

EDITURA PARALELA 45

Colecția **S**UBIECTE **P**OSIBILE

*Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.N. nr. 3022/08.01.2018.  
Lucrarea este elaborată conform programei școlare în vigoare pentru bacalaureat.*

Redactare: Amalia Mărășescu, Olimpia Filip  
Corectură: autorii  
Tehnoredactare: Mioara Benza  
Pregătire de tipar: Marius Badea  
Design copertă: Mirona Pintilie

**Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României**  
**Bacalaureat 2020 : matematică - M\_mate-info : teme recapitulative - 60 de teste, după modelul M.E.N - breviar teoretic / Adrian Zanoschi, Gheorghe Iurea, Gabriel Popa, .... - Pitești : Paralela 45, 2019**  
Conține bibliografie  
ISBN 978-973-47-3059-9

I. Zanoschi, Adrian  
II. Iurea, Gheorghe  
III. Popa, Gabriel  
51

**COMENZI – CARTEA PRIN POȘTĂ**

EDITURA PARALELA 45  
Bulevardul Republicii, Nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești,  
jud. Argeș, cod 110177  
Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918  
Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492  
E-mail: [comenzi@edituraparelela45.ro](mailto:comenzi@edituraparelela45.ro)  
sau accesați [www.edituraparelela45.ro](http://www.edituraparelela45.ro)

Tiparul executat la tipografia *Editurii Paralela 45*  
E-mail: [tipografie@edituraparelela45.ro](mailto:tipografie@edituraparelela45.ro)

Copyright © Editura Paralela 45, 2019  
Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate,  
iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.  
[www.edituraparelela45.ro](http://www.edituraparelela45.ro)

Adrian Zanoschi  
Gabriel Popa

Gheorghe Iurea  
Petru Răducanu

Ioan Șerdean

Bacalaureat 2020

Matematică

*M\_mate-info*

Teme recapitulative  
60 de teste, după modelul M.E.N.  
Breviar teoretic

Editura Paralela 45

## Cuvânt-înainte

Examenul de bacalaureat reprezintă pentru fiecare tânăr o placă turnantă în devenirea lui intelectuală și personală, având menirea de a certifica pregătirea științifică și competențele dobândite în liceu, dar și de a deschide un orizont profesional sau academic adecvat fiecăruia. În consecință, performanța la acest examen, și îndeosebi la disciplina matematică, presupune un efort de pregătire constant, atât pentru parcurgerea conținuturilor, cât și pentru fixare, sistematizare, recapitulare. Lucrarea de față își propune să fie un ghid eficient, cu o strategie completă, care să răspundă tuturor exigențelor disciplinei și probelor de examen.

Prima parte a lucrării conține probleme grupate pe teme, urmărind acoperirea completă a programei. Acolo unde o anumită temă nu era destul de bine reprezentată, în variantele examenelor din anii precedenți, au fost adăugate probleme clasice, pentru o mai bună aprofundare a subiectului. Astfel, un elev își poate alege singur un capitol pe care vrea să îl repete și găsește în carte un număr suficient de exerciții cu ajutorul cărora să-și atingă scopul. Problemele sunt însoțite de soluții detaliate și de comentarii metodice, unele dintre ele având chiar mai multe rezolvări.

Partea a doua cuprinde 60 de teste, însoțite de răspunsuri și de rezolvări, iar la sfârșit există un breviar teoretic, care conține principalele noțiuni prevăzute în programă.

Cartea se adresează celor care se pregătesc pentru bacalaureatul la matematică, indiferent de profilul liceului pe care îl urmează. Din acest motiv, problemele sunt structurate pe două niveluri, cele mai dificile fiind evidențiate printr-o steluță. Elevii care nu urmează profilul matematică-informatică pot parcurge doar problemele fără steluță.

Lucrarea poate fi folosită și pentru învățarea curentă, deoarece permite elevilor să se antreneze în condiții reale, de bacalaureat. Ea se poate dovedi un instrument util profesorilor și elevilor în vederea recapitulării materiei la finalul unui capitol sau la sfârșitul anului școlar.

*Autorii*

# Clasa a XII-a

## 4.1. Legi de compoziție

1. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x \circ y = 2^{x+y}$ , oricare ar fi  $x, y \in \mathbb{R}$ .
  - a) Calculați  $2017 \circ (-2017)$ .
  - b) Rezolvați ecuația  $x \circ x^2 = 64$ .
  - c) Demonstrați că, dacă  $(x \circ y) \circ z = 2^{z+1}$ , atunci  $x = -y$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție „ $\circ$ ”, definită prin  $x \circ y = x + y + 11$ , oricare ar fi  $x, y \in \mathbb{R}$ .
  - a) Arătați că  $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ , oricare ar fi  $x, y, z \in \mathbb{R}$ .
  - b) Găsiți două elemente  $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$  pentru care  $a \circ b \in \mathbb{Z}$ .
  - c) Determinați cel mai mare număr natural  $n$ , pentru care  $1 \circ 2 \circ \dots \circ n < 2017$ .
3. Pe mulțimea numerelor reale definim operația  $x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$ , oricare ar fi  $x, y \in \mathbb{R}$ .
  - a) Arătați că  $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ , oricare ar fi  $x, y, z \in \mathbb{R}$ .
  - b) Calculați  $(-1000) \circ (-999) \circ \dots \circ 1000$ .
  - c) Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația  $x \circ x \circ x \circ x = 12$ .
4. Pe mulțimea numerelor complexe, se consideră legea de compoziție „ $\circ$ ” definită prin  $x \circ y = xy + ix + iy - 1 - i$ , oricare ar fi  $x, y \in \mathbb{C}$ .
  - a) Demonstrați că  $x \circ y = (x + i)(y + i) - i$ , oricare ar fi  $x, y \in \mathbb{C}$ .
  - b) Demonstrați că, pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$  și  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ , are loc egalitatea  $x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_n = (x_1 + i)(x_2 + i) \dots (x_n + i) - i$ .
  - c) Rezolvați în  $\mathbb{C}$  ecuația  $x \circ x \circ x \circ x = 1 - i$ .

5. Pe mulțimea  $\mathbb{R}$  se definește legea de compoziție  $x \circ y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ , oricare ar fi  $x, y \in \mathbb{R}$ . Mai considerăm  $x_0 \in \mathbb{Q}^*$  și  $x_n = x_0 \circ x_{n-1}$ , oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- Demonstrați că  $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ , oricare ar fi  $x, y, z \in \mathbb{R}$ .
  - Determinați elementul neutru al operației „ $\circ$ ”.
  - Arătați că  $x_3$  este număr irațional.
6. Pe mulțimea  $\mathbb{R}$  se definește legea de compoziție  $x * y = 2xy - 6x - 6y + 21$ , oricare ar fi  $x, y \in \mathbb{R}$ .
- Arătați că legea „ $*$ ” este asociativă și comutativă.
  - Determinați elementul neutru ale legii „ $*$ ”.
  - Demonstrați că, pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , are loc identitatea:  

$$\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } n \text{ ori } x} = 2^{n-1}(x-3)^n + 3, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}^*.$$
7. Pe mulțimea  $\mathbb{R}$  definim operația  $x * y = ax + by$ , oricare ar fi  $x, y \in \mathbb{R}$ . Determinați numerele reale  $a$  și  $b$ , știind că operația introdusă este asociativă și comutativă.
8. Studiați asociativitatea, comutativitatea și existența elementului neutru pentru fiecare dintre următoarele legi de compoziție:
- $x \top y = \frac{x+y}{2}$ , oricare ar fi  $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ ;
  - $x \perp y = \sqrt{xy}$ , oricare ar fi  $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ ;
  - $A * B = AB + BA$ , oricare ar fi  $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
9. Se consideră mulțimea  $G = (-\infty, 0)$  și operația  $x * y = \frac{xy}{x+y}$ , oricare ar fi  $x, y \in G$ .
- Demonstrați că  $G$  este parte stabilă în raport cu operația dată.
  - Arătați că operația considerată este comutativă și asociativă.
  - Stabiliți dacă operația „ $*$ ” admite sau nu element neutru.
10. Pe mulțimea  $G = (0, +\infty) \setminus \{1\}$  considerăm operația  $x \circ y = x^{3 \ln y}$ , oricare ar fi  $x, y \in G$ .
- Demonstrați că  $x \circ y \in G$ , oricare ar fi  $x, y \in G$ .
  - Arătați că  $x \circ y = y \circ x$ , oricare ar fi  $x, y \in G$ .
  - Rezolvați în  $G$  ecuația  $x \circ x = e^3$ .
11. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție  $x * y = 2xy - 6x - 6y + 21$ , oricare ar fi  $x, y \in \mathbb{R}$ .

# Teste pentru Bacalaureat, după modelul M.E.N.

## Testul 1

### Subiectul I

1. Calculați modulul numărului complex  $z = (3 - 4i)(12 + 5i)$ .
2. Fie  $x_1$  și  $x_2$  rădăcinile complexe ale ecuației  $x^2 - mx + 3 = 0$ , unde  $m$  este un număr real. Determinați numărul  $m$ , știind că  $3(x_1 + x_2) = 3 + 4x_1x_2$ .
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_2(x^2 - 5x + 14) = 3$ .
4. Determinați câte numere naturale de trei cifre au exact două cifre egale.
5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră dreapta  $d$  de ecuație  $3x - 4y + 15 = 0$  și punctul  $A(1, 2)$ . Calculați distanța de la punctul  $A$  la dreapta  $d$ .
6. Arătați că  $\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x} = 2 \sin \frac{x}{2}$ , pentru orice număr real  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

### Subiectul al II-lea

1. Se consideră matricea  $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^x & 0 \\ 0 & 2^x - 1 & 1 \end{pmatrix}$ , unde  $x$  este un număr real.
  - a) Arătați că  $\det(A(x)) = 2^x$ , pentru orice număr real  $x$ .
  - b) Demonstrați că  $A(x) \cdot A(y) = A(x + y)$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .
  - c) Determinați numerele reale  $x$ , astfel încât  $A(2x^2 + 1) = A(x) \cdot A(x) \cdot A(x)$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x \circ y = xy - 2x - 2y + 6$ .
  - a) Arătați că  $x \circ y = (x - 2)(y - 2) + 2$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .
  - b) Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $x \circ (2x) = 14$ .
  - c) Calculați  $1 \circ 2 \circ 3 \circ \dots \circ 99 \circ 100$ .

### Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ .
  - a) Calculați  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{e^x}$ .

- b) Arătați că graficul funcției  $f$  intersectează axa  $Ox$  în trei puncte.  
c) Demonstrați că punctele de extrem local ale graficului funcției  $f$  și punctul său de inflexiune sunt coliniare.
2. Se consideră funcția  $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln(x+1)$ .
- a) Arătați că funcția  $F: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$  este o primitivă a funcției  $f$ .  
b) Determinați primitiva  $G$  a funcției  $f$  cu proprietatea că  $G(0) = 3$ .  
c) Calculați aria suprafeței mărginite de graficul funcției  $f$ , axa  $Ox$  și dreptele de ecuații  $x = 0$ ,  $x = e - 1$ .

## Testul 2

### Subiectul I

1. Calculați suma primilor trei termeni ai progresiei geometrice  $(b_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $b_1 = 2$  și  $b_4 = 54$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 4x + 1$ . Calculați  $(f \circ f)(1)$ .
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $2^{2x+1} - 3 \cdot 2^x + 1 = 0$ .
4. Calculați probabilitatea ca, alegând, la întâmplare, un număr din mulțimea  $A = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{99}, \sqrt{100}\}$ , acesta să fie număr rațional.
5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(1, 3)$ ,  $B(2, -5)$  și  $C(6, 1)$ . Determinați ecuația medianei din vârful  $A$  al triunghiului  $ABC$ .
6. Calculați lungimea razei cercului circumscris unui triunghi  $ABC$ , în care  $A = \frac{\pi}{6}$  și  $BC = 6$ .

### Subiectul al II-lea

1. Se consideră matricea  $A(m) = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$ , unde  $m$  este număr real.
- a) Arătați că  $\det(A(m)) = (m+2)(m-1)^2$ .  
b) Determinați rangul matricei  $A(-2)$ .



# Cuprins

<i>Cuvânt-înainte</i> .....	5
-----------------------------	---

## TEME RECAPITULATIVE

	<i>Enunțuri</i>	<i>Soluții</i>
<b>Clasa a IX-a</b>		
1.1. Mulțimi și elemente de logică matematică .....	7	234
1.2. Șiruri. Progresii .....	10	235
1.3. Funcții. Funcția liniară .....	12	237
1.4. Ecuația de gradul al II-lea. Funcția de gradul al II-lea .....	15	238
1.5. Vectori .....	19	239
1.6. Trigonometrie .....	22	241
1.7. Aplicații ale trigonometriei în geometrie .....	25	243

## Clasa a X-a

2.1. Radicali și logaritmi .....	28	245
2.2. Numere complexe .....	31	246
2.3. Funcții .....	34	248
2.4. Ecuații și inecuații .....	37	251
2.5. Combinatorică .....	41	254
2.6. Matematici aplicate. Probabilități .....	44	256
2.7. Geometrie analitică .....	46	258
2.8. Probleme recapitulative din materia claselor a IX-a – a X-a.....	49	259

## Clasa a XI-a

3.1. Permutări .....	56	261
3.2. Matrice .....	57	261
3.3. Determinanți .....	60	263
3.4. Inversa unei matrice. Ecuații matriceale .....	64	264
3.5. Sisteme de ecuații liniare .....	66	266
3.6. Probleme de sinteză – algebră .....	70	268
3.7. Șiruri .....	75	270
3.8. Șiruri date prin formule de recurență .....	80	274
3.9. Limite de funcții .....	82	276
3.10. Asimptote .....	86	278
3.11. Funcții continue .....	88	279
3.12. Derivata unei funcții .....	90	281
3.13. Teorema lui Fermat. Teorema lui Rolle. Teorema lui Lagrange .....	93	283
3.14. Regulile lui l'Hospital .....	96	286
3.15. Rolul derivatelor de ordinul I și de ordinul al II-lea în studiul funcțiilor .....	98	287
3.16. Reprezentarea grafică a funcțiilor .....	103	294
3.17. Probleme de sinteză – analiză matematică .....	106	300

<b>Clasa a XII-a</b>	
4.1. Legi de compoziție.....	112.....304
4.2. Grupuri.....	115.....306
4.3. Inele și corpuri .....	120.....311
4.4. Polinoame .....	124.....315
4.5. Probleme de sinteză – algebră.....	130.....320
4.6. Primitive.....	133.....321
4.7. Formula Leibniz–Newton .....	139.....324
4.8. Metode de integrare .....	144.....328
4.9. Proprietăți ale integralei Riemann.....	147.....332
4.10. Aplicații ale integralei definite.....	152.....337
4.11. Probleme de sinteză – analiză matematică.....	155.....340
<b>TESTE PENTRU BACALAUREAT, DUPĂ MODELUL M.E.N.....</b>	<b>159.....343</b>
<b>BREVIAR TEORETIC .....</b>	<b>368</b>
<i>Bibliografie</i> .....	397