

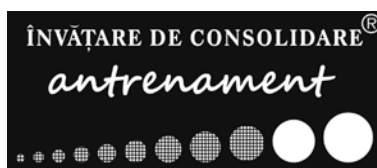
LUCIAN DRAGOMIR

ADRIANA DRAGOMIR

OVIDIU BĂDESCU

**PROBLEME DE MATEMATICĂ
PENTRU
CLASA a X-a
consolidare**

Ediția a V-a



Prefață

Această nouă lucrare este continuarea firească a celei pentru clasa a IX-a; și aceasta a fost scrisă cu suflet și trudă, din dorința de a oferi tuturor elevilor de clasa a X-a (și nu numai) o colecție de probleme și exerciții utile. Acestea au constituit în ultimii 24 de ani subiecte la lucrări scrise, chestiuni mai simple sau un pic mai problematice în încercările la tablă, toate propuse elevilor lor de către autori; pe lângă acestea, au fost inserate probleme relevante, sperăm, de la diverse concursuri și examene. În mare măsură, cartea este de fapt o culegere de autor, asemenea multora pe care le au unii dintre colegi în geantă, prin dosare și caiete muncite cu atâtea generații.

Majoritatea problemelor au răspunsuri sau idei ori chiar soluții detaliate, unde am considerat că este cazul. Invităm elevii să consulte rezolvările, evident, după ce au încercat singuri lupta cu chestiunile propuse; aceasta pentru verificare sau pentru a găsi noi idei.

Revenind la resorturile intime care au dus la redactarea acestei lucrări, credem că nu greșim dacă reamintim tuturor că, aproape zilnic, trebuie să „rezolvăm o problemă”, să luăm cel puțin o decizie. A găsi soluția, calea cea bună, înseamnă a gândi. Matematica școlară ar trebui astfel, în primul rând, să învețe tinerii să gândească. Nu în ultimul rând, frumusețea raționamentului matematic, tehnicile specifice de lucru ar trebui să deschidă larg poarta spre diverse domenii ale științei, spre artă și viața cotidiană. Elevii, și nu numai ei, trebuie să simtă că matematica și comorile ei le sunt și le vor fi utile azi și mai ales mâine; evident, asta nu e deloc ușor realizabil, mai ales că, față de alte discipline, matematica este, vrem, nu vrem, mai abstractă. Am încercat totuși să păstrăm un echilibru între noțiuni și aplicații, din dorința și necesitatea de a prezenta, pe cât posibil, o matematică mai atractivă. Aproximarea orelor de matematică de tot ceea ce ne înconjoară, de viața de zi cu zi, nu credem că e posibilă în permanență; poate e mai important să facem orele plăcute și atractive prin atmosfera creată, prin căldura transmisă, prin cultivarea dialogului, prin crearea unor situații afectiv pozitive.

Este posibil să fim criticați, din nou, pentru că ponderea exercițiilor cu grad sporit de dificultate este prea mare. Trebuie să subliniem că prezenta culegere se adresează tuturor elevilor de clasa a X-a, indiferent de profil și filieră. Nivelul de aptitudini, cunoștințe și tehnici diferă de la o clasă la alta, de la un colectiv la altul; credem că rolul profesorului este și acela de a selecta ceea ce este potrivit pentru elevii săi, fără improvizații, pregătind cu atenție și rigoare orice lecție.

Mulțumim tuturor colegilor și prietenilor care, într-un fel sau altul, ne-au ajutat și susținut în timp în demersul personal didactic și, nu în ultimul rând, elevilor noștri, care au întrebat, au rezolvat, au corectat, au sugerat.

O mențiune specială merită totuși Alina Adam, Diana Băilă, Lorena Krocoș și Cristian Pop, patru dintre elevii care au ajutat, din suflet și cu pricepere, la redactarea acestei colecții matematice.

Evident, ca orice încercare omenească, această carte este perfectibilă. Așteptăm, așadar, sugestii, observații, comentarii binevoitoare.

AUTORII

CAPITOLUL I. NUMERE REALE

1.1. Puteri și radicali

Breviar teoretic

- **Ridicarea la putere naturală a numerelor reale**

Dacă $a \in \mathbb{R}^*$ și $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ factori}}$, iar $a^0 = 1$

(chestiuni cunoscute de fapt din clasele anterioare)

- **Puteri cu exponent întreg:** $c^{-n} = \frac{1}{c^n}$, $c \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$.

- **Puteri cu exponent rațional:**

Dacă $a > 0$, $r = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, atunci $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

- **Proprietăți ale puterilor cu exponent rațional:** Dacă $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $x, y \in \mathbb{Q}$, atunci:

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

4) $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$

2) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

3) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

6) $a^0 = 1$.

- **Proprietăți ale radicalilor:**

Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, iar $n, k \in (2\mathbb{N}+1)$ sau $a, b \in (0, +\infty)$ și $k, n \in \mathbb{N}$, atunci:

1) $\sqrt[n]{a^n} = a$

4) $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$

2) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

5) $\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nk]{a}$

3) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$

6) $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a < b$

Exerciții și probleme de consolidare

1. Stabiliți, în fiecare dintre cazurile următoare, care dintre numerele a , b și c este cel mai mic și care este cel mai mare.

a) $a = 8^5, b = 4^{10}, c = 3^{20}$;

d) $a = 9^{20}, b = 2^{60}, c = 5^{40}$;

b) $a = \left(\frac{1}{2}\right)^3, b = \left(\frac{1}{3}\right)^2, c = \frac{1}{10}$;

e) $a = \left(-\frac{1}{3}\right)^2, b = \left(-\frac{1}{2}\right)^3, c = \left(-\frac{1}{4}\right)^4$;

c) $a = 3^{10}, b = 2^{20}, c = 8^4 \cdot 9^6$;

f) $a = 3^6, b = 16^4, c = 5^{12}$.

2. Pentru orice mulțime finită A se notează cu $m(A)$ și $M(A)$ cel mai mic, respectiv cel mai mare element al mulțimii A . Determinați $m(A)$ și $M(A)$ pentru fiecare dintre mulțimile de mai jos:

a) $A = \{8^2, 16^3, 4^4\}$;

d) $A = \{3 \cdot 5^2, 4 \cdot 3^2, 5 \cdot 2^3\}$;

b) $A = \{3^4, 7^3, 10^2\}$;

e) $A = \{7^3, 2^9, 3^6\}$;

c) $A = \left\{ \left(-\frac{1}{3}\right)^4, \left(-\frac{1}{2}\right)^3, \left(-\frac{1}{4}\right)^2 \right\}$;

f) $A = \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^6, \left(\frac{1}{3}\right)^4, \left(\frac{1}{12}\right)^2 \right\}$.

3. Determinați, în fiecare dintre următoarele cazuri, numărul întreg k pentru care $a = 2^k$:

a) $a = 32$; b) $a = \frac{1}{8}$; c) $a = 0,25$; d) $a = 0,125$; e) $a = \frac{1}{256}$; f) $a = 0,0625$.

4. Determinați, în fiecare dintre următoarele cazuri, numărul întreg m pentru care $b = 5^m$:

a) $b = 125$;

c) $b = 625$;

e) $b = \frac{1}{3125}$;

b) $b = \frac{1}{25}$;

d) $b = 0,008$;

f) $b = 3125$.

5. Dacă x și y sunt numere raționale nenule, atunci, pentru un număr întreg n , se notează $A_n(x, y) = x^n \cdot y^{-n}$. Stabiliți care dintre următoarele numere sunt întregi:

a) $A_2(3, 3)$;

c) $A_3(2, 4)$;

e) $A_3\left(\frac{1}{27}, \frac{1}{81}\right)$;

b) $A_2\left(4, \frac{1}{2}\right)$;

d) $A_2(9, 3)$;

f) $A_3(5, 4)$.

6. Pentru orice mulțime finită H se notează cu $m(H)$ și $M(H)$ cel mai mic, respectiv cel mai mare element al mulțimii H . Determinați $m(H)$ și $M(H)$ pentru fiecare dintre mulțimile de mai jos:

a) $H = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^{10}} \right\}$;

d) $H = \left\{ -2\frac{1}{3^9}, -3\frac{1}{2^8}, -2\frac{1}{3^7}, -3\frac{1}{2^7} \right\}$;

b) $H = \{(-5)^2, (-4)^2, (-3)^2, (-1)^2\}$;

e) $H = \{2^{10}, 4^6, 9^3, 8^7\}$;

c) $H = \left\{ -\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, -\frac{1}{3^3}, \dots, +\frac{1}{3^{10}} \right\}$;

f) $H = \left\{ \frac{1}{4}, -\frac{1}{4^2}, \frac{1}{4^3}, \dots, -\frac{1}{4^{12}} \right\}$.

Cuprins

<i>Prefață</i>	5
Capitolul I. Numere reale	7
1.1. Puteri și radicali.....	7
1.2. Logaritmi.....	20
1.3. Probleme de matematică aplicată.....	26
1.4. Teste de evaluare.....	31
Capitolul II. Numere complexe	34
2.1. Numere complexe sub formă algebrică.....	34
2.2. Aplicații în geometria plană.....	43
2.3. Forma trigonometrică a unui număr complex, operații, ecuații, aplicații.....	48
2.4. Teste de evaluare.....	54
Capitolul III. Funcții și ecuații	56
3.1. Funcții injective, surjective, bijective.....	56
3.2. Funcția putere, funcția radical, ecuații.....	63
3.3. Funcția exponențială, funcția logaritmică, ecuații și inecuații.....	66
3.4. Funcții trigonometrice, ecuații.....	75
3.5. Probleme de matematică aplicată.....	82
3.6. Teste de evaluare.....	87
Capitolul IV. Metode de numărare	90
4.1. Inducție matematică, probleme simple de numărare.....	90
4.2. Elemente de combinatorică.....	96
4.3. Binomul lui Newton.....	101
4.4. Probleme de matematică aplicată.....	106
4.5. Teste de evaluare.....	108
Capitolul V. Matematici financiare	110
5.1. Procente, dobânzi, T.V.A.....	110
5.2. Elemente de statistică, probabilități, variabile aleatoare.....	114
5.3. Elemente de calcul probabilistic.....	119
5.4. Probleme de matematică aplicată.....	127
5.5. Teste de evaluare.....	130
Capitolul VI. Geometrie	132
6.1. Reper cartezian în plan, distanțe, calcul vectorial.....	132
6.2. Ecuații ale dreptei, paralelism, perpendicularitate.....	136
6.3. Calcule de distanțe și arii.....	144
6.4. Probleme de matematică aplicată.....	147
6.5. Teste de evaluare.....	148

Capitolul VII. Modele de teste	150
7.1. Lucrări scrise semestriale	150
7.2. Teste de pregătire pentru Concursul de matematică aplicată „Adolf Haimovici” ...	158
7.3. Teste de pregătire pentru Olimpiada națională de matematică	163
Soluții	170
Capitolul I. Numere reale	170
Capitolul II. Numere complexe	180
Capitolul III. Funcții și ecuații	192
Capitolul IV. Metode de numărare	216
Capitolul V. Matematici financiare	225
Capitolul VI. Geometrie	233
Capitolul VII. Modele de teste	242
<i>Bibliografie selectivă</i>	258