal{A}_t , \mathcal{V} latura bazei, înălțimea piramidei, apotema piramidei, muchia laterală a piramidei, raza cercului circumscris bazei, apotema bazei, aria laterală, aria totală și, respectiv, volumul unei piramide patrulatere regulate. Completați tabelul, știind că dimensiunile sunt măsurate în centimetri.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
l	24					
h	9	12		12		
a_p		15				
m						18
R						$9\sqrt{2}$
a_b			9			
\mathcal{A}_l			540		960	
\mathcal{A}_t					1536	
\mathcal{V}				1296		

3. O piramidă hexagonală regulată are înălțimea egală cu 9 cm și latura bazei de 18 cm. Aflați aria laterală și volumul piramidei.

4. O piramidă hexagonală regulată are înălțimea egală cu 6 cm și apotema de 12 cm. Aflați aria totală și volumul piramidei.

Cuprins

ALGEBRĂ

Capitolul I. Funcții.....	5
1. Noțiunea de funcție. Funcții definite pe mulțimi finite	6
2. Funcția liniară	10
Recapitulare și sistematizare prin teste	18
<i>Test de autoevaluare</i>	23
Capitolul II. Ecuații de gradul I.....	25
Recapitulare și sistematizare prin teste	30
<i>Test de autoevaluare</i>	33
Capitolul III. Sisteme de ecuații.....	35
1. Ecuații de gradul I cu două necunoscute	35
2. Sisteme de două ecuații de gradul I cu două necunoscute.....	36
3. Tipuri deosebite de sisteme	41
Capitolul IV. Probleme rezolvate cu ajutorul ecuațiilor și al sistemelor de ecuații	43
Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană.....	46
Recapitulare și sistematizare prin teste	47
<i>Test de autoevaluare</i>	49
Capitolul V. Rezolvarea ecuației de gradul al doilea	51
Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană.....	56
<i>Test de autoevaluare</i>	57
Capitolul VI. Inecuații de gradul I cu o necunoscută	59
Recapitulare și sistematizare prin teste	63
<i>Test de autoevaluare</i>	65
Capitolul VII. Teme pentru recapitularea finală	67
1. Numere naturale. Puteri cu exponent număr natural. Divizibilitate	67
2. Rapoarte. Proporții. Proportionalitate	69
3. Procente.....	70
4. Numere reale	71
5. Calcul algebric	72
6. Probleme de aritmetică ce se pot rezolva cu ajutorul ecuațiilor și al sistemelor de ecuații.....	73
7. Ecuații de gradul I cu o necunoscută.....	74
8. Funcții	75
9. Inecuații.....	77
Recapitulare și sistematizare prin teste	78
<i>Test de autoevaluare 1</i>	81
<i>Test de autoevaluare 2</i>	83

GEOMETRIE

Capitolul I. Prisma dreaptă.....	85
1. Prisma patrulateră regulată dreaptă. Paralelipipedul dreptunghic	85
2. Cubul	90
3. Prisma triunghiulară regulată	92
Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană.....	95
Recapitulare și sistematizare prin teste	97
<i>Test de autoevaluare</i>	99
Capitolul II. Piramida regulată	101
Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană.....	107
Recapitulare și sistematizare prin teste	108
<i>Test de autoevaluare</i>	111
Capitolul III. Trunchiul de piramidă regulată	113
Recapitulare și sistematizare prin teste	117
<i>Test de autoevaluare</i>	119
Capitolul IV. Corpuri rotunde.....	121
1. Cilindrul circular drept.....	121
2. Conul circular drept.....	123
<i>Test de autoevaluare</i>	127
3. Trunchiul de con circular drept	129
<i>Test de autoevaluare</i>	133
Recapitulare și sistematizare prin teste	135
4. Sfera	136
Modele de teze semestriale	137
TEZE DE TIP A	137
TEZE DE TIP B	142
Recapitulare și evaluare finală.....	147
Exerciții și probleme recapitulative pentru evaluarea finală	147
ALGEBRĂ	147
GEOMETRIE	150
Modele de teste pentru evaluarea finală	153
Modele de teste pentru Evaluarea Națională.....	158
INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI.....	183