mate 2000+
excelenţă

Referent ştiinţific: prof. univ. dr. Radu Gologan

Toate capitolele prezentei lucrări au fost integral elaborate de:
Maranda Linţ, Dorin Linţ, Rozalia Marinescu şi Dan Ştefan Marinescu.

Redactare: Mugur Butuza
Corectură: Adriana Oprea
Tehnoredactare & pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Ionuţ Broştianu

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
Matematică de excelenţă pentru concursuri, olimpiade şi centre de excelenţă : clasa a VI-a / Maranda Linţ, Dorin Linţ, Rozalia Marinescu, ... – Ed. a 2-a. - Piteşti : Paralela 45, 2019
Conţine bibliografie
ISBN 978-973-47-3048-3
I. Linţ, Maranda
II. Linţ, Dorin
III. Marinescu, Rozalia
51

COMENZI – CARTEA PRIN POŞTĂ

EDITURA PARALELA 45
Bulevardul Republicii, Nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești, jud. Argeș, cod 110177
Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918
Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492
E-mail: comenzi@edituraparalela45.ro

www.edituraparalela45.ro

Tiparul executat la tipografia *Editurii Paralela 45*
E-mail: tipografie@edituraparalela45.ro

Maranda Linț
Dorin Linț
Rozalia Marinescu
Dan Ștefan Marinescu
Mihai Monea
Steluța Monea
Marian Stroe

Matematică de excelență

pentru concursuri, olimpiade şi centre de excelenţă

clasa a VI-a

Ediţia a II-a

mate 2000 – excelenţă

ÎNVĂȚARE DE EXCELENȚĂ®
supersucces

La început de drum...

Iată că a trecut un an petrecut la gimnaziu şi ne bucurăm că, citind aceste rânduri, te numeri printre prietenii matematicii. Deja ai făcut primii paşi în a înţelege matematica, în a găsi răspunsuri la multele probleme – provocări pe care aceasta ni le aduce în atenţie.

Ai participat deja la diferite concursuri de matematică şi suntem încântaţi că te afli printre cei fruntaşi; oricum, în drumul spre „a şti mai multe şi mai bine, a gândi frumos şi profund" toţi sunt câştigători.

Pentru a pătrunde în tainele matematicii ai nevoie de dorinţă, răbdare, iniţiativă şi multă muncă. Trebuie să ai curaj, să încerci şi iarăşi să încerci, să nu renunţi... deoarece uneori drumul spre *succes* are şi suişuri, dar şi coborâşuri, ocolişuri.

Pentru a obţine performanţă, rezultate, mai ai nevoie de ceva: trebuie să ştii să prezinţi în scris sau verbal ceea ce gândeşti pentru soluţionarea problemelor.

Ai văzut că temele, subiectele de la concursuri pot fi cu diferite grade de dificultate şi necesită volum de muncă diferit. În acordarea punctajului se ţine cont de aceste aspecte. Pentru a obţine punctaj bun trebuie să scrii toţi paşii parcurşi în rezolvarea problemelor în cauză, să justifici rezultatele, relaţiile, afirmaţiile şi să le ordonezi logic, natural, firesc. Asta înseamnă *să redactezi* soluţia problemei. Câştigătorii nu sunt prieteni cu expresia „ştiu, dar nu pot să spun".

Cum învăţăm să redactăm rezolvarea unei probleme? Cu multă răbdare, gândind, înţelegând în detaliu, în profunzime rezolvarea problemei şi apoi scriind aşa încât cineva care citeşte rezolvarea să înţeleagă uşor exact ceea ce ai înţeles tu după acel efort de gândire şi analiză. Trebuie să accepţi că poţi greşi, să cauţi atunci cauza, să-ţi completezi cunoştinţele sau să corectezi modul în care ai gândit. Permanent, trebuie să fii conştient de nivelul prestaţiei tale, adică să fii capabil *să autoevaluezi* punctajul pe care îl vei obţine la un test, la un concurs.

Cunoscând aceste „arme secrete", cu dorinţă şi perseverenţă, succesul este mult mai aproape.

Pentru exemplificare, prezentăm în cele ce urmează un test însoţit de rezolvarea problemelor şi modul de atribuire a punctajelor.

Test de evaluare – Exemplu de notare

(7p) **1.** La un concurs de matematică participă elevi din Arad, Bucureşti, Deva şi Timişoara. Se ştie că 30 de elevi nu sunt din Arad, 33 nu sunt din Bucureşti, 32 nu sunt din Deva şi 34 de elevi nu sunt din Timişoara. Aflaţi numărul participanţilor din fiecare oraş.

(7p) **2.** Se consideră numerele naturale $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ astfel încât $a_1 = 1$ şi fiecare număr, începând cu al doilea, este triplul sumei tuturor numerelor scrise înaintea sa.

(2p) **a)** Aflaţi al patrulea termen al şirului.

(5p) **b)** Determinaţi $n \in \mathbb{N}^*$ dacă $a_1 + a_2 + ... + a_n = 2^{20}$.

(7p) **3.** Fie fracţia $F_n = \dfrac{3n+7}{2n+3}, n \in \mathbb{N}$.

(2p) **a)** Calculaţi F_n pentru $n \in \{1, 2, 3\}$.

(5p) **b)** Dacă F_n este reductibilă, determinaţi ultima cifră a numărului *n*.

(7p) **4.** Determinaţi cifra *x*, în baza 10, pentru care $x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = \overline{x6x}$.

Timp de lucru: 90 de minute

Soluţii:

1. Dacă 30 de elevi nu sunt din Arad, înseamnă că aceştia sunt din Bucureşti sau Deva sau Timişoara. *(1p)*

La fel, obţinem:

33 de elevi sunt din Arad sau Deva sau Timişoara. *(1p)*

32 de elevi sunt din Arad sau Bucureşti sau Timişoara. *(1p)*

34 de elevi din Arad sau Bucureşti sau Deva. *(1p)*

Adunând, obţinem triplul numărului elevilor din cele patru oraşe (fiecare apare de 3 ori). Acesta este 30 + 33 + 34 = 129, deci numărul participanţilor este 129 : 3 = 43. *(1p)*

Atunci, 43 – 30 = 13 elevi sunt din Arad,
43 – 33 = 10 elevi sunt din Bucureşti,
43 – 32 = 11 elevi sunt din Deva şi
43 – 34 = 9 elevi sunt din Timişoara. *(2p)*

Total 7p

2. a) $a_2 = 3 \cdot 1 = 3$;

$a_3 = 3(a_1 + a_2) = 3(1+3) = 3 \cdot 4$;

$a_4 = 3(a_1 + a_2 + a_3) = 3(1 + 3 + 3 \cdot 4) = 3 \cdot 4^2$. *(2p)*

b) Procedând la fel, se observă că $a_5 = 3 \cdot 4^3$, $a_6 = 3 \cdot 4^4$, $a_n = 3 \cdot 4^{n-2}$, $n \geq 2$. *(2p)*

$a_1 + a_2 + ... + a_n = 2^{20} \Leftrightarrow 1 + 3 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4^2 + ... + 3 \cdot 4^{4-2} = 2^{20}$. *(1p)*

$4 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4^2 + ... + 3 \cdot 4^{n-2} = 2^{20}$

$4^2 + 3 \cdot 4^2 + ... + 3 \cdot 4^{n-2} = 2^{20}$. *(1p)*

……………………………………………………………………………………………..

În final, $4^{n-1} = 2^{20} \Rightarrow 4^{n-1} = 4^{10} \Rightarrow n = 11$. *(1p)*

Total 7p.

3. a) $n = 1 \Rightarrow F_1 = \dfrac{3+7}{2+3} = \dfrac{10}{5} = 2$;

$n = 2 \Rightarrow F_2 = \dfrac{3 \cdot 2 + 7}{2 \cdot 2 + 3} = \dfrac{13}{7}$;

$n = 3 \Rightarrow F_3 = \dfrac{3 \cdot 3 + 7}{2 \cdot 3 + 3} = \dfrac{16}{9}$. *(2p)*

b) Fie $d \in \mathbb{N}^*$, $d = (3n+7, 2n+3)$, adică *d* este c.m.m.d.c. al numerelor $3n+7$ şi $2n+3$, $d \geq 2$, deoarece fracţia este reductibilă. *(1p)*

Atunci $d \,|\, 2(3n+7) - 3(2n+3) \Rightarrow d \,|\, 5$. *(2p)*

Capitolul I
NUMERE NATURALE

I.1. PROPRIETĂŢILE RELAŢIEI DE DIVIZIBILITATE ÎN $\mathbb{N}$.

CRITERII DE DIVIZIBILITATE. NUMERE PRIME, NUMERE COMPUSE PĂTRAT PERFECT, CUB PERFECT, ULTIMA CIFRĂ A UNUI NUMĂR NATURAL.

A. ELEMENTE DE TEHNICĂ MATEMATICĂ

A1: Proprietăţile relaţiei de divizibilitate, criterii de divizibilitate

Numărul natural a se divide la numărul natural b dacă există un număr natural c astfel încât $a = b \cdot c$.

Notăm $b|a$ (b divide a) sau $a \vdots b$ (a se divide la b).

1. Proprietăţile relaţiei de divizibilitate

1.1. $a|a, \ \forall a \in \mathbb{N}$;

1.2. Dacă $a, b \in \mathbb{N}^*$, $a|b$ şi $b|a$, atunci $a = b$;

1.3. Dacă $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, $a|b$ şi $b|c$, atunci $a|c$.

2. Se deduc, de asemenea, următoarele proprietăţi:

2.1. Dacă $a, b \in \mathbb{N}^*$ şi $b|a$, atunci $b|(na), \forall \in \mathbb{N}$.

Demonstraţie: $b|a \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ astfel încât $a = b \cdot k \Rightarrow na = n \cdot bk = b \cdot (nk) \Rightarrow b|(na)$.

EXEMPLUL 1: $15763 \cdot 25 \vdots 5$ pentru că $25 \vdots 5$.

2.2. Dacă $a, b, d \in \mathbb{N}^*, d|a$ şi $d|b$, atunci $d|(a+b)$.

Demonstraţie:
$d|a$ şi $d|b \Rightarrow \exists k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ a.î. $a = d \cdot k_1$ şi $b = d \cdot k_2 \Rightarrow a + b = d(k_1 + \ k_2) \Rightarrow (a+b) \vdots d$.

EXEMPLUL 2: $(5^7 \cdot 29 + 29^3 \cdot 7) \vdots 29$ pentru că $5^7 \cdot 29 \vdots 29$ şi $29^3 \cdot 7 \vdots 29$.

2.3. Dacă $a, b, d \in \mathbb{N}^*, d|a, \ d|b$ şi $a \geq b$, atunci $d|(a-b)$.

EXEMPLUL 3: $(75398 - 2^6) \vdots 2$ *pentru că* $75398 \vdots 2$ şi $2^6 \vdots 2$.

2.4. Dacă $d, a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{N}$ şi $d|a_1, d|a_2, ..., d|a_n$, atunci

$d|a_1b_1 \pm a_2b_2 \pm ... \pm a_nb_n)$, $\ \forall b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbb{N}$ pentru care $a_1b_1 \pm a_2b_2 \pm ... \pm a_nb_n \in \mathbb{N}$.

Demonstraţia se obţine din 2.1., 2.2., 2.3, dar depăşeşte cadrul lucrării.

EXEMPLUL 4: $7|(2^9 \cdot 7 + 2^8 \cdot 7^2 - 2^7 \cdot 7^3)$, pentru că $7|7; 7|7^2; 7|7^3$.

Două numere naturale pentru care singurul divizor comun este 1 se numesc numere prime între ele. Vom scrie $(a, b) = 1$.

2.5. Dacă $a,b,c \in \mathbb{N}^*$, $a \vdots b, a \vdots c$ şi $(b,c)=1$, atunci $a \vdots (b \cdot c)$.

EXEMPLUL 5: $(5^3 \cdot 7^9 - 5) \vdots 10$ pentru că $(5^3 \cdot 7^9 - 5) \vdots 5$ şi $(5^3 \cdot 7^9 - 5) \vdots 2$.

2.6. Dacă $a,b,d \in \mathbb{N}^*$, $d \mid (a+b)$ şi $d \mid a$, atunci $d \mid b$.

Demonstraţie: $d \mid (a+b)$ şi $d \mid a \Rightarrow \exists k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ astfel încât $a+b=d \cdot k_1$ şi $a = d \cdot k_2 \Rightarrow b = d(k_1 - k_2) \Rightarrow d \mid b$.

Observaţie: Prin reducere la absurd, se obţine imediat următoarea afirmaţie: Dacă $a,b,d \in \mathbb{N}^*$, $d \mid a$ şi $d \nmid b$, atunci $d \nmid (a+b)$.

EXEMPLUL 6: Dacă $x, y \in \mathbb{N}^*$, $a = x + 3y$, $b = 3x + 7y$, atunci $(a+b+3) \not\vdots 2$.

Într-adevăr, $a+b=2(2x+5)$ şi $a+b \vdots 2$.

Cum $3 \not\vdots 2 \Rightarrow (a+b+3) \not\vdots 2$.

3. Criterii de divizibilitate

Fie $a = \overline{a_1 a_2 ... a_n}$ număr natural. Atunci, $a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + ... + a_{n-1} \cdot 10 + a_n = = 10(a_1 \cdot 10^{n-2} + a_2 \cdot 10^{n-3} + ... + a_{n-1}) + a_n$.

Se pot deduce imediat criteriile de divizibilitate cu 2, 5, 10.

3.1. Un număr natural *a* se divide la 2 dacă şi numai dacă $u(a) \in \{0,2,4,6,8\}$.

Observaţie: Vom numi număr natural par un număr natural, divizibil cu 2 şi vom numi număr impar un număr natural care nu se divide la 2.
Folosind teorema împărţirii cu rest, orice număr natural se poate scrie în una din formele *a* = *2k* sau *a* = *2k+1*. Se obţin astfel două mulţimi disjuncte ale mulţimii numerelor naturale.
$\mathbb{N} = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{2k+1 \mid k \in \mathbb{N}\}$.

EXEMPLUL 7: a) Suma oricăror două numere naturale care au aceeaşi paritate este un număr par;
b) Suma oricăror două numere naturale care au parităţi diferite este un număr impar.
Fie *a* şi *b* cele două numere.
a) Dacă *a* şi *b* sunt pare, atunci $u(a)$ şi $u(b) \in \{0,2,4,6,8\}$
$\Rightarrow u(a+b) = u(u(a) + u(b)) \in \{0,2,4,6,8\} \Rightarrow (a+b)$ este par.

Dacă *a* şi *b* sunt impare, atunci $u(a)$, $u(b) \in \{1,3,5,7,9\} \Rightarrow u(a+b) \in \{0,2,4, 6,8\} \Rightarrow (a+b)$ este număr par.

b) Dacă *a* este par şi *b* este impar $\Rightarrow \exists k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, astfel încât $a = 2k_1$ şi $b = 2k_2 + 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow a+b = 2(k_1 + k_2) + 1 \Rightarrow a+b$ este număr impar.

3.2. Un număr natural a se divide la 5 dacă şi numai dacă $u(a) \in \{0,5\}$.

EXEMPLUL 8: $a = 768979 - 144444$ se divide la 5 pentru că $u(a) = 5$.

3.3. Un număr natural *a* se divide la 10 dacă şi numai dacă $u(a) = 0$.

Observaţie: Un număr natural se divide la 10 dacă şi numai dacă se divide la 2 şi la 5.

Capitolul V
PUNCT, DREAPTĂ, SEMIDREAPTĂ, SEGMENT DE DREAPTĂ. UNGHIURI

A. Elemente de tehnică matematică

În clasa a VI-a, elevii se întâlnesc pentru prima dată cu geometria bazată pe raționament. Apar, în învățarea matematicii, problemele de demonstrat. Prin rezolvarea acestora se urmărește: justificarea sau determinarea unor relații, identificarea unor proprietăți „noi" ale unei figuri geometrice date și justificarea lor, stabilirea valorilor de adevăr a unei propoziții referitoare la o configurație geometrică dată sau obținută prin construcții ajutătoare.

Ele sunt formulate astfel: „ $p_1 \Rightarrow p_2$ ", unde p_1 este ipoteza și p_2 este concluzia.

Pentru „demonstrarea" (rezolvarea) unei probleme de geometrie, se pornește de la datele cunoscute (ipoteza problemei) și, folosind axiomele geometriei (propoziții considerate adevărate care nu necesită demonstrație) și teoreme deja demonstrate, se urmărește pas cu pas obținerea „concluziei" care este formulată în cerința problemei.

Unele probleme sunt formulate astfel: „ p_1 dacă și numai dacă p_2 " sau „ $p_1 \Leftrightarrow p_2$ ".

Rezolvarea acestora constă în rezolvarea a două probleme de tipul celor anterioare:

1. $p_1 \Rightarrow p_2$, în care p_1 este ipoteza și p_2 este concluzia.
2. $p_2 \Rightarrow p_1$, în care p_2 este ipoteza și p_1 este concluzia.

Problemele de geometrie sunt foarte diverse, iar rezolvarea lor necesită cunoștințe temeinice și abilitate în stabilirea de conexiuni logice între acestea. Se pot, totuși, stabili anumite tehnici la care să ne gândim dacă este oportun să le folosim pentru rezolvarea unor tipuri de cerințe.

Multe probleme de geometrie solicită demonstrarea unor cerințe de următoarele tipuri:

1. două segmente sunt congruente;
2. două unghiuri sunt congruente;
3. două triunghiuri sunt congruente;
4. un triunghi este isoscel;
5. un triunghi este echilateral;
6. o semidreaptă este bisectoare a unui unghi;
7. lungimea unui segment este mai mică decât lungimea altui segment;
8. are loc o inegalitate între două expresii care conțin lungimi de segmente, măsuri de unghiuri etc.;
9. un număr de puncte (mai mare sau egal cu 3) sunt coliniare;
10. niște drepte sunt concurente;
11. două drepte sunt paralele;
12. două drepte sunt perpendiculare;

13. măsura unui unghi este constantă;
14. lungimea unui segment este constantă;
15. proprietăţile şi relaţiile care vor fi detaliate în clasele următoare.

Pentru câteva dintre cerinţele formulate mai sus, vom enumera unele tehnici care pot fi utile în abordarea şi apoi rezolvarea problemelor.

I. Pentru a demonstra că două segmente sunt congruente (au aceeaşi lungime), putem proceda astfel:

1. se calculează lungimile şi se compară;
2. se demonstrează că sunt laturi omoloage (corespunzătoare) în două triunghiuri congruente;
3. se demonstrează că sunt laturile care determină vârful unui triunghi isoscel;
4. se foloseşte faptul că punctele mediatoarei unui segment sunt egal depărtate de capetele segmentului;
5. se demonstrează că sunt laturi ale unui triunghi echilateral;
6. se demonstrează că sunt mediane sau bisectoare sau înălţimi corespunzătoare ale unor triunghiuri congruente;
7. se folosesc proprietăţile triunghiurilor (linie mijlocie, mediana triunghiului dreptunghic);
8. se foloseşte faptul că punctele de pe bisectoarea unui unghi sunt egal depărtate de laturile unghiului;
9. se foloseşte faptul că punctele unui cerc sunt egal depărtate de centrul său.

II. Pentru a demonstra că două unghiuri sunt congruente (au aceeaşi măsură), putem proceda astfel:

1. se demonstrează că sunt opuse la vârf;
2. se demonstrează că au acelaşi suplement;
3. se demonstrează că au acelaşi complement;
4. se demonstrează că sunt unghiuri corespunzătoare în două triunghiuri congruente;
5. se demonstrează că sunt unghiuri de la baza unui triunghi isoscel;
6. se demonstrează că sunt unghiurile unui triunghi echilateral;
7. se foloseşte relaţia de tranzitivitate a relaţiei de congruenţă;
8. se folosesc cunoştinţele despre bisectoarea unui unghi;
9. se foloseşte paralelismul a două drepte şi o secantă.

Problemele următoare pot ilustra modul de folosire a tehnicilor enumerate.

EXEMPLUL 1: Fie $\sphericalangle xOy$ un unghi şi $(OP$ bisectoarea sa.
Demonstraţi că punctul P este egal depărtat de laturile unghiului.

CUPRINS