mate 2000^{+}
excelenţă

Referent ştiinţific: prof. univ. dr. Radu Gologan

Toate capitolele prezentei lucrări au fost integral elaborate de:
Maranda Linţ, Dorin Linţ, Rozalia Marinescu şi Dan Ştefan Marinescu.

Corectură: Adriana Oprea
Tehnoredactare: Adriana Vlădescu
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Ionuţ Broştianu

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
Matematică de excelenţă pentru concursuri, olimpiade şi centre de excelenţă : clasa a V-a / Maranda Linţ, Dorin Linţ, Rozalia Marinescu, ... –
Ed. a 2-a. - Piteşti : Paralela 45, 2019
ISBN 978-973-47-3047-6
I. Linţ, Maranda
II. Linţ, Dorin
III. Marinescu, Rozalia
51

Maranda Linț
Dorin Linț
Rozalia Marinescu
Dan Ștefan Marinescu
Mihai Monea
Steluța Monea
Marian Stroe

Matematică de excelență

pentru concursuri, olimpiade şi centre de excelență

clasa a V-a

Ediţia a II-a

mate 2000 – excelență

ÎNVĂȚARE DE EXCELENȚĂ®
supersucces

La început de drum…

Dragă micule pasionat de matematică, ne bucurăm că, citind aceste rânduri, dovedeşti că te afli printre prietenii „reginei ştiinţelor”.

Drumul cunoaşterii în matematică este unul lung, interesant, presărat cu încercări, provocări, dar şi cu numeroase satisfacţii. Cum te poţi menţine pe acest drum, cum poţi obţine rezultate la competiţiile la care vei participa?

Cu încredere, multă răbdare, deschidere, iniţiativă, la care se adaugă dorinţa de a învăţa lucruri noi şi de a munci constant, vei creşte frumos, vei dobândi cunoştinţe temeinice, vei şti să gestionezi corect timpul petrecut într-un concurs, să justifici toţi paşii parcurşi în rezolvarea problemelor, să autoevaluezi soluţiile pe care le-ai dat.

După fiecare concurs, analizând împreună cu profesorul tău rezultatul obţinut, greşelile pe care le-ai făcut, te vei autoperfecţiona, iar succesul va fi mai aproape.

Pentru a face cunoştinţă cu modul în care o lucrare este evaluată, vă prezentăm un exemplu de test de evaluare.

TEST DE EVALUARE – EXEMPLU

Enunţuri:

(7p) **1.**

(4p) a) Aflaţi numărul natural x din egalitatea:
$[3 \cdot (47 \cdot 5 - 2475 : 11) + 2x] \cdot 2 = 160.$

(3p) b) Aflaţi toate numerele naturale care împărţite la un număr natural de o cifră dau câtul 29 şi restul 6.

(7p) **2.** Adunând un număr natural cu succesorul său obţinem un număr cu 12 mai mare decât predecesorul acelui număr. Aflaţi numărul care are această proprietate.

(7p) **3.** Suma a două numere naturale este 138. Aflaţi numerele, ştiind că jumătate din primul număr este cu 3 mai mare decât un sfert din cel de-al doilea.

(7p) **4.** Petre şi Ana inventează un joc. O etapă a jocului constă în desenarea de către fiecare a unei singure figuri geometrice, triunghi sau pătrat, la alegere. După cinci etape, cei doi copii au desenat împreună 6 triunghiuri, iar numărul laturilor desenate de Ana este cu 4 mai mare decât cel al laturilor desenate de Petre.

(4p) a) Câte triunghiuri a desenat fiecare în cele cinci etape?

(3p) b) Dacă, începând cu etapa a şasea, Ana desenează numai triunghiuri, iar Petre desenează numai pătrate, după câte etape (începând cu prima) cei doi copii vor avea acelaşi număr de laturi desenate?

Soluţii:

1. a) $[3 \cdot (47 \cdot 5 - 2475 : 11) + 2x] \cdot 2 = 160 \Leftrightarrow$

$3(47 \cdot 5 - 2475 : 11) + 2x = 80$ (*1p*)

$3(235 - 225) + 2x = 80$ (*1p*)

$30 + 2x = 80$

$2x = 80 - 30$ (*1p*)

$2x = 50$

$x = 25$ (*1p*)

b) Fie a împărţitorul, număr natural de o cifră şi n numărul căutat. Atunci, $n = a \cdot 29 + 6$, $6 < a$, a cifră în baza 10. (*1p*)
Rezultă că a poate fi 7, 8 sau 9. (*1p*)
$a = 7 \Rightarrow n = 7 \cdot 29 + 6 \Rightarrow n = 209$
$a = 8 \Rightarrow n = 8 \cdot 29 + 6 \Rightarrow n = 238$
$a = 9 \Rightarrow n = 9 \cdot 29 + 6 \Rightarrow n = 267$
Numerele sunt 209, 238 şi 267 (*1p*)
Total *7p*

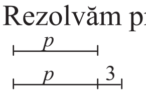
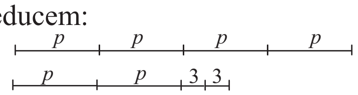
2. Fie n numărul căutat. Succesorul lui este $n + 1$, iar predecesorul său este $n - 1$. (*2p*)
Atunci, avem egalitatea $n + (n + 1) = 12 + (n - 1)$ (*3p*)

$2n + 1 = 11 + n \quad | -n$

$n + 1 = 11 \quad | -1$

$n = 10$ (*2p*)

Într-adevăr, $10 + 11 = 9 + 12$. Total *7p*
Comentariu: Problema se rezolvă uşor şi prin metoda grafică.

3. Rezolvăm problema prin metoda grafică. Realizăm următoarea reprezentare:

sfertul celui de-al doilea număr (*1p*)
jumătatea primului număr (*1p*)
Deducem:

al doilea număr, primul număr } 138 (*1p*)
$6p + 6 = 138 \Rightarrow 6p = 132 \Rightarrow p = 22$ (*1p*)
Primul număr este $22 \cdot 2 + 6 = 50$ (*1p*)
Al doilea număr este $22 \cdot 4 = 88$ (*1p*)
Total *7p*

4. a) De fiecare dată când un copil desenează un pătrat, iar celălalt desenează un triunghi, se obţine un avans de o latură pentru cel care a desenat pătratul. Ana are cu 4 laturi mai mult decât Petre, deci Ana a desenat cu 4 pătrate mai mult. (*1p*)
În cinci etape s-au desenat 10 figuri geometrice, dintre care 6 triunghiuri.
Distingem posibilităţile:
(i) Ana desenează 5 pătrate, Petre desenează 1 pătrat şi 4 triunghiuri, nu convine, numărul triunghiurilor nefiind 6. (*1p*)
(ii) Ana desenează 4 pătrate şi 1 triunghi, iar Petre desenează 5 triunghiuri. (*1p*)
În acest caz sunt desenate 6 triunghiuri şi anume Ana desenează 1 triunghi, Petre desenează 5 triunghiuri. (*1p*)
b) După 5 etape, Ana a desenat $4 \cdot 4 + 1 \cdot 3 = 19$ laturi, Petre desenează $5 \cdot 3 = 15$ laturi. (*1p*)
Cele 4 laturi pe care Ana le are în avans la sfârşitul etapei a cincea vor fi recuperate de Petre în următoarele patru etape. (*1p*)
Ana şi Petre au desenat acelaşi număr de laturi după 9 etape. (*1p*)
Total *7p*

Capitolul I
METODE DE REZOLVARE A PROBLEMELOR DE ARITMETICĂ

I.1. METODA COMPARAŢIEI

A. ELEMENTE DE TEHNICĂ MATEMATICĂ

Problemele care se rezolvă cu această metodă se caracterizează prin faptul că se cer două sau mai multe mărimi atunci când legăturile/relaţiile dintre ele se pot deduce din compararea a două situaţii diferite, adică atunci când se cunosc câte două valori pentru fiecare mărime. Important este să observăm cauza care duce la diferenţierea celor două situaţii.

Metoda constă în a face ca una dintre mărimi să fie adusă la aceeaşi valoare. În acest fel problema devine mai simplă, întrucât se elimină una sau mai multe necunoscute, în final rămânând o singură „necunoscută".

Dispunerea datelor într-o astfel de problemă se face cu respectarea relaţiilor stabilite între mărimi, comparaţia dintre valorile aceleiaşi mărimi fiind pusă în evidenţă în mod direct prin aşezarea valorilor aceleiaşi mărimi, unele sub altele.

Rezolvarea problemei se face prin eliminarea succesivă a necunoscutelor până se ajunge la o relaţie cu o singură necunoscută.

APLICAŢII:

1. Trei caiete şi patru creioane costă 10 lei, iar nouă caiete şi patru creioane costă 22 lei. Cât costă un caiet? Dar un creion?

Soluţie:

3 caiete ………………… 4 creioane ………………… 10 lei
9 caiete ………………… 4 creioane ………………… 22 lei

Diferenţa de bani $22 - 10 = 12$ lei provine din diferenţa numărului de caiete: $9 - 3 = 6$.
Deducem că 6 caiete costă 12 lei, deci un caiet costă $12 : 6 = 2$ lei.
Din enunţ, 3 caiete şi 4 creioane costă 10 lei, deci 4 creioane costă $10 - 3 \cdot 2 = 4$ lei şi atunci un creion costă 1 leu.
Răspuns: Un caiet costă 2 lei, un creion costă 1 leu.

2. Andreea a cumpărat 5 caiete şi 3 creioane cu 116 lei. Pentru 4 creioane a plătit cât pentru 3 caiete. Care este preţul unui caiet? Dar al unui creion?

Soluţie:

5 caiete ………………… 3 creioane ………………… 116 lei
Luăm cantităţi de 4 ori mai mari. Atunci:
20 caiete ……………… 12 creioane ………………… 464 lei
Deoarece 4 creioane costă cât 3 caiete, atunci 12 creioane costă cât 9 caiete.
Obţinem că 20 caiete şi încă 9 caiete costă 464 lei,

29 caiete costă 464 lei, deci un caiet costă 464 : 29 = 16 lei.
3 creioane costă 116 – 5 · 16 = 36 lei, deci un creion costă 12 lei.

3. Aflaţi trei numere naturale, ştiind că suma a câte două dintre ele este 112, 164, respectiv 130.

Soluţie:

Notăm x, y, z cele trei numere.

Avem:

$x + y = 112 \quad (1)$
$y + z = 164 \quad (2)$
$z + x = 130 \quad (3)$

Adunând membru cu membru cele 3 egalităţi, obţinem:

$x + y + y + z + z + x = 112 + 164 + 130$
$2x + 2y + 2z = 406$
$x + y + z = 203 \quad (4)$

Comparăm (1) şi (4):

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 112 \\ x + y + z = 203 \end{array}\right\} \Rightarrow z = 203 - 112,\ z = 91$$

Comparăm (2) şi (4):

$$\begin{cases} y + z = 164 \\ x + y + z = 203 \end{cases} \Rightarrow x = 203 - 164,\ x = 39$$

Comparăm (3) şi (4):

$$\left.\begin{array}{l} x + z = 130 \\ x + y + z = 203 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 203 - 130,\ y = 73$$

Numerele sunt 39, 73 şi 91.

4. Aflaţi numerele naturale a şi b, ştiind că $a + 6b = 135$ şi $2a + 3b = 90$.

Soluţie:

Din $2a + 3b = 90$ obţinem că $2 \cdot (2a + 3b) = 180$, adică $4a + 6b = 180$.

Avem următoarele egalităţi: $a + 6b = 135$
$4a + 6b = 180$.

Comparând egalităţile, deducem că $4a - a = 180 - 135$, deci $3a = 45$ şi $a = 15$.

Din $15 + 6b = 135$ obţinem $6b = 120$ şi $b = 20$.

Numerele sunt 15 şi 20.

5. 12 cuţite şi 10 furculiţe costă 156 lei, iar 15 cuţite şi 25 furculiţe de acelaşi fel costă 270 lei. Cât costă un cuţit şi cât costă o furculiţă?

Soluţie:

Dacă 12 cuţite şi 10 furculiţe costă 156 lei, atunci 6 cuţite şi 5 furculiţe costă 116 lei : 2 = 78 lei (1).

Dacă 15 cuţite şi 25 furculiţe costă 270 lei atunci 3 cuţite şi 5 furculiţe costă 270 lei : 5 = 54 lei (2).

Comparând (1) şi (2) deducem că (6 – 3) cuţite costă (78 – 54) lei, adică 3 cuţite costă 24 lei.

Obţinem că un cuţit costă 24 lei : 3 = 8 lei.

Apoi 10 furculiţe costă 156 lei – (12 · 8) lei sau
10 furculiţe costă 60 lei, de unde
o furculiţă costă 60 lei : 10 = 6 lei.

B. Probleme de creativitate

1. Într-un bazin apa curge prin două robinete. Dacă se lasă deschis primul robinet timp de 4 ore şi al doilea 6 ore, în bazin se adună 19440 litri de apă, iar dacă se lasă deschis primul robinet 6 ore şi al doilea 4 ore, în bazin se adună 18360 litri de apă. Câţi litri de apă curg prin fiecare robinet într-o oră?

Soluţie:

Notăm cu a şi b cantitatea de apă ce se adună într-o oră de la primul, respectiv de la al doilea robinet. Atunci:

$4a$ …………… $6b$ …………… 19440 ℓ

$6a$ …………… $4b$ …………… 18360 ℓ

Obţinem prin adunare:

$10a$ …………… $10b$ …………… 37800 ℓ şi apoi

a …………… b …………… 3780 ℓ

$4a$ …………… $4b$ …………… 15120 ℓ

Comparăm cu prima relaţie: $4a$ …………… $4b$ …………… 15120 ℓ

$4a$ …………… $6b$ …………… 19440 ℓ

Rezultă:

$2b = 4320 \Rightarrow b = 2160$

Și apoi $4a + 6 \cdot 2160 = 19440 \Rightarrow 4a = 6480 \Rightarrow a = 1620$

Într-o oră prin primul robinet curg 1620 ℓ, iar prin al doilea 2160 ℓ.

2. a) Diferenţa a două numere naturale este 2013. Dacă se dublează unul dintre numere, atunci diferenţa devine 1003. Aflaţi numerele.

b) Produsul a două numere naturale este 2013. Dacă se măreşte unul dintre numere cu 7, atunci produsul devine 6710. Aflaţi numerele.

Soluţie:

a) Deoarece diferenţa se micşorează, se dublează scăzătorul. Acesta este 2013 – 1003 = = 1010. Descăzutul este 2013 + 1010 = 3023. Numerele sunt 3023 şi 1010.

b) Fie a, b cele două numere. Atunci $a \cdot b = 2013$ şi $a \cdot (b + 7) = 6710$. Din a doua egalitate se obţine $a \cdot b + 7 \cdot a = 6710 \Leftrightarrow 7 \cdot a = 6710 - 2013 \Leftrightarrow 7 \cdot a = 4697 \Rightarrow a = 671$ şi apoi $b = 3$.

3. Patru mere cântăresc tot atât cât 5 pere, 3 pere cât 7 piersici, iar 5 piersici cât 8 nuci. Dacă pe un taler al unei balanţe aşezăm 3 mere, câte nuci trebuie să aşezăm pe celălalt taler pentru ca balanţa să fie în echilibru?

Concurs „Pitagora”, 2002

Soluţie:

4 mere ………………. 5 pere $\Rightarrow$

$3 \cdot 4$ mere …………… $3 \cdot 5$ pere $\Leftrightarrow$ 12 mere …………… 15 pere; (1)

3 pere ……………….. 7 piersici $\Rightarrow$

$5 \cdot 3$ pere ……………. $5 \cdot 7$ piersici $\Leftrightarrow$ 15 pere ……………35 piersici (2)

Din (1) şi (2) $\Rightarrow$ 15 pere …………… 12 mere
15 pere …………… 35 piersici $\Big| \Rightarrow$ 12 mere ………… 35 piersici (3)

Dar 5 piersici ………… 8 nuci $\Rightarrow 7 \cdot 5$ piersici ………… $7 \cdot 8$ nuci $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 35 piersici ……….. 56 nuci (4)

Din (3) şi (4) $\Rightarrow$ 12 mere …………. 56 nuci $\Rightarrow$ 12 : 4 mere cântăresc tot atât cât 56 : 4 nuci $\Rightarrow$ Pe un taler se aşază 3 mere, iar pe celălalt se aşază 14 nuci.

4. Trei gospodine au cumpărat:

Prima: 3 kg de mere, 3 kg pere şi 5 kg gutui şi a plătit 20 lei;

A doua: 6 kg mere, 4 kg pere, 2 kg gutui şi a plătit 28 lei;

A treia: 6 kg mere, 7 kg pere, 7 kg gutui şi a plătit 39 lei.

Aflaţi cât costă un kilogram din fiecare fruct.

Soluţie:

Adunând cantităţile cumpărate de primele două gospodine obţinem că:

9 kg mere, 7 kg pere, 7 kg gutui costă 20 + 28 = 48 lei.

Comparând cu ce a cumpărat a treia gospodină rezultă că 3 kg de mere costă (48 – – 39) lei = 9 lei, de unde aflăm că 1 kg de mere costă 3 lei.

Avem o altă problemă:

3 kg pere, 5 kg gutui costă $(20 - 3 \cdot 3) = 11$ lei

4 kg pere, 2 kg gutui costă $(28 - 6 \cdot 3) = 10$ lei.

Atunci 12 kg pere, 20 kg gutui costă $4 \cdot 11$ lei = 44 lei.

12 kg pere, 6 kg gutui costă $3 \cdot 10$ lei = 30 lei.

Rezultă prin compararea relaţiilor că 14 kg gutui costă 44 – 30 = 14 lei, deci 1 kg gutui costă 1 leu şi apoi 3 kg pere costă 11 – 5 = 6 lei, deci

1 kg pere costă 6 : 3 = 2 lei.

Răspuns:

1 kg mere costă 3 lei.

1 kg pere costă 2 lei.

1 kg gutui costă 1 leu.

5. Numerele naturale a, b, c verifică egalităţile:

$a \cdot b = 32$, $2 \cdot b \cdot c = 16$ şi $3 \cdot a \cdot c = 48$.

Aflaţi cele trei numere.

Soluţie:

Egalităţile se mai scriu:

$a \cdot b = 32$, $b \cdot c = 8$, $a \cdot c = 16$

şi atunci $(a \cdot b) \cdot (b \cdot c) \cdot (a \cdot c) = 32 \cdot 8 \cdot 16$

$(a \cdot b \cdot c)^2 = 4096$

$(a \cdot b \cdot c)^2 = 64^2$

Obţinem $a \cdot b \cdot c = 64$

Din $a \cdot b \cdot c = 64$ şi $a \cdot b = 32 \Rightarrow c = 64 : 32$, $c = 2$.

Din $a \cdot b \cdot c = 64$ şi $b \cdot c = 8 \Rightarrow a = 64 : 8$, $a = 8$.

Din $a \cdot b \cdot c = 64$ şi $a \cdot c = 16 \Rightarrow b = 64 : 16$, $b = 4$.

Numerele sunt $a = 8$, $b = 4$, $c = 2$.

Cuprins