LUCIAN DRAGOMIR

ADRIANA DRAGOMIR **OVIDIU BĂDESCU**

PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU CLASA a XI-a

consolidare

Ediţia a III-a

ÎNVĂȚARE DE CONSOLIDARE®
antrenament

Prefaţă

Această nouă lucrare este continuarea firească a celor pentru clasele a IX-a şi a X-a; *şi* aceasta a fost scrisă cu suflet şi trudă, din dorința de a oferi tuturor elevilor de clasa a XI-a (şi nu numai), o colecție de probleme şi exerciții utile. Acestea au constituit în ultimii 25 de ani subiecte la lucrări scrise, chestiuni mai simple sau un pic mai problematice în încercările la tablă, toate propuse elevilor lor de către autori; pe lângă acestea, au fost inserate probleme relevante, sperăm, de la diverse concursuri şi examene. În mare măsură, cartea este de fapt o culegere de autor, asemenea multora pe care le au unii dintre colegi în geantă, prin dosare şi caiete muncite cu atâtea generații.

Majoritatea problemelor au răspunsuri sau idei sau chiar soluții detaliate, acolo unde am considerat că este cazul. Invităm elevii să consulte rezolvările, aceasta evident după ce au încercat singuri lupta cu chestiunile propuse, măcar pentru verificare sau pentru a găsi noi idei.

Revenind la resorturile intime care au dus la redactarea acestei lucrări, credem că nu greşim dacă reamintim tuturor că, aproape zilnic, trebuie să „rezolvăm o problemă”, să luăm cel puțin o decizie. A găsi soluția, calea cea bună, înseamnă a gândi. Matematica şcolară ar trebui astfel, în primul rând, să învețe tinerii să gândească. Nu în ultimul rând, frumusețea raționamentului matematic, tehnicile specifice de lucru ar trebui să deschidă larg poarta spre diverse domenii ale ştiinței, spre artă şi viața cotidiană. Elevii, şi nu numai ei, trebuie să simtă că matematica şi comorile ei le sunt şi le vor fi utile azi şi mai ales mâine; evident, asta nu e deloc uşor realizabil, mai ales că, față de alte discipline, matematica este, vrem, nu vrem, mai abstractă. Am încercat totuşi să păstrăm un echilibru între noțiuni şi aplicații, din dorința şi necesitatea de a prezenta, pe cât posibil, o matematică mai atractivă. Apropierea orelor de matematică de tot ceea ce ne înconjoară, de viața de zi cu zi, nu credem că e posibilă permanent şi continuu; poate mai important e să facem orele plăcute şi atractive prin atmosfera creată, prin căldura transmisă, prin cultivarea dialogului, prin crearea unor situații afectiv pozitive.

Este posibil să fim criticați, din nou, pentru că ponderea exercițiilor cu grad sporit de dificultate este prea mare. Trebuie să subliniem că prezenta culegere se adresează tuturor elevilor de clasa a XI-a, indiferent de profil şi filieră. Nivelul de aptitudini, cunoştințe şi tehnici diferă de la o clasă la alta, de la un colectiv la altul; credem că rolul profesorului este şi acela de a selecta ceea ce este potrivit pentru elevii săi, fără improvizații, pregătind cu atenție şi rigoare orice lecție.

Mulțumim tuturor colegilor şi prietenilor care, într-un fel sau altul, ne-au ajutat şi susținut în demersul personal didactic în timp şi, nu în ultimul rând, elevilor noştri, care au întrebat, au rezolvat, au corectat, au sugerat.

Evident, ca orice încercare omenească, cartea este perfectibilă. Aşteptăm aşadar sugestii, observații, comentarii binevoitoare.

Autorii

CAPITOLUL I. ELEMENTE DE CALCUL MATRICEAL ŞI SISTEME DE ECUAŢII LINIARE

1.1. Permutări

Breviar teoretic

● **O permutare de ordinul *n*** este o funcție bijectivă $\sigma:\{1,\ 2,\ ...,\ n\}\to\{1,\ 2,\ ...,\ n\}$.

Pentru a putea opera mai uşor cu aceste funcții bijective, ele se scriu sub forma unui tabel cu două linii, de forma celui de mai jos:

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & ... & n\\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & ... & \sigma(n)\end{pmatrix}.$$

○ *Observația 1:* Există o permutare specială, numită permutarea identică:

$$e=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3... & n\\ 1 & 2 & 3... & n\end{pmatrix}.$$

○ *Observația 2:* Mulțimea tuturor permutărilor de gradul n se notează cu S_n.

● **Compunerea (înmulțirea) a două permutări:** se foloseşte compunerea funcțiilor, adică pentru $\sigma_1,\ \sigma_2\in S_n$, avem $(\sigma_1\circ\sigma_2)(k)=\sigma_1(\sigma_2(k)),\ \forall\ k=\overline{1,n}$.

○ *Observație:* Compunerea permutărilor se poate efectua doar dacă aceste permutări sunt de acelaşi tip.

● **Proprietățile compunerii permutărilor:**

(1) este asociativă;

(2) are element neutru, anume permutarea identică e;

(3) toate permutările au o permutare inversă: $\forall\ \sigma\in S_n, \exists\,\sigma^{-1}\in S_n$ astfel încât

$$\sigma\cdot\sigma^{-1}=\sigma^{-1}\cdot\sigma=e.$$

○ *Observație:* compunerea permutărilor nu este comutativă.

● **Inversa unei permutări:** se permută cea de-a doua linie din σ cu prima linie a lui σ, păstrându-se perechile corespunzătoare şi scriind în ordine crescătoare elementele primei linii în σ^{-1}, de exemplu, dacă $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix}\in S_4$, atunci $\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

● **Calcularea puterilor naturale ale unei permutări:** $\sigma^0=e,\ \sigma^n=\underbrace{\sigma\cdot\sigma\cdot...\sigma}_{n\text{ ori}},\ n\in\mathbb{N}^*$.

○ *Observația 1:* $\forall\sigma\in S_n,\ \exists\,k\in\mathbb{N}^*, k\le n,$ cu $\sigma^k=e$.

○ *Observația 2:* $\forall\sigma\in S_n\Rightarrow\sigma^{n!}=e$.

● **Inversiune a unei permutări** $\sigma \in S_n$, $n \geq 2$: pentru orice pereche ordonată (i, j), cu $i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ pentru care $i < j$, rezultă $\sigma(i) > \sigma(j)$.
○ *Observație:* Numărul inversiunilor unei permutări $\sigma \in S_n$, $n \geq 2$, se notează cu $m(\sigma)$ sau $\text{inv}(\sigma)$.

● **Semnul unei permutări:** numărul întreg $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)} = \prod\limits_{1 \leq i < j} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$.

○ *Observația 1:* dacă numărul de inversiuni ale unei permutări este număr par, atunci aceasta este o permutare pară, iar dacă $m(\sigma)$ este impar, atunci permutarea σ este impară.
○ *Observația 2:* $\varepsilon(\sigma \cdot \tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$, $\forall \sigma, \tau \in S_n$ şi $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$, $\forall \sigma \in S_n$.
○ *Observația 3:* numărul permutărilor pare de grad n este egal cu numărul permutărilor impare de grad n, adică $\frac{n!}{2}$.

● **Transpoziție:** o permutare $\tau \overset{\text{not}}{=} \tau_{ij} \overset{\text{not}}{=} (ij) \in S_n$, $n \geq 2$, pentru care $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$ şi $\tau(k) = k$, dacă $k \neq i$, $k \neq j$.
○ *Observația 1:* orice transpoziție este o permutare impară.
○ *Observația 2:* $(ij) = (ji)$, $(ij)^2 = e$, $(ij)^{-1} = (ij)$.
○ *Observația 3:* orice permutare $\sigma \in S_n$, $n \geq 2$, se descompune în produs de transpoziții.

Exerciții şi probleme de consolidare

1. Calculați numărul funcțiilor bijective definite pe $\{1, 2, 3\}$ cu valori în $\{1, 2, 3\}$.
2. Stabiliți care dintre următoarele tablouri reprezintă permutări:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Calculați câte permutări de gradul 4 există. Dați un exemplu de astfel de două permutări σ şi τ pentru care $\sigma(1) \neq \tau(1)$.

4. Determinați în fiecare dintre cazurile următoare numărul natural j pentru care tabloul respectiv este o permutare:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & j & 2 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & j & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & j & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & j & 1 & 3 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & j & 2 & 1 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & j & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Cuprins

Capitolul III. Modele de teste

Soluții