



EDITURA PARALELA 45

*Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.C. nr. 3022/08.01.2018.
Lucrarea este elaborată conform programei școlare în vigoare pentru bacalaureat.*

Redactare: Amalia Mărășescu, Bianca Vișan
Tehnoredactare: Mioara Benza
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

**Bacalaureat 2021 : matematică - M_șt-nat, M_tehnologic : teme recapitulative - 40 de teste, după modelul M.E.C. - (10 teste fără soluții) / Mihai Monea, Steluța Monea, Ioan Șerdean, Adrian Zanoschi. – Pitești : Paralela 45, 2020
Conține bibliografie
ISBN 978-973-47-3279-1**

I. Monea, Mihai
II. Monea, Steluța
III. Zanoschi, Adrian
IV. Șerdean, Ioan
51

Copyright © Editura Paralela 45, 2020
Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate,
iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.
www.edituraparelela45.ro

Mihai Monea
Steluța Monea

Ioan Șerdean
Adrian Zanoschi

Bacalaureat 2021

Matematică

M_șt-nat

M_tehnologic

Teme recapitulative
40 de teste, după modelul M.E.C.
(10 teste fără soluții)

Editura Paralela 45

Cuvânt-înainte

Examenul de Bacalaureat reprezintă pentru fiecare tânăr o placă turnantă în devenirea lui intelectuală și personală, având menirea de a certifica pregătirea științifică și competențele dobândite în liceu, dar și de a deschide un orizont profesional sau academic adecvat fiecăruia. În consecință, performanța la acest examen, și îndeosebi la disciplina matematică, presupune un efort de pregătire constant, atât pentru parcurgerea conținuturilor, cât și pentru fixare, sistematizare, recapitulare.

Cartea se adresează celor care pregătesc bacalaureatul la matematică, de tip *M_{șt-nat}* și *M_{tehnologic}*. Lucrarea de față își propune să fie un ghid eficient, cu o strategie completă, care să răspundă tuturor exigențelor disciplinei și ale probelor de examen.

Trebuie menționat că această carte este adaptată la forma de organizare a probei de matematică din cadrul examenului menționat. Elevii profilului științe ale naturii și cei ai profilului tehnologic au o programă de examen asemănătoare pentru clasele a XI-a – a XII-a, dar cu diferențe importante de conținut pentru clasele a IX-a – a X-a. De aceea, am evidențiat problemele și testele specifice doar elevilor de la profilul științe ale naturii. Astfel, acestea sunt marcate cu semnul „*”.

Cartea are un pronunțat caracter metodic, fiecare paragraf având trei componente: una de inițiere, una de consolidare și una de evaluare. Primele patru capitole sunt rezervate antrenamentului specific pentru examen. Problemele sunt grupate pe teme, urmărind acoperirea completă a programei. Acolo unde o anumită temă nu era destul de bine reprezentată în variantele examenelor din anii precedenți, au fost adăugate probleme clasice, pentru o mai bună aprofundare a subiectului. Așadar, un elev își poate alege singur un capitol pe care vrea să îl repete și găsește în carte un număr suficient de exerciții cu ajutorul cărora să-și atingă scopul. Problemele din partea de inițiere sunt însoțite doar de răspunsuri. Problemele din partea de consolidare sunt însoțite de indicații și răspunsuri, dar și de soluții detaliate acolo unde acest lucru se impune. Problemele din partea de evaluare nu au răspunsuri.

Capitolul al cincilea este rezervat testelor. Acestea au o structură specifică examenului de Bacalaureat. Testele sunt dispuse pe două categorii. Prima categorie este formată dintr-un set de 30 de teste propuse, după modelul subiectelor date la examenul de bacalaureat din ultimii ani și însoțite de rezolvări complete. Testele din a doua categorie sunt pentru autotestare și nu sunt însoțite de rezolvări.

Lucrarea poate fi folosită și pentru învățarea curentă, deoarece permite elevilor să se antreneze în condiții reale, de bacalaureat. Ea se poate dovedi un instrument util profesorilor și elevilor în vederea recapitulării materiei la finalul unui capitol sau la sfârșitul anului școlar.

Autorii

Teme recapitulative

Clasa a IX-a

1. Mulțimi și elemente de logică matematică

1.1. Noțiuni teoretice

1.1.1. Elemente de logică matematică

Definiție: Se numește **propoziție** un enunț despre care știm care este valoarea sa de adevăr.

Variabile	Operație	Notăție	Citire	Valoare de adevăr
p	Negația	$\neg p$	non p	Opusă propoziției p .
p, q	Conjuncția	$p \wedge q$	p și q	Este adevărată când propozițiile p și q sunt adevărate.
p, q	Disjuncția	$p \vee q$	p sau q	Este adevărată când cel puțin una dintre propoziții este adevărată.
p, q	Implicația	$p \rightarrow q$	p implică q	Este falsă când p este adevărată și q falsă.
p, q	Echivalența	$p \leftrightarrow q$	p echivalent cu q	Este adevărată când ambele au aceeași valoare de adevăr.

Definiție: Se numește **predicat** un enunț care depinde de una sau mai multe variabile și care se transformă în propoziție prin valori date variabilelor.

Variabile	Operație	Notăție	Citire	Observații
$p(x)$	Propoziția universală	$\forall x, p(x)$	Pentru orice x are loc $p(x)$.	Demonstrarea valorii de adevăr se face prin calcule cu caracter general și nu prin exemplu. Un exemplu poate fi suficient pentru a demonstra că această propoziție este falsă.

$p(x)$	Propoziția existențială	$\exists x, p(x)$	Există x astfel încât are loc $p(x)$.	Demonstrarea valorii de adevăr se realizează prin determinarea unui exemplu. Acesta poate fi chiar ghicit, dar trebuie verificat că este convenabil.
--------	-------------------------	-------------------	--	--

1.1.2. Tipuri speciale de raționament

Metoda reducerii la absurd: Pentru a demonstra o implicație de tipul $p \rightarrow q$, putem presupune concluzia p ca fiind falsă și apoi împreună cu ipoteza construim un raționament care conduce la contradicție.

Metoda inducției matematice: Se aplică pentru propoziții universale de forma $\forall n \geq n_0, p(n)$. Se verifică valoarea de adevăr a propoziției obținute în cazul $n = n_0$, se presupune ca fiind adevărată propoziția obținută în cazul $n = k$ și se demonstrează valoarea de adevăr a propoziției obținute pentru $n = k + 1$.

1.1.3. Mulțimi și cardinale

Relație sau operație	Notatie	Definiție
Incluziunea	$A \subset B$	$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$
Egalitatea	$A = B$	$A = B \Leftrightarrow A \subset B$ și $B \subset A$
Intersecția	$A \cap B$	$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
Reuniunea	$A \cup B$	$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
Diferența	$A \setminus B$	$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
Produsul cartezian	$A \times B$	$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$

Teoremă: Orice mulțime A cu n elemente, unde $n \in \mathbb{N}$, admite 2^n submulțimi.

Definiție: Pentru o mulțime finită A numim **cardinalul** său și notăm $\text{Card}(A)$ numărul său de elemente.

Proprietăți: Sunt adevărate următoarele proprietăți:

P1. $\text{Card}(A) = 0$ dacă și numai dacă $A = \emptyset$;

P2. Dacă $A \subset B$, atunci $\text{Card}(B - A) = \text{Card}(B) - \text{Card}(A)$;

P3. $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$;

P4. $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \cdot \text{Card}(B)$.

1.1.4. Mulțimea numerelor reale \mathbb{R}

Definiție: Numim **modulul** unui număr real x și notăm $|x|$ distanța de la originea axelor la poziția numărului pe axă.

Proprietățile modulului:

P1. $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$;

P2. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

P3. $|x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y$;

- P4.** $|x| < c, c > 0 \Leftrightarrow x \in (-c; c)$; **P5.** $|x| > c, c > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -c) \cup (c; \infty)$;
- P6.** $|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$ și $|E(x)| = \begin{cases} E(x), & \text{dacă } E(x) \geq 0 \\ -E(x), & \text{dacă } E(x) < 0 \end{cases}$, pentru orice expresie $E(x), x \in \mathbb{R}$;
- P7.** $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$; **P8.** $|x^n| = |x|^n, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}$;
- P9.** $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, \forall x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^*$; **P10.** $||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Definiție: Numim **parte întregă** a numărului real x și notăm $[x]$ cel mai mare număr întreg, mai mic sau egal cu x .

Proprietățile părții întregi: Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, au loc proprietățile:

- P1.** $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$; **P2.** $[x] = k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in [k, k + 1)$;
- P3.** $[m + x] = m + [x], \forall m \in \mathbb{Z}$; **P4.** $x - 1 < [x] \leq x < [x] + 1$.

Definiție: Numim **parte fracționară** a numărului real x și notăm $\{x\}$ diferența dintre număr și partea sa întregă.

Proprietățile părții fracționare: Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, au loc proprietățile:

- P1.** $\{x\} = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$; **P2.** $\{x\} \in [0, 1)$; **P3.** $\{m + x\} = \{x\}, \forall m \in \mathbb{Z}$.

1.2. Probleme de inițiere

- I1.** Determinați numărul de submulțimi ale mulțimii $A = \{a, b, c, d\}$.
- I2.** Determinați numărul de submulțimi nevide ale mulțimii $A = \{a, b, c, d, e\}$.
- I3.** Reuniunea a două mulțimi cu câte 20 de elemente fiecare are 30 de elemente. Determinați numărul de elemente comune ale celor două mulțimi.
- I4.** Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției: $p: (\sqrt{3} + 1)^2 + (\sqrt{3} - 1)^2 \in \mathbb{N}$.
- I5.** Fie propozițiile $p: 2 + 2 = 5$ și $q: 1 + 2 + 3 + \dots + 100 = 5050$. Precizați valoarea de adevăr a propoziției $p \vee q$.
- I6.** Determinați numerele reale a, b dacă avem egalitatea de intervale: $[a - b; a + b] = [1; 7]$.
- I7.** Fie $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Determinați numărul de elemente ale mulțimii: $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x = (n - 1) \cdot (n - 2)(n - 3) + 4, n \in A\}$.
- I8.** Determinați intersecția mulțimilor $A = (1, 5)$ și $B = [3, 11]$.
- I9.** Arătați că numărul $a = 2 \cdot [0, (3) + 0, 1(6)]$ este natural.
- I10.** Rezolvați în \mathbb{R} ecuația $|x - 2| = 5$.

Clasa a XII-a

1. Legi de compoziție

1.1. Noțiuni teoretice

1.1.1. Legi de compoziție

Fie G o mulțime nevidă și o lege „ $*$ ”. Legea „ $*$ ”:

- este **lege de compoziție** pe G dacă $x * y \in G$ pentru orice $x, y \in G$ (se mai spune că mulțimea G este **parte stabilă** în raport cu legea „ $*$ ”);
- este **comutativă** dacă $x * y = y * x$ pentru orice $x, y \in G$;
- este **asociativă** dacă $x * (y * z) = (x * y) * z$ pentru orice $x, y, z \in G$;
- admite **element neutru** dacă există un element $u \in G$, astfel încât $x * u = u * x = x$ pentru orice $x \in G$;
- este **simetrizabilă** dacă pentru orice $x \in G$ există un element $x' \in G$, astfel încât $x * x' = x' * x = u$.

Observație: Elementul x' se numește **simetricul** lui x în raport cu legea de compoziție „ $*$ ”.

Dacă G este finit, atunci putem scrie $G = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Toate rezultatele posibile pot fi trecute sub forma următorului tabel:

*	a_1	a_2	...	a_n
a_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
a_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
\vdots
a_n	a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nn}

unde $a_{ij} = a_i * a_j$. Se obține **tabla operației**. Proprietățile legii se pot deduce apoi din această tablă.

1.1.2. Mulțimea claselor de resturi

Se consideră mulțimea numerelor întregi \mathbb{Z} și $n \in \mathbb{N}^*$ fixat. Pentru orice $r \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, definim mulțimea:

$$\hat{r} = \{z \in \mathbb{Z} \mid \text{restul împărțirii lui } z \text{ la } n \text{ este egal cu } r\}.$$

Mulțimea $\mathbb{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \dots, \widehat{n-1}\}$ se numește mulțimea **claselor de resturi modulo n** .

Definim operațiile:

- $\hat{x} + \hat{y} = \hat{z}$, unde z este restul împărțirii numărului $x + y$ la n ;
- $\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{t}$, unde t este restul împărțirii numărului xy la n .

Proprietăți:

- adunarea din \mathbb{Z}_n este lege de compoziție asociativă și comutativă;
- adunarea admite element neutru elementul $\hat{0}$;
- orice element $\hat{x} \in \mathbb{Z}_n$ este **simetrizabil**, simetricul său fiind elementul $\widehat{n-x}$, care se mai notează $-\hat{x}$;
- înmulțirea din \mathbb{Z}_n este lege de compoziție comutativă, asociativă și distributivă în raport cu adunarea;
- înmulțirea admite element neutru elementul $\hat{1}$;
- evident, $\hat{0} \cdot \hat{x} = \hat{0}$ pentru orice $\hat{x} \in \mathbb{Z}_n$;
- dacă n este număr prim, atunci din $\hat{x}\hat{y} = \hat{0}$ obținem $\hat{x} = \hat{0}$ sau $\hat{y} = \hat{0}$; dacă n nu este prim, nu este adevărat întotdeauna (de exemplu, în \mathbb{Z}_6 avem $\hat{3} \cdot \hat{4} = \hat{0}$);
- un element \hat{x} este **inversabil** dacă există \hat{y} astfel încât $\hat{x}\hat{y} = \hat{1}$; atunci \hat{y} este inversul lui \hat{x} și se notează \hat{x}^{-1} ;
- un element \hat{x} este **inversabil** dacă și numai dacă numerele x și n admit divizor comun doar pe 1.

1.2. Probleme de inițiere

- Pe \mathbb{R} definim legea „ \circ ” prin $x \circ y = x + y - 3$. Calculați $4 \circ 9$.
- Pe \mathbb{R} definim legea „ \circ ” prin $x \circ y = x + y - 3$. Demonstrați că această lege este comutativă.
- Pe \mathbb{R} definim legea „ \circ ” prin $x \circ y = x + y - 3$. Demonstrați că această lege este asociativă.
- Pe \mathbb{R} definim legea „ \circ ” prin $x \circ y = x + y - 3$. Demonstrați că 3 este elementul neutru al acestei legi.
- Pe \mathbb{R} definim legea „ \circ ” prin $x \circ y = x + y - 3$. Știind că legea admite pe 3 ca element neutru, determinați simetricul elementului $x = 7$ în raport cu această lege.
- Pe \mathbb{R} definim legea „ \circ ” prin $x \circ y = x + y - 3$. Determinați valoarea numărului real x , pentru care $x \circ x \circ x = 21$.

- 17.** În \mathbb{Z}_6 , calculați $\hat{2} + \hat{5}$.
- 18.** În \mathbb{Z}_6 , calculați $\hat{2} \cdot \hat{5}$.
- 19.** Considerăm mulțimea $C = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$. Demonstrați că, oricare ar fi $X, Y \in C$, avem $X + Y \in C$.
- 110.** Considerăm mulțimea $C = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$. Demonstrați că, oricare ar fi $X, Y \in C$, avem $X \cdot Y \in C$.

1.3. Probleme de consolidare

- C1.** Se consideră operația „ \perp ” definită prin $x \perp y = x^y + y^x$, pentru orice $x, y \in (0, \infty)$. Calculați $2 \perp 3$.
- C2.** Pe \mathbb{R} definim operația „ $*$ ” prin $x * y = xy - 4x - 4y + 20$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Determinați $t \in \mathbb{R}$, știind că $t * t = 4$.
- C3.** Pe \mathbb{R} definim operația „ $*$ ” prin relația $x * y = xy - 2x - 2y + 6$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Demonstrați că $z * 3 = 3 * z = z$ pentru orice $z \in \mathbb{R}$.
- C4.** Se consideră mulțimea $A = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Demonstrați că, oricare ar fi $x, y \in A$, avem $x + y \in A$.
- C5.** Pe mulțimea $G = (-4, \infty)$ definim operația „ \circ ” prin $x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$, pentru orice $x, y \in G$. Demonstrați că, oricare ar fi $x, y \in G$, avem $x \circ y \in G$.
- C6.** Considerăm operația „ \bullet ” definită prin $x \bullet y = x + y - 6$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Demonstrați că $x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$.
- C7.** Demonstrați că operația „ $*$ ”, definită prin $x * y = xy + x + y$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, este asociativă.
- C8.** Se consideră mulțimea $M = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Demonstrați că mulțimea M este parte stabilă în raport cu înmulțirea numerelor întregi.
- C9.** Determinați elementul neutru al legii „ \perp ” definită prin $x \perp y = \sqrt{x^2 + y^2}$, pentru orice $x, y \in [0, \infty)$.
- C10.** Se consideră operația „ \perp ” definită prin $x \perp y = \frac{x+y}{2}$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Demonstrați că această operație este comutativă, dar nu este asociativă.

Teste pentru Bacalaureat, după modelul M.E.N.

1. Modele de teste rezolvate pentru examenul de Bacalaureat

Testul 1

Subiectul I

1. Demonstrați că numărul $a = \lg 30 + \lg 2 - \lg 6$ este natural.
2. Demonstrați că ecuația $(a^2 + 1)x^2 - 2x + 1 = 0$ nu admite rădăcini reale, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}^*$.
3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$.
Calculați $f\left(-\frac{1}{2}\right)f(-1)f(0)f(1)f\left(\frac{1}{2}\right)$.
4. Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulțimea $\{C_4^3, C_5^2, C_4^2\}$, acesta să fie divizibil cu 3.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, 4)$, $B(6, 8)$ și $C(8, 2)$. Calculați distanța de la C la mijlocul segmentului AB .
6. Calculați $(\cos 120^\circ + \cos 60^\circ)(\sin 135^\circ - \sin 45^\circ)$.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră sistemul de ecuații
$$\begin{cases} x + 2y - az = 3 \\ 2x - y - z = 1 \\ -x + 3y + z = 2 \end{cases}$$
, unde a este un parametru real.

Notăm cu A matricea sistemului.

Modele de teste rezolvate pentru examenul de Bacalaureat

- a) Demonstrați că tripletul $(-1, 2, -5)$ este soluție a sistemului în cazul $a = 0$.
 - b) Determinați determinantul matricei A .
 - c) Dacă $a \neq 0$, demonstrați că soluțiile sistemului nu depind de a .
- 2.** Se consideră mulțimea $H = \{\hat{0}, \hat{2}, \hat{4}, \hat{6}\} \subset \mathbb{Z}_8$.
- a) Demonstrați că mulțimea H este parte stabilă în raport cu adunarea din \mathbb{Z}_8 .
 - b) Determinați $x \in H$ cu proprietatea că $x^3 = \hat{0}$.
 - c) Calculați $\hat{0}^{2012} + \hat{2}^{2012} + \hat{4}^{2012} + \hat{6}^{2012}$.

Subiectul al III-lea

- 1.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x - x$.
- a) Calculați $f'(x)$.
 - b) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f .
 - c) Demonstrați că $\sqrt{e} \geq \frac{3}{2}$.
- 2.** Se consideră funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.
- a) Calculați $\int_1^4 \frac{f(x)}{\ln x} dx$.
 - b) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(x)$.
 - c) Demonstrați că $\int_{\frac{1}{e}}^1 f(x) dx \leq 0$.

Testul 2

Subiectul I

- 1.** Calculați $C_6^3 - A_4^2 + 3$.
- 2.** Rezolvați în \mathbb{R} ecuația $\log_3(x^2 - 16) = 2$.
- 3.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ pentru care $a_1 = 2$ și $a_5 = 18$. Calculați a_{2012} .
- 4.** După două scumpiri succesive cu 10% și apoi cu 20%, prețul final al unui produs este 1 320 de lei. Determinați prețul inițial.

5. În sistemul de coordonate carteziene xOy se consideră punctele $A(1, 1)$, $B(3, 2)$ și $C(m, 3)$. Determinați valoarea numărului real m , știind că punctele A , B și C sunt coliniare.
6. Demonstrați că $\sin^2 20^\circ + \sin^2 70^\circ = 1$.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ și $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- Demonstrați că $A^2 - 6A - I_2 = O_2$.
 - Demonstrați că matricea A este inversabilă și determinați inversa sa.
 - Demonstrați că $A^{2012} - 6A^{2011} - A^{2010} - A^4 + 6A^3 + A^2 = O_2$.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 3X^2 + 3X - a \in \mathbb{R}[X]$. Notăm cu x_1 , x_2 și x_3 rădăcinile sale.
- Determinați valoarea numărului real a , știind că $x_1 = 1$.
 - Demonstrați că $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 1)^2 = 0$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.
 - Determinați valoarea numărului real a , știind că polinomul f are toate rădăcinile reale.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(x+1)$.
- Demonstrați că $f'(x) = -\frac{x}{(x+1)^2}$, pentru orice $x \in [0, \infty)$.
 - Demonstrați că funcția f este strict descrescătoare.
 - Demonstrați că $\frac{x}{x+1} \leq \ln(x+1)$, pentru orice $x \in [0, \infty)$.
2. Se consideră funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2}$.
- Calculați $\int \left(f(x) - \frac{x+1}{x^2} \right) dx$.
 - Calculați $\int_1^2 f(x) dx$.
 - Folosind, eventual, inegalitatea $x^2 + 1 \geq 2x$, pentru orice $x \in (0, \infty)$, demonstrați că $\int_1^e f(x) dx \geq 3$.

Soluții

Clasa a IX-a

1. Mulțimi și elemente de logică matematică

I1.	I2.	I3.	I4.	I5.	I6.	I7.	I8.	I9.	I10.
16	31	10	A	A	(4, 3)	3	[3, 5)	$a=4$	-3 și 7

C1. $2^3 = 8$. **C2.** 31 nevide \Rightarrow 32 în total $\Rightarrow A$ are 5 elemente. **C3.** $2008 + 2008 - 1000 = 3016$. **C4.** $2^2 = 4$. **C5.** $P \wedge q$ e adevărată deoarece ambele propoziții sunt adevărate. **C6.** $2x + 1$ divide pe 6, deci $2x + 1 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\} \Rightarrow A = \{-2, -1, 0, 1\}$. **C7.** $4x - 2 < 2 < 2x + 6 \Rightarrow x \in (-2, 1)$. **C8.** $12 + 25 - 7 = 30 \Rightarrow$ 30 de elevi. **C9.** $A \setminus B = [2, 5) \Rightarrow$ numărul 4. **C10.** $A \cup B = (-2, 5)$, deci sunt 6 numere întregi. **C11.** Se obține $a < c < b$. **C12.** $x - 3 \mid 2 \Rightarrow x - 3 \in \{\pm 1, \pm 2\} \Rightarrow A = \{1, 2, 4, 5\}$. **C13.** $\frac{11}{9} = 1,2222\dots$, deci $P = 2^{10} = 1024$. **C14.** $\frac{13}{6} = 2,1666\dots$, deci nu apare niciodată. **C15.** $\frac{23}{15} = 1,53333\dots$, deci $S = 5 + 3 \cdot 2008 = 6029$. **C16.** $A - B = (-3, 1] \Rightarrow$ Cardinalul mulțimii $(A \setminus B) \cap \mathbb{Z}$ este 4. **C17.** $a = 7\sqrt{2} - 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$, $b = 9\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 18\sqrt{2}$, deci $\sqrt{ab} = \sqrt{18 \cdot 2} = 6$. **C18.** Avem $x + 4 = 1 - 2x$ și $x + 4 = 2x - 1$, de unde $x \in \{-1, 5\}$. **C19.** $|2 - \sqrt{5}| + |3 - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - 2 + 3 - \sqrt{5} = 1 \in \mathbb{N}$. **C20.** $3x - 2 = \pm 11 \Rightarrow x \in \left\{\frac{13}{3}, -3\right\}$. Dar $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = -3$. **C21.** Avem $\left[\frac{17}{5}\right] = 2$ și $\left\{\frac{11}{6}\right\} = \frac{5}{6}$, deci suma este $\frac{17}{6}$. **C22.** Avem $4 < a < 5$, deci $[a] = 4$. **C23.** $b = 5 + \sqrt{25} \in (10, 11) \Rightarrow [b] = 10$. **C24.** $A = |\sqrt{2} - 3| + |\sqrt{2} - 1| = 3 - \sqrt{2} + \sqrt{2} - 1 = 2 \in \mathbb{N}$. **C25.** $a = \frac{\sqrt{1} - \sqrt{2}}{1 - 2} + \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2 - 3} + \dots + \frac{\sqrt{99} - \sqrt{100}}{99 - 100} = \frac{\sqrt{1} - \sqrt{100}}{-1} = \frac{1 - 10}{-1} = 9 \in \mathbb{N}$. **C26.** Avem $\sqrt{3} + \sqrt{25} = 5 + \sqrt{3} \in (6, 7)$, deci $[\sqrt{3} + \sqrt{25}] = 6$. Apoi $\sqrt{4} + \sqrt{19} = 2 + \sqrt{19} \in (6, 7)$, deci $[\sqrt{4} + \sqrt{19}] = 6$. **C27.** Pentru pasul

Cuprins

<i>Cuvânt-înainte</i>	4
-----------------------------	---

Enunțuri Soluții

TEME RECAPITULATIVE

Clasa a IX-a

1. Mulțimi și elemente de logică matematică	5	214
2. Șiruri. Progresii	10	215
3. Funcții	15	216
4. Funcția de gradul I	21	217
5. Funcția și ecuația de gradul al II-lea	25	217
6. Vectori în plan	30	218
7. Elemente de trigonometrie și aplicații în geometrie	35	219

Clasa a X-a

1. Numere reale	41	221
2. Funcții și ecuații	44	222
3. Probleme de numărare și combinatorică	52	223
4. Matematici aplicate. Probabilități	55	223
5. Geometrie analitică	60	224
6. Numere complexe*	65	225

Clasa a XI-a

1. Matrice	69	226
2. Determinanți	76	227
3. Aplicații ale determinanților în geometrie	81	227
4. Inversa unei matrice. Ecuații matriceale	84	228
5. Sisteme de ecuații liniare	89	229
6. Probleme de sinteză – algebră	95	230
7. Limite de funcții. Asimptote	99	233
8. Funcții continue	104	233
9. Derivata unei funcții	109	234
10. Rolul derivatelor de ordinul I și de ordinul al II-lea în studiul funcțiilor	116	235
11. Probleme de sinteză – analiză matematică	120	236

Clasa a XII-a

1. Legi de compoziție.....	123.....	238
2. Structuri algebrice. Morfisme	128.....	238
3. Polinoame	133.....	239
4. Probleme de sinteză – algebră.....	140.....	239
5. Primitive.....	143.....	241
6. Integrala definită	149.....	242
7. Aplicații ale integralei definite.....	153.....	243
8. Probleme de sinteză – analiză matematică.....	158.....	244

TESTE PENTRU BACALAUREAT, DUPĂ MODELUL M.E.N.

1. MODELE DE TESTE REZOLVATE

PENTRU EXAMENUL DE BACALAUREAT	163.....	246
---	-----------------	------------

2. MODELE DE TESTE PROPUSE

PENTRU EXAMENUL DE BACALAUREAT	201
---	------------

<i>Bibliografie</i>	<i>269</i>
---------------------------	------------