

EDITURA PARALELA 45

Redactare: Ramona Rossall  
Tehnoredactare: Mioara Benza  
Pregătire de tipar: Marius Badea  
Design copertă: Mirona Pintilie

**Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României**  
**VLAICU, LIVIU**

**505 probleme rezolvate din testele-grilă de matematică  
pentru admiterea la Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca /**  
Liviu Vlaicu. - Pitești : Paralela 45, 2019  
ISBN 978-973-47-3020-9

51

Copyright © Editura Paralela 45, 2019  
Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate,  
iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.

**LIVIU VLAICU**

**505 PROBLEME REZOLVATE**  
**DIN TESTELE-GRILĂ DE MATEMATICĂ PENTRU**  
**ADMITEREA LA UNIVERSITATEA TEHNICĂ**  
**DIN CLUJ-NAPOCA**

**Editura Paralela 45**

## Cuvânt-înainte

Examenul de tip grilă, tot mai des folosit în ultimii ani pentru selecția dintr-un mare număr de candidați la admiterea în universități, s-a perfecționat an de an, ajungând un mod foarte eficient și obiectiv de ierarhizare după nivelul cunoștințelor și capacitatea de a le folosi în probleme mai dificile.

**Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca** este printre primele universități din țară care au adoptat acest mod de selecție a candidaților la admitere, având o tradiție de peste 20 de ani. În fiecare an au apărut culegeri cu enunțurile subiectelor propuse, în număr de peste 1000, cu foarte puține indicații de rezolvare.

Cartea de față, elaborată de domnul profesor Liviu Vlaicu, profesor cu o îndelungată activitate de pregătire a elevilor pentru concursurile de orice nivel, va fi extrem de utilă candidaților, care vor găsi soluțiile la numeroase probleme propuse de noi (Departamentul de Matematică al UTCN) în ultimii 20 de ani, dintre care multe au un grad ridicat de dificultate.

Problemele sunt gradate pe ani de studii, astfel că ele pot fi urmărite de elevii interesați încă din clasa a IX-a.

În ultimii 10 ani, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca a avut parteneriate cu peste 30 de licee de elită, la care s-a experimentat în fiecare an o simulare a examenului de admitere cu probleme pe trei niveluri: clasele IX – X, XI și XII, o parte dintre ele fiind de asemenea rezolvate în această carte.

Considerăm culegerea foarte utilă pentru pregătirea examenului de admitere.

Vă urăm succes!

*Conf. univ. dr. Vasile Pop*

# Algebră

## Clasa a IX-a

1. Se consideră mulțimea tripletelor de numere reale  $(a, b, c)$  care verifică relația  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . Atunci  $\min(ab + bc + ca)$  pentru această mulțime este ...  
(T.G. 2006, ex. 46, p. 8)
2. Fie  $m, n, p$  numere naturale nenule,  $m \neq n$ . Dacă într-o progresie aritmetică avem  $a_n = m$  și  $a_m = n$ , atunci  $a_p$  este egal cu ...  
(T.G. 2018, ex. 222, p. 21)
3. O progresie aritmetică crescătoare  $(a_n)_{n \geq 1}$  verifică relațiile  $a_9 + a_{10} + a_{11} = 15$  și  $a_9 \cdot a_{10} \cdot a_{11} = 120$ . Suma primilor 20 de termeni din progresie este ...  
(T.G. 2018, ex. 134, p. 13)
4. Mulțimea soluțiilor reale ale inecuației  $\sqrt{x+2} - \sqrt{x+3} < \sqrt{2} - \sqrt{3}$  este ...  
(T.G. 2018, ex. 90, p. 10)
5. Suma  $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  este egală cu ...  
(T.G. 2018, ex. 128, p. 13)
6. Pentru ce valori ale parametrului real  $b$  ecuația:  
$$x^3 + a(a+1)x^2 + ax - a(a+b) - 1 = 0$$
 admite o rădăcină independentă de  $a$ ?  
(T.G. 2018, ex. 136, p. 14)
7. Mulțimea soluțiilor reale ale ecuației  $\sqrt{x+2-4\sqrt{x-2}} + \sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}} = 1$  este ...  
(T.G. 2018, ex. 89, p. 10)
8. Pentru ca funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow B, f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x + 1}$  să fie surjectivă, trebuie ca  $B$  să fie egal cu ...  
(T.G. 2018, ex. 101, p. 11)
9. Mulțimea valorilor lui  $a \in \mathbb{R}$  pentru care ecuația  $x^4 + 4x^3 + ax^2 + 4x + 1 = 0$  are toate rădăcinile reale este ...  
(T.G. 2018, ex. 217, p. 21)
10. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funcția definită prin  $f(x) = \frac{[x]}{1 + \{x\}}$ , unde  $[x]$  este partea întreagă a numărului real  $x$ , iar  $\{x\}$  este partea fracționară a numărului real  $x$ .  $f(\mathbb{R})$  este ...  
(Admitere U.T.C.N. iulie 2014)

11. Mulțimea valorilor parametrului real  $m$ , pentru care ecuația:

$$x(x-1)(x-2)(x-3) = m$$

are toate rădăcinile reale, este ...

(T.G. 2018, ex. 155, p. 15)

12. Ecuația  $x^4 + (2m-1)x^2 + 2m + 2 = 0$ , cu necunoscuta  $x$  și parametrul real  $m$ , are toate rădăcinile reale dacă  $m$  este egal cu ...

(T.G. 2018, ex. 155, p. 15)

13. Sistemul de ecuații 
$$\begin{cases} 2x+2y+mxy=5 \\ (m-1)(x+y)+xy=1, \\ 3x+3y-xy=m+1 \end{cases} m \in \mathbb{R}$$
 este compatibil pentru  $m$

aparținând mulțimii ...

(T.G. 2018, ex. 56, p. 6)

14. Se consideră ecuația  $2x^2 - 2mx + m^2 - 2m = 0$ , unde  $m \in \mathbb{R}$ , iar  $x_1$  și  $x_2$  sunt rădăcinile reale ale ecuației.

a) Suma rădăcinilor,  $x_1 + x_2$ , aparține intervalului ...

b) Suma pătratelor rădăcinilor,  $x_1^2 + x_2^2$ , aparține intervalului ...

c) Produsul rădăcinilor,  $x_1x_2$ , aparține intervalului ...

15. Fie funcția  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definită prin  $g(x) = \begin{cases} x+2, & \text{dacă } x \leq 0 \\ 3x+2, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$

a) Funcția  $g^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  este dată de ...

(T.G. 2013, ex. 24, p. 4)

b) Soluția inecuației  $g(x) + g^{-1}(x) < 0$  este ...

(T.G. 2013, ex. 25, p. 4)

16. Se dau funcțiile  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definite prin:

$$f(x) = \begin{cases} 5x+1, & x < 0 \\ 1-x^2, & x \geq 0 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq -2 \\ 2x-1, & x > -2 \end{cases}$$

Funcția  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h = f \circ g$  este definită prin ...

(T.G. 2013, ex. 26, p. 5)

17. Fie două progresii, una aritmetică și una geometrică, fiecare cu câte 4 termeni astfel încât adunând fiecare termen de același rang din cele două progresii să se obțină ca sumă 18, 18, 26, respectiv 58. Rația progresiei geometrice este ...

(T.G. 2010, ex. 367, p. 51)

18. Mulțimea soluțiilor reale ale inecuației  $\frac{2\sqrt{x+1}}{1-2\sqrt{3-x}} < 1$  este ...

(T.G. 2008, ex. 167, p. 26)

- 19.** Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - (m-1)x + 3m - 4, m \in \mathbb{R}$ .
- a) Mulțimea valorilor lui  $m$  pentru care  $f$  se anulează în  $(0, 1)$  și  $f(x) \geq 0, \forall x \in (0, 1)$  este ...  
(T.G. 2006, ex. 123, p. 21)
- b) Mulțimea valorilor lui  $m$  pentru care  $f(x) < 0, \forall x \in (0, 1)$  este ...  
(T.G. 2006, ex. 124, p. 21)
- 20.** Se dă fracția  $F(x, m) = \frac{(m-2)x^2 + 2(2m-3)x + m-2}{x^2 + 2x + m}$ . Valorile reale ale parametrului  $m$ , pentru care fracția  $F$  verifică inegalitatea  $F > 0$ , pentru orice  $x > 0$ , sunt ...  
(T.G. 2006, ex. 68, p. 11)
- 21.** Se consideră ecuația  $ax^2 + bx + c = 0$ , unde  $a, b, c$  sunt numere întregi impare. Care dintre următoarele afirmații este adevărată?  
A. Ecuația are o rădăcină pară.      B. Ecuația are o rădăcină impară.  
C. Ecuația are două rădăcini pare.      D. Ecuația nu are rădăcini întregi.  
E. Ecuația are două rădăcini impare.  
(T.G. 2018, ex. 215, p. 21)
- 22.** Sistemul  $\begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ x + y + z = a \end{cases}$  are o singură soluție  $(x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , dacă  $a$  este egal cu ...  
(T.G. 2018, ex. 99, p. 11)
- 23.** Câte soluții are ecuația  $x^2 = 3y^2 + 1$  în  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ?  
(T.G. 2005, ex. 334, p. 70)

# Geometrie analitică

**395.** Fie punctele  $A(1, 1)$ ,  $B(2, -3)$ ,  $C(6, 0)$ . Coordonatele punctului  $D$ , pentru care  $ABCD$  este paralelogram, sunt ...

(T.G. 2018, ex. 527, p. 48)

**396.** Fie triunghiul  $ABC$ , unde  $B(-4, -5)$ . Ecuația înălțimii duse din  $A$  este  $5x + 3y - 4 = 0$ .

Ecuația dreptei  $BC$  este ...

(T.G. 2010, ex. 735, p. 102)

**397.** Triunghiul  $ABC$  are latura  $[AB]$  pe dreapta  $4x + y - 8 = 0$ , latura  $[AC]$  pe dreapta  $4x + 5y - 24 = 0$ , iar vârfurile  $B$  și  $C$  pe axa  $Ox$ . Ecuația medianei corespunzătoare vârfului  $A$  este ...

(T.G. 2010, ex. 733, p. 102)

**398.** Dreapta care trece prin  $C(1, 2)$ , neparalelă cu  $AB$  și față de care punctele  $A(-1, 1)$  și  $B(5, -3)$  sunt egal depărtate, are ecuația ...

(T.G. 2018, ex. 526, p. 48)

**399.** Fie  $A(0, -1)$ ,  $d_1: x - y + 1 = 0$  și  $d_2: 2x - y = 0$ . Coordonatele punctelor  $B \in d_1$  și  $C \in d_2$ , pentru care dreptele  $d_1$  și  $d_2$  sunt mediane în triunghiul  $ABC$ , sunt ...

(T.G. 2010, ex. 739, p. 103)

**400.** În planul  $xOy$  se consideră punctele  $S(0, 12)$  și  $T(16, 0)$ , iar  $Q(x, y)$  un punct variabil situat pe segmentul  $[ST]$ . Punctele  $P$  și  $R$  aparțin axelor de coordonate astfel încât patrulaterul  $OPQR$  să fie dreptunghi.

a) Ecuația dreptei  $ST$  este ...

b) Aria dreptunghiului  $OPQR$  este ...

c) Valoarea maximă a ariei dreptunghiului  $OPQR$  este ...

(T.G. 2018, ex. 534, 535, 536, p. 49)

**401.** În sistemul cartezian de coordonate  $xOy$ , o dreaptă variabilă  $d$  care conține punctul  $A(0, 5)$  intersectează dreptele  $x - 2 = 0$  și  $x - 3 = 0$  în punctele  $B$ , respectiv  $C$ .

a) Determinați panta dreptei  $d$  astfel încât  $BC$  să aibă lungime maximă.

(T.G. 2008, ex. 826, p. 116)

b) Determinați panta dreptei  $d$  astfel încât triunghiul  $OBC$  să fie isoscel.

(T.G. 2008, ex. 827, p. 116)

**402.** Se consideră expresia  $E(x, y) = x^2 + y^2 - 6x - 10y$ .

a) Distanța de la punctul  $(x, y)$  la punctul  $(3, 5)$  este ...

b) Valoarea minimă a lui  $E(x, y)$  pentru  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  este ...

c) Se consideră mulțimea  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 2y \leq 0\}$ . Valoarea minimă a lui  $E(x, y)$  pentru  $(x, y) \in D$  este ...

(T.G. 2018, ex. 544, 545, 546, p. 50)

- 403.** Raza cercului care trece prin punctele  $A(-4, 0)$ ,  $B(4, 4)$ ,  $O(0, 0)$  este ...  
(T.G. 2018, ex. 528, p. 48)
- 404.** Ecuațiile dreptelor care trec prin punctul de intersecție a dreptelor de ecuații  $11x + 3y - 7 = 0$  și  $12x + y - 19 = 0$  și care se află la egală distanță de punctele  $A(3, -2)$  și  $B(-1, 6)$  sunt ...  
(T.G. 2018, ex. 530, p. 48)
- 405.** Fie dreapta  $D: x + y = 0$  și punctele  $A(4, 0)$ ,  $B(0, 3)$ . Valoarea minimă a sumei  $MA^2 + MB^2$  pentru  $M \in D$  este ...  
(T.G. 2018, ex. 543, p. 49)
- 406.** Se consideră în plan punctele  $A(0, 0)$ ,  $B(2, 0)$  și dreapta de ecuație  $d: x - 2y + 10 = 0$ . Valoarea minimă a sumei  $S(M) = MA + MB$ , când punctul  $M$  parcurge dreapta  $d$ , este ...  
(T.G. 2018, ex. 525, p. 48)
- 407.** Fie dreapta  $d: x + y = 0$  și punctele  $A(4, 0)$ ,  $B(0, 3)$ . Valoarea minimă a sumei  $MA + MB$  pentru  $M \in d$  este ...  
(T.G. 2010, ex. 757, p. 105)
- 408.** Fie  $A(0, -1)$ ,  $d_1: x - y + 1 = 0$  și  $d_2: 2x - y = 0$ . Coordonatele punctelor  $B \in d_1$  și  $C \in d_2$ , pentru care dreptele  $d_1$  și  $d_2$  sunt mediane în triunghiul  $ABC$ , sunt ...  
(T.G. 2018, ex. 522, p. 48)
- 409.** Laturile  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  ale triunghiului  $ABC$  au respectiv ecuațiile:  
 $x + 21y - 22 = 0$ ,  $5x - 12y + 7 = 0$ ,  $4x - 33y + 146 = 0$ .  
Distanța de la centrul de greutate al triunghiului  $ABC$  la latura  $BC$  este ...  
(T.G. 2018, ex. 529, p. 48)
- 410.** Fie dreptele  $(AB): x + 2y - 1 = 0$ ,  $(BC): 2x - y + 1 = 0$ ,  $(AC): 2x + y - 1 = 0$ , care determină triunghiul  $ABC$ . Bisectoarea unghiului  $B$  are ecuația ...  
(T.G. 2018, ex. 523, p. 48)
- 411.** Se consideră triunghiul  $ABC$ ,  $A(1, 0)$ ,  $B(1, 1)$ ,  $C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  și punctul  $D\left(\frac{3}{4}, \lambda\right)$ .  
Punctul  $D$  se află în interiorul triunghiului  $ABC$  dacă și numai dacă:  
A.  $\lambda \in (-\infty, 0]$ ;                      B.  $\lambda \in \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ ;                      C.  $\lambda \in (1, \infty)$ ;  
D.  $\lambda \in (1, 2)$ ;                              E. alt răspuns.  
(T.G. 2010, ex. 730, p. 102)
- 412.** Punctul  $A(-4, 1)$  este un vârf al pătratului  $ABCD$  parcurs în sens trigonometric, căruia îi cunoaștem o diagonală de ecuație  $3x - y - 2 = 0$ .  
a) Aria pătratului  $ABCD$  este ...  
b) Punctul  $C$  are coordonatele ...  
(T.G. 2018, ex. 537, 538, p. 49)

- 413.** Fie în planul  $xOy$  punctele  $A(4, 0)$ ,  $B(5, 1)$ ,  $C(1, 5)$ ,  $D(0, 4)$ .
- a) Patrulaterul  $ABCD$  este:  
 A. patrulater oarecare;      B. trapez isoscel;      C. romb;  
 D. dreptunghi;      E. trapez dreptunghic.
- b) Aria patrulaterului este:  
 A. 4;      B. 8;      C. 1;      D. 16;      E. 2.
- c) Simetricul punctului  $A$  față de dreapta  $BC$  este punctul de coordonate:  
 A.  $(1, 5)$ ;      B.  $(5, 1)$ ;      C.  $(5, 2)$ ;      D.  $(6, 2)$ ;      E.  $(6, 4)$ .  
 (T.G. 2018, ex. 539, 540, 541, p. 49)
- 414.** Ecuațiile dreptelor care sunt la distanță 2 față de punctul  $A(2, 1)$  și care trec prin originea  $O(0, 0)$  sunt ...  
 (Simulare U.T.C.N. 12 mai 2018)
- 415.** Distanța de la pătratul  $|x| + |y| = 1$  la cercul  $(x - 1)^2 + (y - 2,5)^2 = 1$  este ...  
 (T.G. 2006, ex. 779, p. 110)
- 416.** Se consideră cercul  $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 10 = 0$ . Punctul  $A(1, 2)$  este mijlocul unei coarde a cercului. Lungimea acestei coarde este ...  
 (T.G. 2008, ex. 790, p. 112)
- 417.** Se consideră cercul  $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 17 = 0$ . Ecuația diametrului perpendicular pe dreapta  $5x + 2y - 13 = 0$  este ...  
 (T.G. 2008, ex. 791, p. 112)
- 418.** Fie cercul  $\mathcal{C}: x^2 + y^2 = 1$  și punctele  $A(4, 0)$ ,  $B(0, 3)$ . Valoarea minimă a sumei  $MA^2 + MB^2$  pentru  $M \in \mathcal{C}$  este ...  
 (T.G. 2010, ex. 758, p. 105)
- 419.** Ecuația cercului cu centrul  $C(-1, 1)$  și care taie pe dreapta de ecuație  $x - 2y + 1 = 0$  un segment de lungime 2 este ...  
 (T.G. 2006, ex. 797, p. 113)
- 420.** Fie  $A(a, 0)$  un punct în planul cercului de ecuație  $x^2 + y^2 = r^2$ . O secantă mobilă dusă prin  $A$  taie cercul în  $M$  și  $N$ . Mijlocul segmentului  $MN$  se află pe curba de ecuație ...  
 (T.G. 2008, ex. 822, p. 116)
- 421.** Se consideră cercurile  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x^2 + y^2 - 2\lambda x = 0$ ,  $\lambda > 1$ .
- a) Distanța cea mai mare dintre punctele celor două cercuri este ...  
 (T.G. 2006, ex. 801, p. 114)
- b) O tangentă comună la cele două cercuri este dreapta ...  
 (T.G. 2006, ex. 802, p. 114)
- 422.** Valoarea maximă a funcției  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2xy - 2x - 2y + 1$ , când  $x^2 + y^2 \leq 2x$  este ...  
 (T.G. 2004, ex. 885, p. 137)

## CUPRINS

<i>Cuvânt-înainte</i> .....	5	
	Enunțuri	Soluții
<b>ALGEBRĂ</b>		
Clasa a IX-a .....	7	67
Clasa a X-a .....	10	72
Clasa a XI-a .....	14	79
Clasa a XII-a .....	18	86
<b>ANALIZĂ MATEMATICĂ</b>		
Clasa a XI-a .....	26	99
Șiruri .....	26	99
După șiruri .....	32	113
Clasa a XII-a .....	43	135
<b>GEOMETRIE ANALITICĂ</b> .....	55	163
<b>TRIGONOMETRIE</b> .....	61	175