5

Maria Zaharia
Dan Zaharia

GEOMETRIA în gimnaziu

Explicații și rezolvări complete

Editura Paralela 45

Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programa școlară în vigoare pentru clasa a V-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Redactare: Iuliana Ene, Andreea Roşca
Tehnoredactare: Adriana Vlădescu
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
ZAHARIA, MARIA
Geometria în gimnaziu : explicaţii şi rezolvări complete : clasa a V-a /
Maria Zaharia, Dan Zaharia. - Piteşti : Paralela 45, 2022
ISBN 978-973-47-3711-6

I. Zaharia, Dan

51

COMENZI – CARTEA PRIN POŞTĂ

EDITURA PARALELA 45
Bulevardul Republicii, Nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești,
jud. Argeş, cod 110177
Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918
Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492
E-mail: comenzi@edituraparalela45.ro

www.edituraparalela45.ro

Tiparul executat la tipografia *Editurii Paralela 45*
E-mail: tipografie@edituraparalela45.ro

Capitolul I
NOŢIUNI DE BAZĂ ALE GEOMETRIEI

Lecţia 1. Punct, dreaptă, plan. Poziţiile relative ale punctelor şi dreptelor

Geometria este una dintre cele mai vechi științe. Cuvântul „geometrie” este de origine greacă: *geo* = „pământ”, *metron* = „măsură”, însemnând „măsurarea pământului”. Prin urmare, geometria a fost dezvoltată pentru a înțelege mai bine realitatea înconjurătoare.

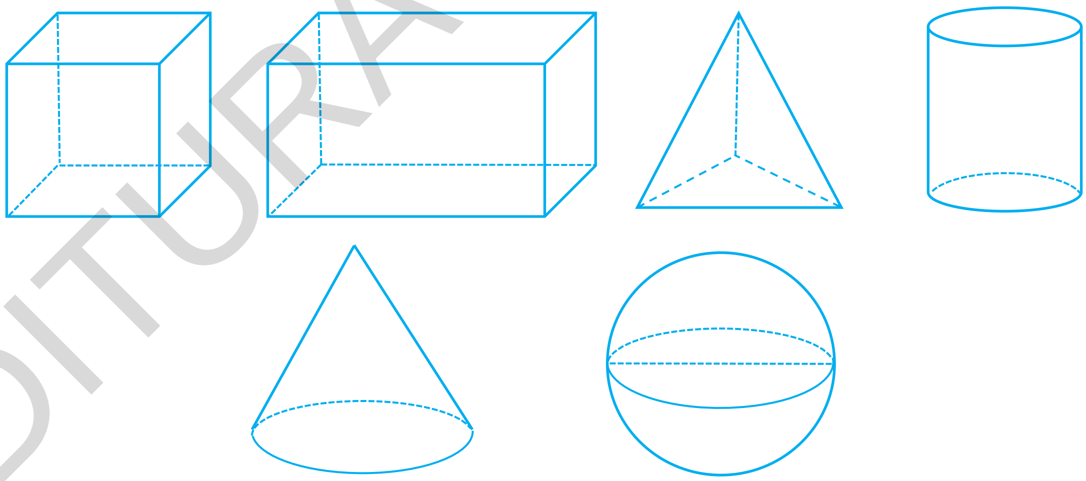
Reţine!

- Cele mai simple **noțiuni geometrice** sunt: **punctul**, **dreapta** și **planul**. Aceste noțiuni, extrase din realitatea înconjurătoare prin observare directă, nu pot fi definite. De aceea le numim **noțiuni fundamentale**. În spațiul fizic în care trăim, noțiunile fundamentale le identificăm cu unele obiecte. Celelalte noțiuni geometrice sunt introduse prin definiții cu ajutorul noțiunilor fundamentale.

Exemple:
– **punctul** îl identificăm cu urma lăsată de un creion bine ascuțit pe o foaie de hârtie;
– **dreapta** o identificăm cu un fir de ață nesfârșit, perfect întins;
– **planul** îl identificăm cu fața unei mese, prelungită la nesfârșit în toate direcțiile.

- Principalul mijloc de reprezentare a noțiunilor geometrice pe foaia caietului sau pe tabla clasei în care învățăm este desenul. Se obțin în acest fel **figuri geometrice**.
- Instrumentele folosite pentru desenarea figurilor geometrice sunt: **rigla** (gradată sau negradată), **compasul**, **echerul** și **raportorul**.

De exemplu, figurile geometrice desenate mai jos reprezintă următoarele noțiuni geometrice: *cub*, *paralelipiped dreptunghic*, *piramidă*, *cilindru*, *con*, *sferă*.



Ele au în realitatea înconjurătoare câte un corespondent care este un obiect (corp) al spațiului fizic în care trăim.

În geometrie, punctele se notează cu litere mari de tipar: *A*, *B*, *C*, ..., dreptele cu litere mici: *a*, *b*, *c*, ..., iar planele cu litere grecești: α, β, γ, …[1]. Uneori aceste litere sunt însoțite de câte un indice inferior (exemple: A_1, d_2, α_3, ...[2]) sau de câte un indice superior (exemple: A', d'', α'', ...[3]).

Noțiunile *punct*, *dreaptă*, *plan* vor fi reprezentate în desen după cum urmează (figura 1):

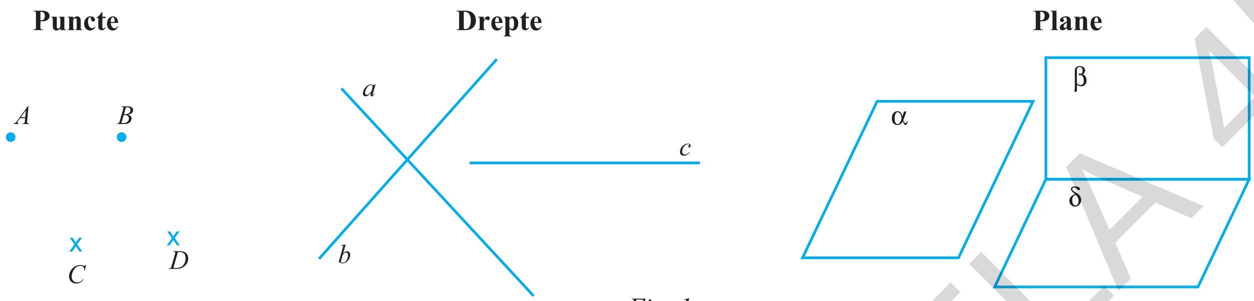


Fig. 1

Exemplu:

La un cub deosebim 8 vârfuri, 12 muchii și 6 fețe (figura 2). Fiecare vârf poate fi identificat cu un punct. Fiecare muchie prelungită la nesfârșit poate fi identificată cu o dreaptă și fiecare față, prelungită la nesfârșit în toate direcțiile, poate fi identificată cu un plan. Cele opt vârfuri, fiind puncte, le notăm cu litere mari de tipar: patru dintre ele le notăm cu literele *A*, *B*, *C*, *D*, iar pe celelalte patru cu litere mari de tipar însoțite de indici superiori A', B', C', D' (figura 3). O muchie prelungită la nesfârșit, fiind o dreaptă, o putem nota cu o literă mică, de exemplu cu *d*, iar o față prelungită la nesfârșit în toate direcțiile, fiind un plan, o putem nota cu o literă grecească, de exemplu cu δ (delta).

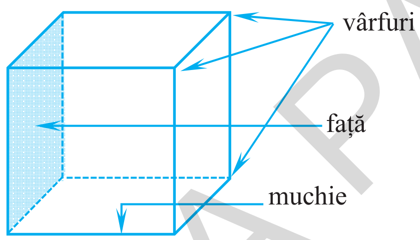


Fig. 2

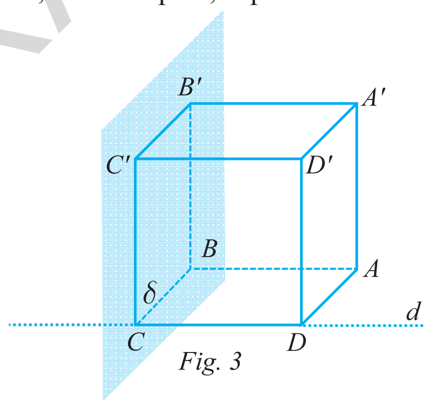


Fig. 3

Vom privi dreapta și planul ca mulțimi nesfârșite de puncte (figura 4.a și 4.b). *Orice figură geometrică este văzută ca o mulțime de puncte*. De exemplu, un triunghi este o mulțime de puncte (figura 4.c).

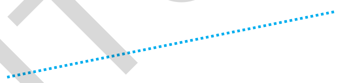


Fig. 4.a

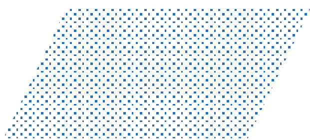


Fig. 4.b

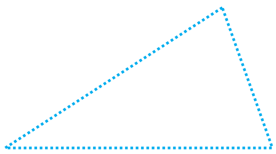


Fig. 4.c

[1] Citim: *alfa*, *beta*, *gama*.
[2] Citim: *A unu*, *d doi*, *alfa trei*.
[3] Citim: *A prim*, *d secund*, *alfa secund*.

Pozițiile relative ale punctelor și dreptelor

Două puncte A și B pot fi *diferite* și notăm $A \neq B$ (figura 5.a) sau pot fi *identice* și notăm $A = B$ (figura 5.b).

Fig. 5.a

Fig. 5.b

Observație:

Ori de câte ori considerăm două (sau mai multe) puncte, presupunem că ele sunt diferite (două câte două).

În figura 6.a, punctul A este situat pe dreapta d. Se mai spune că *punctul A se află pe dreapta d* sau că *punctul A aparține dreptei d* și scriem $A \in d$. În figura 6.b, punctul A nu este situat pe dreapta d. Spunem că *punctul A nu se află pe dreapta d* sau că *punctul A nu aparține dreptei d* și scriem $A \notin d$.

$A \in d$

Fig. 6.a

$A \notin d$

Fig. 6.b

Reține!

- Două puncte pot fi **diferite** sau pot **coincide** (sunt puncte **identice**).
- Un punct poate **aparține** unei drepte sau poate **să nu aparțină** acelei drepte.
- Despre un punct care nu aparține unei drepte se spune că este **punct exterior dreptei**.
- Oricare două puncte aparțin unei **singure drepte**.
- Trei sau mai multe puncte care aparțin aceleiași drepte se numesc **puncte coliniare**.

Observație:

În limbaj obișnuit, propoziția „oricare două puncte aparțin unei singure drepte” se formulează astfel: **prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una**. Dreapta care trece prin două puncte se desenează cu ajutorul riglei (figura 7). Dacă cele două puncte sunt A și B, atunci dreapta respectivă se numește *dreapta determinată de punctele A și B* și se notează cu AB.

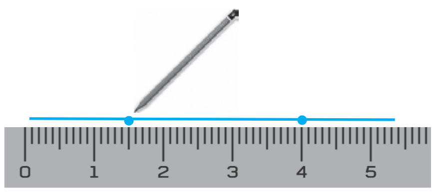


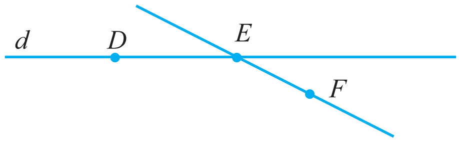
Fig. 7

Exemple:

1.

Citim	Desenăm	Notăm
punctele A și B sunt diferite	A B	$A \neq B$
punctele M și N sunt identice	M N	$M = N$
dreapta determinată de două puncte P și Q	P Q	PQ
punctul M este exterior dreptei d	M d	$M \notin d$

2.

Citim	Desenăm	Consecință
punctele *A*, *B* și *C* aparțin unei drepte *d*		punctele *A*, *C*, *B* sunt coliniare
dreptele *DE* și *EF* nu coincid		punctele *D*, *E*, *F* nu sunt coliniare

3. Privește cu atenție figura 8.

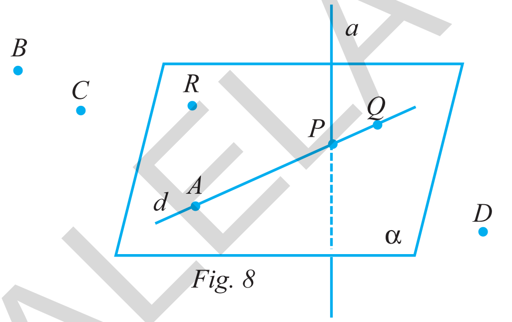


Fig. 8

Observăm	Folosim o exprimare cu același înțeles (exprimare sinonimă)	Notăm
punctul *A* este situat pe dreapta *d*	punctul *A aparține* dreptei *d*	$A \in d$
punctele *A*, *P* și *Q* sunt pe dreapta *d*	punctele *A*, *P* și *Q aparțin* dreptei *d*	$A, P, Q \in d$
punctul *R* nu este situat pe dreapta *d*	punctul *R nu aparține* dreptei *d* (*punctul R este exterior dreptei d*)	$R \notin d$
punctele *B*, *C*, *D* și *R* nu sunt situate pe dreapta *d*	punctele *B*, *C*, *D* și *R nu aparțin* dreptei *d* (*sunt puncte exterioare dreptei d*)	$B, C, D, R \notin d$
punctul *B* nu este situat în planul α	punctul *B nu aparține* planului α (*punctul B este exterior planului* α)	$B \notin \alpha$
punctul *R* este situat în planul α	punctul *R aparține* planului α	$R \in \alpha$
punctele *A*, *P* și *Q* sunt puncte ale planului α	punctele *A*, *P* și *Q aparțin* planului α	$A, P, Q \in \alpha$
punctele *B*, *C* și *D* nu sunt puncte ale planului α	punctele *B*, *C* și *D nu aparțin* planului α (punctele *B*, *C* și *D* sunt *exterioare* planului α)	$B, C, D \notin \alpha$
dreapta *d* este în planul α	dreapta *d* este *inclusă* (conținută) în planul α	$d \subset \alpha$
dreapta *a* nu este în planul α	dreapta *a nu este inclusă* (conținută) în planul α	$a \not\subset \alpha$

Descoperim noţiuni noi

Pentru aceasta, să observăm cubul din figura 9, ale cărui vârfuri se identifică cu punctele *A*, *B*, *C*, *D*, *A'*, *B'*, *C'*, *D'*.

Oricare două dintre aceste puncte determină o dreaptă. De exemplu: punctele *A* și *B* determină dreapta *AB*; punctele *C* și *D* determină dreapta *CD* etc.

Lecţia 3. Segmente congruente. Mijlocul unui segment. Simetricul unui punct faţă de alt punct

Observăm figura 1. Folosim o riglă gradată și măsurăm lungimile celor două segmente (figura 2).

Fig. 1

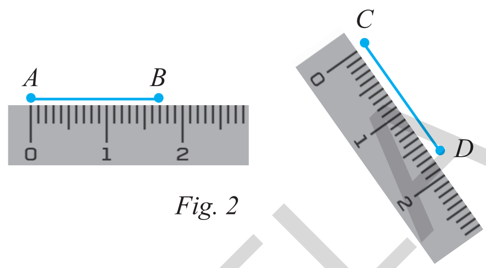


Fig. 2

Rezultatul măsurătorilor	Deducem	Notăm	Citim
AB = 1,7 cm CD = 1,7 cm	segmentele AB și CD au aceeași lungime	$AB = CD$	lungimea segmentului AB este egală cu lungimea segmentului CD
		$AB \equiv CD$	segmentul AB este congruent cu segmentul CD

Reţine!

- Două segmente care au aceeași lungime se numesc **segmente congruente**.

Cum construim un segment congruent cu un segment dat, cu ajutorul unei rigle gradate:

– măsurăm segmentul AB dat (figura 3.a);

– pe o semidreaptă dată CD trasăm un segment CP de aceeași lungime cu segmentul dat (figura 3.b).

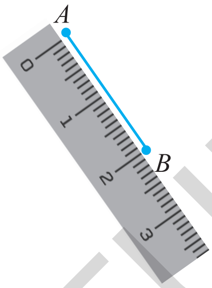


Fig. 3.a

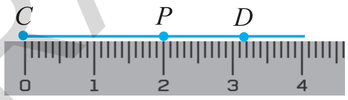


Fig. 3.b

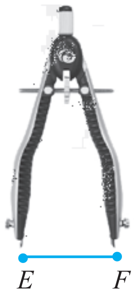


Fig. 4.a

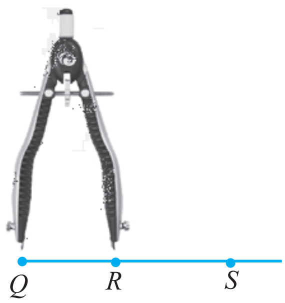


Fig. 4.b

Cum construim un segment congruent cu un segment dat, cu ajutorul riglei negradate și al compasului:

– se ia între vârfurile compasului segmentul dat EF (figura 4.a);

– fără a modifica deschiderea compasului, pe o semidreaptă dată QS, cu acul compasului în Q, folosind vârful minei, marcăm punctul R (figura 4.b). Rezultă $EF \equiv QR$ (deoarece lungimea fiecărui segment este egală cu lungimea deschiderii compasului).

Aplicație practică

Pentru o expoziție de pictură, doi lucrători trebuie să fixeze un tablou între alte două tablouri, prinse în punctele A și B (figura 5). Cel de-al treilea tablou trebuie fixat în punctul O, care trebuie să fie situat pe bara AB, de lungime egală cu 3 m, la distanțe egale de punctele A și B. Lucrătorii dispun de o sfoară suficient de lungă. Cum trebuie să procedeze cei doi lucrători pentru a stabili locul punctului O pe bara AB?

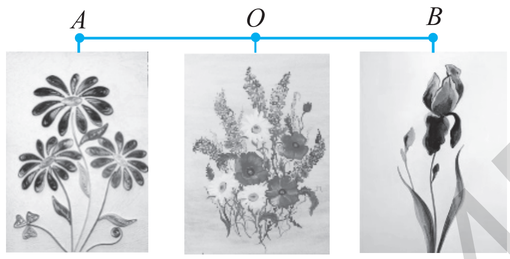


Fig. 5

Soluție: Unul dintre lucrători fixează un capăt al sforii în punctul A. Celălalt lucrător întinde sfoara până în punctul B și o taie în acest punct. Bucata de sfoară rezultată va avea lungimea $AB = 3$ m. Cele două capete, A și B, ale acestei sfori se așază unul peste altul și se fixează de un lucrător în punctul A. Celălalt lucrător apucă sfoara astfel îndoită de noul capăt format și o întinde pe bara AB, rezultând pe această bară punctul O în care trebuie fixat al treilea tablou. Acesta este situat la distanțe egale de punctele A și B, deoarece $OA = OB = 1{,}5$ m, deci este la *mijlocul* barei AB. Despre tablourile fixate în punctele A și B se spune că sunt *simetrice* față de tabloul fixat în punctul O.

Reţine!

- Punctul O este **mijlocul unui segment AB** dacă O aparține dreptei AB și $OA = OB$ (figura 6).
- Dacă punctul O este mijlocul segmentului AB (figura 7) se mai spune că:
  - **punctele A și B sunt simetrice față de punctul O;**
  - **punctul B este simetricul punctului A față de punctul O;**
  - **punctul A este simetricul punctului B față de punctul O.**

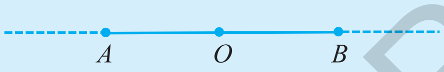


Fig. 6

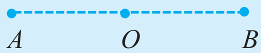


Fig. 7

EXERSEAZĂ!

1. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.

Se consideră un segment AB. Pe semidreapta opusă semidreptei AB se consideră un punct M.

Dacă $AM = BA$, atunci:

a) M aparține segmentului AB; A F

b) M este mijlocul segmentului AB; A F

c) A este mijlocul segmentului BM; A F

d) punctele B și M sunt simetrice față de punctul A. A F

2. Încercuieşte litera corespunzătoare răspunsului corect.

Punctele A, B și C aparțin unei semidrepte cu originea în punctul O, A este între O și C, iar C este între A și B. Atunci:

A. $OA < OB < OC$; B. $OB < OA < OC$;

C. $OB < OC < OA$; D. $OA < OC < OB$.

3. **Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.**

Desenează două drepte coplanare *a*, *b* și punctele *M*, *N*, *P*, astfel încât $M \in a$, $M \in b$, $N \in a$ și $P \in b$.

A. Dreptele *a* și *b* sunt concurente.
B. Dreapta *a* nu coincide cu dreapta *MN*.
C. Dreapta *b* nu coincide cu dreapta *MP*.
D. Dreptele *a* și *b* sunt paralele.

4. **Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta.**

Folosind rigla și compasul, copiază figura 8 în caietul tău, astfel încât desenul realizat să păstreze lungimile segmentelor *AB*, *MN*, *NP* și *PQ*. Dacă se ia ca unitate de măsură pentru lungimi segmentul *AB* = 1 u.m.[4], atunci:

a) *MN* =	1) 1 u.m.
b) *PM* =	2) 2 u.m.
c) *NQ* =	3) 3 u.m.
d) *PQ* – *MN* =	4) 3,5 u.m.
	5) 4 u.m.

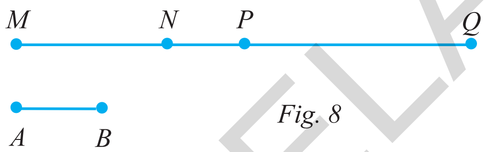


Fig. 8

5. **Completează spațiul punctat cu răspunsul corect.**

Punctele *A* și *B* aparțin unei semidrepte cu originea în punctul *O* și punctul *M* este mijlocul segmentului *AB*. Dacă *OA* = 3 cm și *OB* = 7 cm, *OM* = …… cm.

Fixează!

6. Punctele *B*, *C* și *D* aparțin unei semidrepte cu originea în punctul *A*. Dacă *AC* = 5 cm, *AD* = 10 cm, *B* este între *A* și *C*, *BD* = 7 cm și *O* este mijlocul segmentului *BD*, calculează lungimile segmentelor *BC* și *OC*.

7. Punctele *A* și *B* aparțin unei semidrepte cu originea în punctul *O*. Punctul *A* este între punctele *O* și *B*, *A'* este simetricul punctului *A* față de *O* și *B'* este simetricul punctului *B* față de *O*. Arată că $AB \equiv A'B'$.

8. Punctele *B*, *C* și *D* aparțin unei semidrepte cu originea în punctul *A*, *AB* < *AD* < *AC*, *AB* = 2,2 cm, *BD* = 3,8 cm și *CD* = 5,6 cm.

a) Calculează lungimile segmentelor: *AD*, *AC* și *BC*.
b) Dacă punctul *M* este mijlocul segmentului *BC*, calculează *AM*.
c) Dacă punctul *N* este mijlocul segmentului *AD*, calculează *NC*.

Fii campion!

9. Punctele $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots$ aparțin unei semidrepte cu originea în punctul *O*. Dacă $OA_1 < OA_2 < OA_3 < OA_4 < \ldots$ și pentru orice număr natural nenul *i*, lungimea segmentului OA_i este *i* cm, calculează lungimea segmentului:

a) A_2A_3;
b) A_2A_5;
c) A_mA_n, unde *m* și *n* sunt numere naturale nenule date, $m < n$.
d) Dacă punctul *P* este mijlocul segmentului A_mA_n, calculează lungimea segmentului *OP*.

10. Punctele $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots$ aparțin unei semidrepte cu originea în punctul *O*. Dacă $OA_1 < OA_2 < OA_3 < OA_4 < \ldots$ și pentru orice număr natural nenul *i*, lungimea segmentului OA_i este $i \cdot x$ cm, calculează lungimea segmentului:

a) A_5A_6;
b) A_4A_7;
c) A_mA_n, unde *m* și *n* sunt numere naturale nenule date, $m < n$.
d) Dacă punctul *P* este mijlocul segmentului A_mA_n, calculează lungimea segmentului *OP*.

[4] u.m. = unitate de măsură.

Recapitulare

TEMA 1

1. Desenează o dreaptă a și pe aceasta fixează punctele M, N, P, Q, în această ordine.
a) Scrie toate segmentele determinate de cele patru puncte.
b) Scrie segmentele care conțin toate punctele situate între N și P.
c) Scrie semidreptele care conțin toate punctele situate între N și P.

2. Desenează o dreaptă d. Pe dreapta d fixează două puncte A și B și notează cu O mijlocul segmentului AB.
a) Scrie care este simetricul punctului A față de punctul O și justifică alegerea făcută.
b) Numește o pereche de semidrepte opuse din figura realizată.
c) Scrie toate dreptele din figură care sunt identice cu dreapta d.

3. Analizează cu atenție figura alăturată.
a) Numește două drepte paralele din figură.
b) Numește două drepte concurente din figură.
c) Numește două puncte situate de o parte și de alta a dreptei AC.

4. Desenează patru puncte distincte A, B, C și D, astfel încât acestea să determine:
a) șase drepte; b) o dreaptă; c) patru drepte.

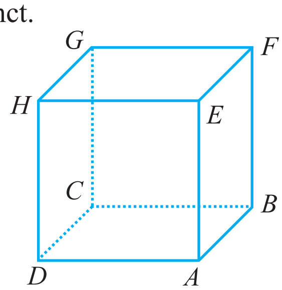
5. a) Desenează un segment AB și notează cu O mijlocul acestuia.
b) Desenează un punct M, care nu se află pe segmentul AB, astfel încât $MA \equiv MB$.
c) Desenează simetricul punctului M față de punctul O și notează-l cu N.
d) Desenează simetricul punctului A față de punctul N și notează-l cu P.

TEMA 2

1. Desenează și notează corespunzător:
a) un punct A; b) o dreaptă d; c) un plan α;
d) o semidreaptă OA; e) un segment AB; f) două semidrepte opuse MN și MP.

2. Desenează:
a) două drepte d_1 și d_2 concurente într-un punct O;
b) două drepte paralele notate cu a și b;
c) trei drepte concurente două câte două, dar care să nu aibă în comun niciun punct.

3. În figura alăturată este desenat un cub. Analizează cu atenție pozițiile dreptelor reprezentate în figură și scrie:
a) dreptele paralele cu dreapta AB;
b) dreptele concurente în punctul A;
c) dreptele care nu au niciun punct comun cu dreapta GC.



CUPRINS