LUCIAN DRAGOMIR

ADRIANA DRAGOMIR

OVIDIU BĂDESCU

PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU CLASA a IX-a

consolidare

Ediţia a VI-a

ÎNVĂȚARE DE CONSOLIDARE®
antrenament

Prefaţă

Această lucrare a fost scrisă cu suflet şi trudă, din dorinţa de a oferi tuturor elevilor de clasa a IX-a (şi nu numai) o colecţie de probleme şi exerciţii utile. Acestea au constituit în ultimii 25 de ani subiecte la lucrări scrise, chestiuni mai simple sau un pic mai problematice în încercările la tablă, toate propuse elevilor lor de către autori; pe lângă acestea, au fost inserate probleme relevante, sperăm, de la diverse concursuri şi examene. În mare măsură, cartea este de fapt o culegere de autor, asemenea multora pe care le au unii dintre colegi în geantă, prin dosare şi caiete muncite cu atâtea generaţii.

Majoritatea problemelor au răspunsuri sau idei ori chiar soluţii detaliate, unde am crezut că este cazul. Invităm elevii să consulte rezolvările, evident, după ce au încercat singuri lupta cu chestiunile propuse; aceasta pentru verificare sau pentru a găsi noi idei.

Revenind la resorturile intime care au dus la redactarea acestei lucrări, credem că nu greşim dacă reamintim tuturor că, aproape zilnic, trebuie să „rezolvăm o problemă", să luăm cel puţin o decizie. A găsi soluţia, calea cea bună, înseamnă a gândi. Matematica şcolară ar trebui astfel, în primul rând, să înveţe tinerii să gândească. Nu în ultimul rând, frumuseţea raţionamentului matematic, tehnicile specifice de lucru ar trebui să deschidă larg poarta spre diverse domenii ale ştiinţei, spre artă şi viaţa cotidiană. Elevii, şi nu numai ei, trebuie să simtă că matematica şi comorile ei le sunt şi le vor fi utile azi şi mai ales mâine; evident, asta nu e deloc uşor realizabil, mai ales că, faţă de alte discipline, matematica este, vrem, nu vrem, mai abstractă. Am încercat totuşi să păstrăm un echilibru între noţiuni şi aplicaţii, din dorinţa şi necesitatea de a prezenta, pe cât posibil, o matematică mai atractivă. Apropierea orelor de matematică de tot ceea ce ne înconjoară, de viaţa de zi cu zi, nu credem că e posibilă în permananță; poate e mai important să facem orele plăcute şi atractive prin atmosfera creată, prin căldura transmisă, prin cultivarea dialogului, prin crearea unor situaţii afective pozitive.

Este posibil să fim criticaţi pentru că ponderea exerciţiilor cu grad sporit de dificultate este prea mare. Trebuie să subliniem că prezenta culegere se adresează tuturor elevilor de clasa a IX-a, indiferent de profil şi filieră. Nivelul de aptitudini, cunoştinţe şi tehnici diferă de la o clasă la alta, de la un colectiv la altul; credem că rolul profesorului este şi acela de a selecta ceea ce este potrivit pentru elevii săi, fără improvizaţii, pregătind cu atenţie şi rigoare orice lecţie.

Mulţumim tuturor colegilor şi prietenilor care, într-un fel sau altul, ne-au ajutat şi susţinut în timp în demersul personal didactic şi, nu în ultimul rând, elevilor noştri, care au întrebat, au rezolvat, au corectat, au sugerat.

O menţiune specială merită totuşi Diana Băilă, Lorena Krokoş şi Cristian Pop, trei dintre elevii care au ajutat, din suflet şi cu pricepere, la redactarea acestei colecţii matematice.

Evident, ca orice încercare omenească, această carte este perfectibilă. Aşteptăm, aşadar, sugestii, observaţii, comentarii binevoitoare.

AUTORII

CAPITOLUL I. MULŢIMI ŞI ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ

1.1. Mulţimea numerelor reale

Breviar teoretic

Formule de calcul prescurtat

- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
- $a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$
- $a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$
- $a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + b^{n-1}\right),\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$
- $a^n + b^n = (a+b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + ... + b^{n-1}\right),\ \forall n \in 2\mathbb{N} + 1$
- $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)\left(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac\right)$ sau
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)\dfrac{1}{2}\cdot\left((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right);$
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)\left((a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ac)\right);$
- $a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)^3 - 3(a+b)(b+c)(c+a).$

Modulul (sau valoarea absolută a) unui număr real *x*

$|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$ şi $|E(x)| = \begin{cases} E(x), & \text{dacă } E(x) \geq 0 \\ -E(x), & \text{dacă } E(x) < 0 \end{cases}$, pentru orice expresie $E(x),\ x \in \mathbb{R}$.

Proprietăţi ale modulului

- $|x| \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R};$
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$
- $|x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y;$

- $|x| < c,\ c > 0 \Leftrightarrow x \in (-c;c)$;
- $|x| > c,\ c > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;-c) \cup (c;\infty)$;
- $\left||x|-|y|\right| \le |x \pm y| \le |x|+|y|$;
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;
- $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|},\ y \ne 0$;
- $\min(a,b) = \dfrac{a+b-|a-b|}{2}$ şi $\max(a,b) = \dfrac{a+b+|a-b|}{2}$.

Partea întreagă a unui număr real x este cel mai mic număr întreg cel mult egal cu numărul x şi se notează $[x]$. **Partea fracţionară a lui *x*:** se notează $\{x\}$ şi $\{x\} = x - [x]$.

Proprietăţi

- $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$;
- $\{x\} = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$;
- $[m+x] = m + [x],\ \forall m \in \mathbb{Z}$;
- $\{m+x\} = \{x\},\ \forall m \in \mathbb{Z}$;
- $x - 1 < [x] \le x < [x] + 1$;
- $[x] + \left[x + \dfrac{1}{n}\right] + \ldots + \left[x + \dfrac{n-1}{n}\right] = [nx],\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \ge 2$ **(Hermite)**.

Inegalităţi remarcabile

- Dacă $a \cdot b > 0$, atunci $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \ge 2$.
- $x \cdot y \le \dfrac{(x+y)^2}{4}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$;
- $x^2 + y^2 + z^2 \ge xy + yz + zx$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$;
- $3 \cdot (xy + yx + zx) \le (x+y+z)^2 \le 3 \cdot \left(x^2 + y^2 + z^2\right)$.

Inegalitatea mediilor

(adevărată pentru numere strict pozitive)

$\min(a_k) \le m_h \le m_g \le m_a \le m_p \le \max(a_k)$, unde

CAPITOLUL II. FUNCŢII

2.1. Şiruri

Breviar teoretic

- Un şir $(a_n)_{n\geq 1}$ de numere reale este **mărginit** dacă există $m, M \in \mathbb{R}$ astfel încât $m \leq a_n \leq M,\ \forall n \geq 1$ sau dacă există $M > 0$ astfel încât $|a_n| \leq M,\ \forall n \geq 1$.
- Un şir $(a_n)_{n\geq 1}$ de numere reale este **crescător** dacă $a_n \leq a_{n+1},\ \forall n \geq 1$. Dacă $a_n \geq a_{n+1},\ \forall n \geq 1,$ atunci şirul este **descrescător**.

Exerciţii şi probleme de consolidare

1. Găsiţi un procedeu logic pentru a continua şirurile de mai jos şi scrieţi astfel următorii trei termeni:

a) 2, 4, 6, 8, 10,...
b) 1, 3, 5, 7, 9,...
c) $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11},...$
d) 1, 2, 3, 5, 8,...
e) 1, 5, 9, 13, 17,...
f) $\frac{1}{4}, -\frac{2}{7}, \frac{3}{10}, -\frac{4}{13}, \frac{5}{16},...$

2. Se consideră şirul definit prin termenul general $x_n = 4n - 1,\ n \geq 1$.
a) Scrieţi primii patru termeni ai şirului;
b) Precizaţi termenul de rang 10;
c) Determinaţi al câtelea termen al şirului este egal cu 151;
d) Stabiliţi care dintre elementele mulţimii $\{69,\ 79,\ 89\}$ sunt termeni ai şirului;
e) Arătaţi că diferenţa $x_{n+1} - x_n$ are, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, semn constant;
f) Arătaţi că numărul $\frac{x_{10} + x_{12}}{2}$ este termen al şirului considerat.

3. Se consideră şirul definit prin termenul general $x_n = 5n - 3,\ n \geq 1$.
a) Scrieţi primii cinci termeni ai şirului;
b) Precizaţi al zecelea termen;
c) Determinaţi care dintre următoarele numere sunt termeni ai şirului: 46, 57, 68;
d) Arătaţi că diferenţa $x_{n+1} - x_n$ are, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, semn constant;
e) Arătaţi că niciun termen al şirului nu este pătrat perfect;
f) Arătaţi că numărul $\frac{x_{19} + x_{21}}{2}$ este termen al şirului considerat.

Cuprins