

Ion TUDOR

matematică

algebră, geometrie

- Modalități de lucru diferențiate
- Pregătire suplimentară prin planuri individualizate

Caiet de lucru

Partea a II-a

8

Ediția a V-a,
revizuită



Editura Paralela 45

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.C. nr. 6250/21.12.2020.

Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programul școlar în vigoare pentru clasa a VIII-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Referință științifică: Lucrarea a fost definitivată prin contribuția și recomandările Comisiei științifice și metodice a publicațiilor Societății de Științe Matematice din România. Aceasta și-a dat avizul favorabil în ceea ce privește alcătuirea și conținutul matematic.

Redactare: Iuliana Ene
Tehnoredactare: Carmen Rădulescu
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
TUDOR, ION

Matematică : algebră, geometrie : modalități de lucru diferențiate, pregătire suplimentară prin planuri individualizate : caiet de lucru : clasa 8 / Ion Tudor. - Ed. a 5-a, rev.. - Pitești : Paralela 45, 2021

2 vol.

ISBN 978-973-47-3419-1

Partea 2. - 2021. - ISBN 978-973-47-3421-4

51

COMENZI – CARTEA PRIN POȘTĂ

EDITURA PARALELA 45
Bulevardul Republicii, Nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești,
jud. Argeș, cod 110177
Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918
Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492
E-mail: comenzi@edituraparelela45.ro
sau accesați www.edituraparelela45.ro

Tiparul executat la tipografia *Editurii Paralela 45*

E-mail: tipografie@edituraparelela45.ro

Copyright © Editura Paralela 45, 2021

Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate,
iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.

www.edituraparelela45.ro

ALGEBRĂ

Capitolul II

CALCUL ALGEBRIC ÎN \mathbb{R}

Lecția 1. Adunarea și scăderea fracțiilor algebrice



Citesc și rețin

Adunarea și scăderea fracțiilor algebrice se efectuează la fel ca adunarea și scăderea fracțiilor ordinare.

1. $\frac{A(x)}{B(x)} \pm \frac{C(x)}{B(x)} = \frac{A(x) \pm C(x)}{B(x)}$, $B(x) \neq 0$.

2. $\frac{A(x)}{B(x)} \pm \frac{C(x)}{D(x)}$, $B(x) \neq 0$, $D(x) \neq 0$, se efectuează astfel:

– se aduc la același numitor comun fracțiile algebrice $\frac{A(x)}{B(x)}$ și $\frac{C(x)}{D(x)}$;

– cu fracțiile aduse la același numitor comun se efectuează adunarea (scăderea) ca la punctul 1.

Observație: Proprietățile adunării fracțiilor ordinare se transferă și la adunarea fracțiilor algebrice.



Cum se aplică?

1. Calculați:

a) $\frac{x-1}{4x} + \frac{3x-5}{4x}$;

b) $\frac{3x^2+1}{6x^2} - \frac{x+2}{2x}$.

Soluție:

a) $\frac{x-1}{4x} + \frac{3x-5}{4x} = \frac{x-1+3x-5}{4x} = \frac{4x-6}{4x} = \frac{2(2x-3)}{4x} = \frac{2x-3}{2x}$;

b) $\frac{3x^2+1}{6x^2} - \frac{x+2}{2x} = \frac{3x^2+1}{6x^2} - \frac{3x(x+2)}{6x^2} = \frac{3x^2+1}{6x^2} - \frac{3x^2+6x}{6x^2} = \frac{3x^2+1-(3x^2+6x)}{6x^2} =$
 $= \frac{3x^2+1-3x^2-6x}{6x^2} = \frac{1-6x}{6x^2}$.

7. Calculați:

a) $\frac{4-3x^2}{x^2-2x} + \frac{3x-1}{x-2}$;

b) $\frac{4x+1}{4x-4} + \frac{2-3x^2}{3x^2-3x}$;

c) $\frac{6x-5}{4x+2} + \frac{7-3x^3}{2x^3+x^2}$.

8. Calculați:

a) $\frac{6x^2+1}{4x^2} - \frac{6x+3}{4x+2}$;

b) $\frac{4x-1}{8x^2} - \frac{3x-1}{6x^2+2x}$;

c) $\frac{3x-7}{9x^2-3x} - \frac{2x-5}{6x^2}$.

9. Calculați:

a) $\frac{5x^2-2x^3}{x^5} - \frac{4x-x^2}{x^4} + \frac{x+4}{x^3}$;

b) $\frac{2-x}{x^2} + \frac{x^2-5x}{x^3} - \frac{7x-3x^2}{x^4}$.

10. Calculați:

a) $\frac{x^2+2}{6x^2-4x} - \frac{x-5}{9x-6} + \frac{x-1}{3x}$;

b) $\frac{x-4}{6x-3} - \frac{x-2}{6x} + \frac{x^2+2x}{8x^2-4x}$.

11. Calculați:

a) $\frac{x}{x^2-6x+9} - \frac{x+3}{x^2-3x}$;

b) $\frac{2-x}{x^2+2x} + \frac{x}{x^2+4x+4}$;

c) $\frac{3x-1}{3x^2+x} - \frac{9x}{9x^2+6x+1}$;

d) $\frac{1-2x}{2x^2+x} + \frac{4x}{4x^2+4x+1}$.

12. Calculați:

a) $\frac{3x}{x+2} + \frac{6x+4}{x^2-4} - \frac{2x}{x-2}$;

b) $\frac{9-15x}{x^2-9} + \frac{4x}{x-3} - \frac{3x}{x+3}$;

c) $\frac{4x}{x-5} - \frac{4x^2+10x}{x^2-25} + \frac{x}{x+5}$;

d) $\frac{3x}{2x+1} + \frac{x-2}{1-2x} - \frac{4x+1}{4x^2-1}$.

13. Calculați:

a) $\frac{4x+8}{x^2-9} - \frac{x+1}{x^2+3x} - \frac{3x}{x^2-3x}$;

b) $\frac{1-x}{x^2+2x} + \frac{x-3}{2x-x^2} + \frac{2x}{x^2-4}$.

14. Aduceți la forma cea mai simplă expresiile:

a) $E(x) = \frac{x+1}{4x^2-1} - \frac{x^2+2}{2x^3+x^2} + \frac{x+5}{x^2-2x^3}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}$;

b) $E(x) = \frac{x^3+4}{3x^4-2x^3} + \frac{6x-1}{4-9x^2} + \frac{x^3-1}{3x^4+2x^3}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}\right\}$.

15. Aduceți la forma cea mai simplă expresiile:

a) $E(x) = \frac{13x}{x^2-6x+9} - \frac{x-1}{x^2-9} + \frac{2x}{x+3}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$;

b) $E(x) = \frac{15x}{x^2+4x+4} + \frac{x+1}{x^2-4} - \frac{4x}{x-2}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

Capitolul III

FUNȚII

Lecția 7. Noțiunea de funcție. Funcții definite pe mulțimi finite



Citesc și rețin

Definiție: Fie A și B două mulțimi nevide. O lege (un procedeu) f prin care se asociază fiecărui element din A un singur element din B se numește **funcție** definită pe mulțimea A cu valori în mulțimea B .

Notăm $f : A \rightarrow B$ și citim „funcția f este definită pe mulțimea A cu valori în mulțimea B ”.

Mulțimea A se numește **domeniul de definiție** al funcției, mulțimea B se numește **codomeniul** sau **domeniul de valori** al funcției, iar legea (procedeul) f se numește **legea de corespondență** a funcției.

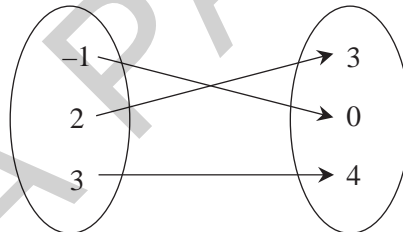
Dacă $x \in A$, elementul $f(x) \in B$ se numește **imaginea lui x prin funcția f** sau **valoarea funcției f în punctul x** .

Moduri de definire a unei funcții

O funcție poate fi definită:

1. printr-o diagramă

Exemplu:



2. printr-un tabel

Exemplu:

x	-1	2	3
$f(x)$	0	3	4

3. printr-o formulă analitică

Exemplu:

$$f: \{-1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 3, 4\}, f(x) = x + 1$$

Definiție: Fie $f : A \rightarrow B$ o funcție. Mulțimea $\text{Im } f = \{f(x) \mid x \in A\}$ se numește **imaginea funcției f** sau **mulțimea valorilor funcției f** . $\text{Im } f \subset B$.

Definiție: Fie $f : A \rightarrow B$ o funcție. Dacă $A \subset \mathbb{R}$ și $B \subset \mathbb{R}$, atunci funcția f se numește **funcție numerică**.

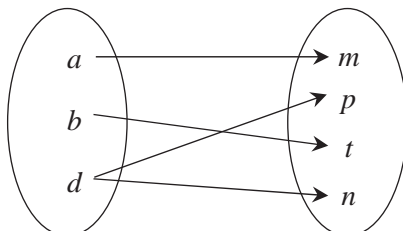
Definiție: Două funcții $f : A \rightarrow B$ și $g : C \rightarrow D$ se numesc **egale** dacă $A = C$, $B = D$ și $f(x) = g(x)$, oricare ar fi $x \in A$.

Notăm $f = g$ și citim „funcțiile f și g sunt egale”.



Cum se aplică?

1. Stabiliți dacă diagrama următoare definește o funcție.



Soluție:

Diagrama nu definește o funcție, deoarece elementul d din domeniul de definiție are două imagini, p și n .

2. Se consideră funcția $f : \{-2, -1, 0, 2\} \rightarrow \{0, 1, 2, 4\}$, $f(x) = x^2$. Determinați mulțimea $\text{Im } f$.

Soluție:

Calculăm imaginile elementelor din domeniul de definiție: $f(-2) = 4$, $f(-1) = 1$, $f(0) = 0$, $f(2) = 4$, prin urmare $\text{Im } f = \{0, 1, 4\}$.

3. Se consideră funcția $g : \{-6, -4, 0, 4, 6\} \rightarrow A$, $g(x) = \frac{x}{2} + 5$.

a) Calculați media aritmetică a numerelor $g(-4)$ și $g(4)$.

b) Calculați media geometrică a numerelor $g(-6)$ și $g(6)$.

Soluție:

$$\text{a) } g(-4) = -\frac{4}{2} + 5 = 3 \text{ și } g(4) = \frac{4}{2} + 5 = 7; m_a = \frac{g(-4) + g(4)}{2} = \frac{3+7}{2} = \frac{10}{2} = 5;$$

$$\text{b) } g(-6) = -\frac{6}{2} + 5 = 2 \text{ și } g(6) = \frac{6}{2} + 5 = 8; m_g = \sqrt{g(-6) \cdot g(6)} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4.$$



Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Citiți următoarele funcții:

a) $f : E \rightarrow F, f(x) = 10x$;

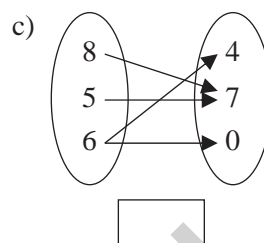
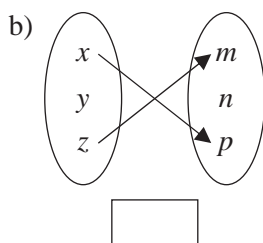
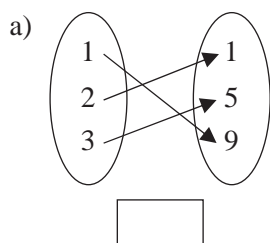
b) $g : \{-1, 1, 2\} \rightarrow \{1, 4\}, g(x) = x^2$;

c) $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = |x|$.

2. Se consideră funcția $f : A \rightarrow B, f(x) = 5x$. Numiți:

a) domeniul de definiție; b) domeniul de valori; c) legea de corespondență.

3. Verificați dacă următoarele diagrame reprezintă funcții, completând caseta cu răspunsul corespunzător „Da” sau „Nu”. Justificați răspunsul.



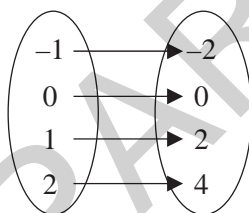
4. Se consideră funcția $f: A \rightarrow B$, definită prin tabelul următor:

x	1	2	3	5
$f(x)$	2	3	4	6

Completați spațiul punctat cu:

- a) mulțimea care reprezintă domeniul de definiție al funcției;
- b) mulțimea care reprezintă domeniul de valori al funcției;
- c) legea de corespondență (exprimată printr-o formulă) a funcției.

5. Se consideră funcția $f: E \rightarrow F$, definită prin diagrama următoare:



Completați spațiul punctat cu:

- a) mulțimea care reprezintă domeniul de definiție al funcției;
- b) mulțimea care reprezintă domeniul de valori al funcției;
- c) legea de corespondență (exprimată printr-o formulă) a funcției.

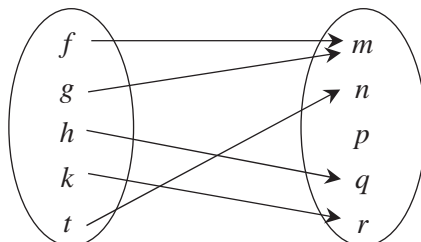
6. Se consideră funcția $f: A \rightarrow B$, definită prin tabelul următor:

x	-2	1	2	3	7
$f(x)$	-3	0	1	2	6

Completați spațiul punctat cu valoarea funcției f în punctul:

- a) 1;
- b) 7;
- c) -2;
- d) 3;
- e) 2.

7. Se consideră funcția $s: E \rightarrow F$, definită prin diagrama următoare:



Completați spațiul punctat cu imaginea prin funcția s a elementului:

a) f ; b) k ; c) t ; d) g ; e) h

8. Se consideră funcția $h : \{13, 17, 24, 33, 91\} \rightarrow \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, unde legea de corespondență asociază fiecărui număr din domeniul de definiție produsul cifrelor sale. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $h(13) = 3$; b) $h(24) = 6$; c) $h(17) = 7$;

d) $h(33) = 3$; e) $h(91) = 9$; f) $h(24) = 8$.

9. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5x - 2$. Calculați oral:

a) $f(4) = \dots\dots\dots$; b) $f(6) = \dots\dots\dots$; c) $f(0) = \dots\dots\dots$; d) $f(-3) = \dots\dots\dots$.

Exerciții și probleme de dificultate medie

10. Stabiliți care dintre următoarele notații reprezintă o funcție:

a) $f : \{-1, 2, 3\} \rightarrow \{-3, 6, 9\}$, $f(x) = 3x$; b) $g : \{-2, 1, 2\} \rightarrow \{-1, 1, 4\}$, $g(x) = x^2$;

c) $h : \{-1, 0, 1\} \rightarrow \{-1, 0, 3\}$, $h(x) = x^3$; d) $s : \{-4, 5\} \rightarrow \{-5, 0, 1, 4\}$, $s(x) = -x$.

11. Arătați că $f : \{201, 365, 402\} \rightarrow \{2, 3, 4, 5, 9\}$, unde legea de corespondență asociază fiecărui număr din domeniul de definiție divizorul său din domeniul de valori, nu este o funcție.

12. Se consideră funcția $f : \{-3, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow A$. Determinați $\text{Im } f$ pentru legea de corespondență:

a) $f(x) = 3x + 1$; b) $f(x) = 2x - 3$; c) $f(x) = -7x + 4$.

13. Se consideră funcția $f : \left\{4, 25, 36, \frac{49}{16}, \frac{64}{81}\right\} \rightarrow A$, $f(x) = \sqrt{x}$. Determinați $\text{Im } f$.

14. Se consideră funcția $f : \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} \rightarrow A$, $f(x) = 3^x$. Determinați $\text{Im } f$.

15. Se consideră funcția $g : \{-2, 0, 4\} \rightarrow A$. Determinați $\text{Im } g$ în fiecare dintre cazurile:

a) $g(x) = \frac{x}{2} + 7$; b) $g(x) = \frac{x}{4} - \frac{1}{2}$; c) $g(x) = 1 - \frac{3x}{2}$.

16. Se consideră funcția $h : \{-\sqrt{2}, 0, 3\sqrt{2}\} \rightarrow E$. Determinați $\text{Im } h$, dacă:

a) $h(x) = \sqrt{2}x + 5$; b) $h(x) = \sqrt{2}x - 4$; c) $h(x) = 1 - \sqrt{2}x$.

17. Se consideră funcția $f : \{-9, -7, -4, -2, -1\} \rightarrow E$, $f(x) = -2x + 7$. Calculați:

a) media aritmetică a numerelor $f(-2)$ și $f(-7)$;

b) media geometrică a numerelor $f(-1)$ și $f(-9)$.

18. Se consideră funcția $h : \{\sqrt{6}, 2\sqrt{6}, 3\sqrt{6}\} \rightarrow A$, $h(x) = \sqrt{3}x - \sqrt{2}$. Calculați media aritmetică și media geometrică ale numerelor $h(\sqrt{6})$ și $h(3\sqrt{6})$.

19. a) Se consideră funcțiile $f : \{-1, 0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$, $f(x) = x^2$ și $g : \{-1, 0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$, $g(x) = |x|$. Arătați că $f = g$.

Cuprins

ALGEBRĂ

CAPITOLUL II. CALCUL ALGEBRIC ÎN \mathbb{R}

Lecția 1. Adunarea și scăderea fracțiilor algebrice.....	5
Lecția 2. Înmulțirea fracțiilor algebrice.....	9
Lecția 3. Împărțirea fracțiilor algebrice.....	13
Lecția 4. Ridicarea la putere cu exponent natural a fracțiilor algebrice	17
Lecția 5. Ordinea efectuării operațiilor cu fracții algebrice și folosirea parantezelor.....	20
Lecția 6. Ecuatii de forma $ax^2 + bx + c = 0$, $x, a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$	27
<i>Teste de evaluare sumativă</i>	32
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	34

CAPITOLUL III. FUNCȚII

Lecția 7. Noțiunea de funcție. Funcții definite pe mulțimi finite	37
Lecția 8. Graficul unei funcții. Reprezentarea geometrică a graficului unor funcții numerice	42
Lecția 9. Funcții de forma $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Interpretare geometrică. Lecturi grafice	47
Lecția 10. Funcții de forma $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ și $D \subset \mathbb{R}$. Interpretare geometrică. Lecturi grafice	53
Lecția 11. Elemente de statistică	56
<i>Teste de evaluare sumativă</i>	60
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	61
<i>Probleme din realitatea cotidiană</i>	63

GEOMETRIE

CAPITOLUL I. ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAȚIU

Lecția 1. Proiecții de puncte, de segmente și de drepte	66
Lecția 2. Unghiul dintre o dreaptă și un plan. Lungimea proiecției unui segment	70
Lecția 3. Teorema celor trei perpendiculare. Calculul distanței de la un punct la o dreaptă	74
Lecția 4. Unghi plan corespunzător diedrului. Unghiul dintre două plane.....	79
Lecția 5. Plane perpendiculare	84
<i>Teste de evaluare sumativă</i>	88
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	89

CAPITOLUL II. ARII ȘI VOLUME ALE UNOR CORPURI GEOMETRICE

II.1. POLIEDRE

Lecția 6. Prisma regulată.....	91
Lecția 7. Paralelipipedul dreptunghic.....	98
Lecția 8. Cubul.....	103
<i>Teste de evaluare sumativă</i>	107
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	108

Lecția 9. Piramida regulată.....	110
Lecția 10. Trunchiul de piramidă regulată	118
Teste de evaluare sumativă	125
Fișă pentru portofoliul elevului.....	127
II.2. CORPURI ROTUNDE	
Lecția 11. Cilindrul circular drept	129
Lecția 12. Conul circular drept.....	133
Lecția 13. Trunchiul de con circular drept	138
Lecția 14. Sfera	143
Teste de evaluare sumativă	148
Fișă pentru portofoliul elevului.....	149
Probleme din realitatea cotidiană.....	151
MODELE DE TEZE PENTRU SEMESTRUL AL II-LEA	155
TESTE DE EVALUARE FINALĂ.....	158
MODELE DE TESTE PENTRU EVALUAREA NAȚIONALĂ	161
INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI.....	188