

6

Maria Zaharia
Dan Zaharia

GEOMETRIA în gimnaziu

Explicații și rezolvări complete

Editura Paralela 45

Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programul școlar în vigoare pentru clasa a VI-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Redactare: Iuliana Ene, Andreea Roșca
Tehnoredactare: Adriana Vlădescu
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
ZAHARIA, MARIA

Geometria în gimnaziu : explicații și rezolvări complete : clasa a VI-a /
Maria Zaharia, Dan Zaharia. - Pitești : Paralela 45, 2022
ISBN 978-973-47-3712-3

I. Zaharia, Dan

51

Copyright © Editura Paralela 45, 2022

Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate,
iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.
www.edituraparelela45.ro

Capitolul I UNGHIIURI

Lecția 1. Recapitulare și completări

Cea mai simplă noțiune geometrică este *punctul*.

Dreapta, planul, semiplanul, semidreapta, segmentul și multe altele sunt *noțiuni geometrice*, privite ca *mulțimi infinite de puncte*. Orice noțiune geometrică se poate reprezenta pe foaia de hârtie sau pe tabla din sala de clasă în care învățăm, cu ajutorul unui desen, numit *figură geometrică*.

De exemplu, figura 1, de mai jos, sugerează o mulțime de puncte. Dacă ne imaginăm mulțimea respectivă ca o mulțime infinită de puncte, obținem segmentul AB , reprezentat în figura 2.

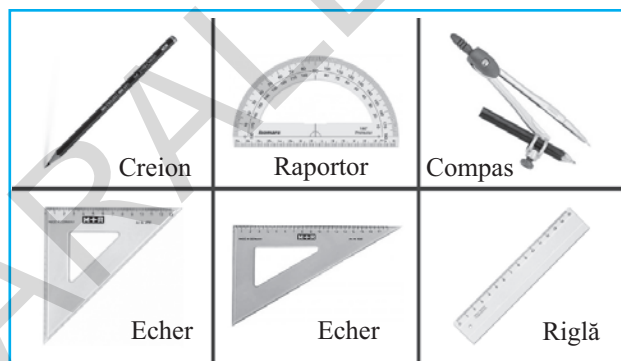


Fig. 1



Fig. 2

Figurile geometrice au un rol însemnat în geometrie, deoarece contribuie la dezvoltarea intuiției spațiale, a imaginației, creativității, inventivității. O figură geometrică se desenează folosind creionul și instrumentele de desen: rigla (gradată sau negrată), echerul, raportorul și compasul. Pentru desenarea unei figuri geometrice în condiții optime, este necesar să cunoașteți bine instrumentele de desen și modul de folosire a acestora.



Reține!

Creionul trebuie să fie bine ascuțit.

Rigla negrată se folosește pentru desenarea dreptelor, a semidreptelor și a segmentelor. Se respectă următoarele reguli:

- vârful creionului, în permanență, se va sprijini pe muchia riglei și va fi înclinat față de direcția de trasare;
- trasarea se face, de regulă, de la stânga spre dreapta și de sus în jos.

Rigla gradată se folosește pentru măsurarea lungimilor segmentelor sau pentru a calcula distanța dintre puncte.

Echerul se folosește pentru desenarea unghiurilor drepte.

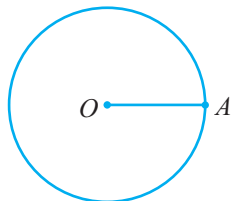
Raportorul se folosește pentru măsurarea unghiurilor.

Compasul se folosește pentru desenarea unui **cerc** sau a unei părți dintr-un cerc, numită **arc de cerc**.

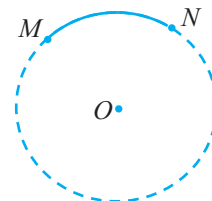
La un compas, deosebim **vârful compasului** și **vârful port-mină**.

Pentru desenarea unui **cerc cu centrul în O și raza OA** sau a unui **arc de cerc cu centrul în O** , vârful compasului se fixează în centrul cercului, iar cu vârful port-mină se trasează cercul sau arcul de cerc.

cerc cu centrul în O
și raza $r = OA$



arcul de cerc MN este
porțiunea de cerc limitată de
punctele M și N



Un cerc de centru O și rază r cm sau un arc al acestui cerc se desenează având grijă ca vârful compasului să rămână fixat (în punctul O), iar vârful port-mină să se miște pe suprafața de desen, fără ca, în timpul mișcării, compasul să se închidă sau să se deschidă.

De exemplu, să presupunem că dorim să desenăm un cerc (sau un arc de cerc) cu centrul într-un punct O și cu raza $r = OA = 1,5$ cm. Procedăm astfel:

- folosind rigla gradată, construim un segment OA , cu lungimea $r = 1,5$ cm;
- prin fixarea vârfului compasului în punctul O și a vârfului port-mină în punctul A , dăm deschiderii compasului lungimea $r = 1,5$ cm;
- cu vârful compasului în O , trasăm cercul (sau un arc al acestuia).



EXERSEAZĂ!

1. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.

- | | | |
|---|---|---|
| a) Prin orice punct trece o singură dreaptă. | A | F |
| b) Prin orice două puncte distincte trece o singură dreaptă. | A | F |
| c) Dacă trei puncte aparțin unei drepte, atunci punctele sunt coliniare. | A | F |
| d) Dacă un punct nu aparține unei drepte, atunci punctul este exterior dreptei. | A | F |
| e) Dacă punctul M este pe o dreaptă AB și $AB + BM = AM$, atunci punctul M aparține segmentului AB . | A | F |

2. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

Un unghi cu măsura x este unghi propriu dacă:

- A. $x = 0^\circ$; B. $x = 180^\circ$; C. $0^\circ < x < 180^\circ$; D. $x > 180^\circ$.

3. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

Două unghiuri distincte sunt congruente dacă:

- A. au același vârf; B. au o latură comună; C. laturile lor coincid; D. au aceeași măsură.

4. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta.

- | | |
|--|--|
| a) Segmentul AB este figura formată din | 1) semidreptele AB și AC care coincid; |
| b) Semidreapta BA este figura formată din | 2) semidreptele BA și BC ; |
| c) Unghiul ABC este figura formată din | 3) toate punctele care sunt coliniare cu A și B și care sunt cu A de aceeași parte a punctului B ; |
| d) Unghiul nul BAC este figura formată din | 4) toate punctele între A și B ; |
| | 5) toate punctele între A și C . |

5. Completează spațiul punctat cu răspunsul corect.

Dacă unghiul AOB este unghi alungit, atunci vârful O aparține segmentului ...

FIXEAZĂ!

6. Desenează:

- | | | |
|-----------------------------|----------------------|-------------------------|
| a) două puncte A și B ; | b) o dreaptă AB ; | c) o semidreaptă AB ; |
| d) o semidreaptă BA ; | e) un segment AB . | |

7. a) Desenează în caietul tău un segment CD cu lungimea de 2,5 cm.

b) În unul dintre semiplanele determinate de dreapta CD completează desenul cu un arc de cerc MN , cu centrul în punctul C și raza $r_1 = 1,5$ cm, și cu un arc de cerc PQ , cu centrul în punctul D și raza $r_2 = 2$ cm, astfel încât intersecția celor două arce să fie un punct E .

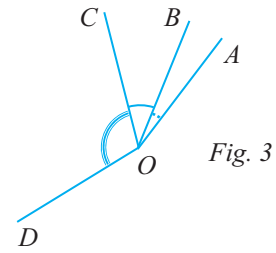
c) Află lungimea segmentelor CE și DE , fără a folosi rigla gradată, justifică răspunsul ales și verifică-l, folosind rigla gradată.

d) Calculează perimetrul triunghiului CDE și exprimă rezultatul în centimetri, milimetri, decimetri.

6 ♦ Geometria în gimnaziu

8. Observă figura 3.

- Numește toate unghiurile formate de semidreptele din figură.
- Știind că $\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC = 51^\circ$, $\sphericalangle BOD - \sphericalangle BOC = 72^\circ$ și $\sphericalangle BOD = 3 \cdot \sphericalangle BOC$, calculează măsurile unghiurilor AOC , COD , AOD , BOC și AOB .



FII CAMPION!

9. Desenează punctele distincte A, B, C, D, E și F , astfel încât să fie îndeplinite simultan condițiile:

- segmentul AB are lungimea de 4 cm;
 - punctul M este mijlocul segmentului AB , unghiul BMC are măsura egală cu 60° și punctul D este simetricul punctului C față de punctul M ;
 - unghiul AME este un unghi drept, punctele E, M și F sunt coliniare, punctul E este cu punctul C de aceeași parte a dreptei AB .
- Ce fel de unghi este AMC ? Justifică răspunsul dat.
 - Calculează măsurile unghiurilor CME , AMD și DMF .

10. Punctul O se află pe un segment MN . Dreapta AB este axa de simetrie a segmentului MN și punctele A, O, B sunt coliniare.

- Realizează un desen care să illustreze enunțul problemei.
- Dacă punctul P este interior unghiului AOM și măsura unghiului AOP este o pătrime din măsura unghiului POM , calculează măsura unghiului POM .

Lecția 3. Unghiuri în jurul unui punct

Rezolvăm împreună și descoperim noțiuni noi

Observă cele patru unghiuri AOB , BOC , COD și DOA din figura 1.

- Numește vârful fiecărui unghi.
- Cercetează dacă printre cele patru unghiuri există două ale căror interioare au puncte comune.
- Calculează suma măsurilor celor patru unghiuri.

Rezolvare:

a) Vârful fiecărui unghi este punctul O . Altfel spus, *cele patru unghiuri au vârful comun*.

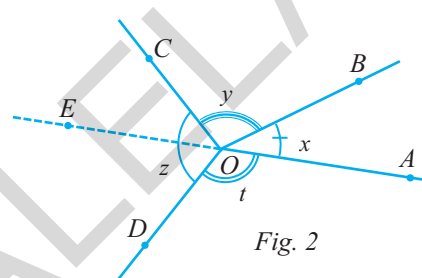
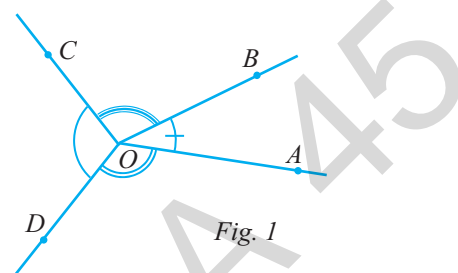
b) Printre cele patru unghiuri nu există două ale căror interioare să aibă puncte comune. Altfel spus, *oricare două dintre cele patru unghiuri au interioarele disjuncte*.

c) Notăm cu x , y , z și t măsurile exprimate în grade ale unghiurilor AOB , BOC , COD , respectiv DOA . Completăm apoi figura 1 cu semidreapta OE , opusă semidreptei OA (figura 2). Deoarece unghiul

AOE este unghi alungit rezultă:
$$\begin{cases} x + y + \sphericalangle EOC = 180^\circ \\ t + \sphericalangle EOD = 180^\circ \end{cases}$$

Adunând cele două egalități rezultă $x + y + t + \sphericalangle EOC + \sphericalangle EOD = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$.

Deoarece $\sphericalangle EOC + \sphericalangle EOD = z$, rezultă *suma măsurilor celor patru unghiuri*: $x + y + t + z = 360^\circ$.



Reține!

- Unghiuri în jurul unui punct** înseamnă un număr finit de unghiuri proprii, cu următoarele proprietăți:
 - au vârful comun;
 - oricare două dintre ele au interioarele disjuncte;
 - suma măsurilor unghiurilor este egală cu 360° .

Aplicăm cunoștințele

Observă figura 3, unde OD și OE sunt semidreptele opuse semidreptelor OB , respectiv OC .

a) Calculează numărul unghiurilor proprii din figură care au vârful comun în punctul O .

b) Arată că oricare două unghiuri proprii cu vârful în O nu pot fi unghiuri în jurul punctului O .

c) Numește trei unghiuri cu vârful în O care sunt unghiuri în jurul punctului O .

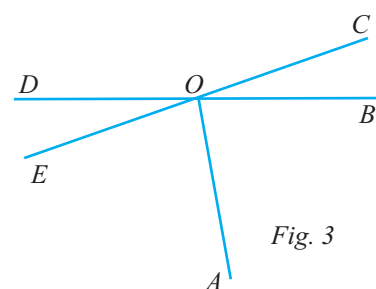
d) Numește patru unghiuri cu vârful în O care sunt unghiuri în jurul punctului O .

e) Demonstrează că suma măsurilor unghiurilor AOB , BOC , COD , DOE , EOA este egală cu 360° și că aceste unghiuri sunt unghiuri în jurul punctului O .

f) Demonstrează că unghiurile AOB , BOC , COD , DOE , EOA și EOB nu sunt unghiuri în jurul punctului O .

Rezolvare:

a) Deoarece unghiul este figura formată din două semidrepte care au aceeași origine, rezultă că trebuie să calculăm numărul perechilor de semidrepte cu originea în O . Tabelul următor ne ajută să stabilim corect toate perechile de semidrepte și să calculăm numărul lor.



	OA	OB	OC	OD	OE	nr. perechi
OA	-	(OA, OB)	(OA, OC)	(OA, OD)	(OA, OE)	4
OB	-	-	(OB, OC)	(OB, OD)	(OB, OE)	3
OC	-	-	-	(OC, OD)	(OC, OE)	2
OD	-	-	-	-	(OD, OE)	1
OE	-	-	-	-	-	0
total nr. perechi de semidrepte						10

Rezultă că numărul unghiurilor din figură care au vârful comun în punctul O este egal cu 10, dintre care două unghiuri sunt improprii (BOD și COE sunt unghiuri alungite) și opt sunt unghiuri proprii.

b) Notăm cu x și y măsurile în grade a două unghiuri oarecare cu vârful în O . Cele două unghiuri fiind proprii, rezultă că $x < 180^\circ$ și $y < 180^\circ$, de unde $x + y < 360^\circ$. Deoarece suma măsurilor celor două unghiuri nu este egală cu 360° , cele două unghiuri proprii, cu vârful în punctul O , nu sunt unghiuri în jurul punctului O .

c) Unghiurile AOC , COD și ODA sunt unghiuri în jurul punctului O , deoarece au vârful comun, oricare două dintre unghiuri au interioarele disjuncte și suma măsurilor celor trei unghiuri este egală cu 360° .

d) Unghiurile BOC , COD , DOE și EOA sunt patru unghiuri în jurul punctului O . Justifică!

e) Deoarece unghiul BOD este unghi alungit și

$$\begin{cases} \sphericalangle BOC + \sphericalangle COD = \sphericalangle BOD \\ \sphericalangle AOB + \sphericalangle EOA + \sphericalangle DOE = \sphericalangle BOD \end{cases}, \text{ rezultă } \begin{cases} \sphericalangle BOC + \sphericalangle COD = 180^\circ \\ \sphericalangle AOB + \sphericalangle EOA + \sphericalangle DOE = 180^\circ \end{cases}$$

Adunând ultimele două egalități, rezultă că suma măsurilor unghiurilor AOB , BOC , COD , DOE și EOA este egală cu 360° . Aceste cinci unghiuri sunt unghiuri în jurul punctului O , deoarece au vârful comun, oricare două dintre unghiuri au interioarele disjuncte și suma măsurilor lor este egală cu 360° .

f) Conform punctului precedent $\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC + \sphericalangle COD + \sphericalangle DOE + \sphericalangle EOA = 360^\circ$. Adăugând în ambii membri măsura unghiului EOB , rezultă $\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC + \sphericalangle COD + \sphericalangle DOE + \sphericalangle EOA + \sphericalangle EOB = 360^\circ + \sphericalangle EOB > 360^\circ$.

Prin urmare, unghiurile AOB , BOC , COD , DOE , EOA și EOB nu sunt unghiuri în jurul punctului O , deoarece suma măsurilor lor nu este egală cu 360° .

Altfel spus, unghiurile AOB , BOC , COD , DOE , EOA și EOB nu sunt unghiuri în jurul punctului O , deoarece două dintre aceste unghiuri, EOA și EOB , nu au interioarele disjuncte (interioarele lor au puncte comune).

EXERSEAZĂ!

1. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.

Observă figura 4, care pune în evidență cinci unghiuri, numerotate de la 1 la 5, și care au măsurile egale cu 120° , 105° , 35° , 35° , respectiv 100° . Atunci:

- cele cinci unghiuri au același vârf;
- cele cinci unghiuri au interioarele disjuncte două câte două;
- $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 + \sphericalangle 4 + \sphericalangle 5 = 360^\circ$;
- unghiurile 1, 2, 4 și 5 sunt unghiuri în jurul unui punct;
- $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 + \sphericalangle 5 = 360^\circ$;
- unghiurile 1, 2, 3 și 5 sunt unghiuri în jurul unui punct.

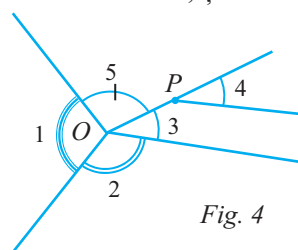


Fig. 4

- | | |
|---|---|
| A | F |
| A | F |
| A | F |
| A | F |
| A | F |
| A | F |

2. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

Unul dintre cele patru unghiuri din jurul unui punct are măsura în grade egală cu x , iar celelalte trei unghiuri au măsurile egale cu $2x$, $3x - 7^\circ$, respectiv 19° . Atunci x este egal cu:

- A. 58° ; B. 62° ; C. 60° ; D. 75° .

3. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

Două unghiuri proprii AOB și BOC au interioarele disjuncte. Notăm cu x și y măsurile unghiurilor AOB , respectiv BOC , exprimate în grade. Unghiurile AOB , BOC , AOC sunt unghiuri în jurul punctului O , dacă:
A. $x + y < 180^\circ$; B. $x + y = 180^\circ$; C. $x + y > 180^\circ$; D. $x + y = 360^\circ$.

4. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta.

Observă figura 5. Dacă $\sphericalangle AOB = 120^\circ$, $\sphericalangle BOC = 165^\circ$ și suma măsurilor unghiurilor AOB , BOC , COA și AOD este egală cu 380° , atunci:

- | | |
|----------------------------|------------------|
| a) $\sphericalangle AOC =$ | 1) 20° ; |
| b) $\sphericalangle AOD =$ | 2) 30° ; |
| c) $\sphericalangle BOD =$ | 3) 95° ; |
| d) $\sphericalangle DOC =$ | 4) 100° ; |
| | 5) 75° . |

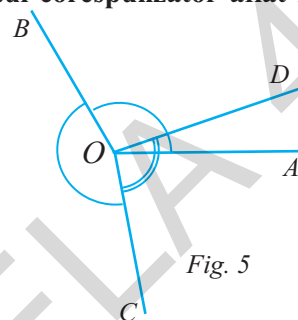


Fig. 5

5. Completează spațiul punctat cu răspunsul corect.

Trei drepte concurente în punctul O determină șase unghiuri congruente în jurul acestui punct. Dacă x este măsura în grade a unuia dintre cele șase unghiuri, atunci x este egal cu \dots° .

FIXEAZĂ!

6. Desenează patru unghiuri AOB , BOC , COD , DOE , cu vârful comun punctul O , astfel încât oricare două să aibă interioarele disjuncte, iar unghiurile să aibă măsurile: 30° , 90° , 55° , respectiv 60° .

- Cele patru unghiuri sunt unghiuri în jurul punctului O ?
- Pe figura realizată, identifică un al cincilea unghi, astfel încât cele cinci unghiuri să fie unghiuri în jurul punctului O . Explică răspunsul dat.
- Pe figura realizată, identifică un al cincilea unghi, astfel încât cele cinci unghiuri să nu fie unghiuri în jurul punctului O . Justifică răspunsul dat.

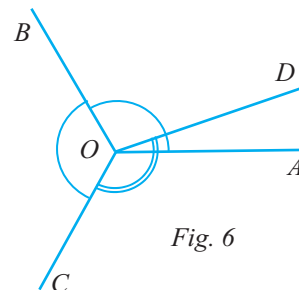


Fig. 6

7. Observă cele trei unghiuri din figura 6, unde $\sphericalangle AOB = 120^\circ$, $\sphericalangle BOC = 120^\circ$ și $\sphericalangle COD = 140^\circ$.

- Numește vârful celor trei unghiuri.
- Calculează suma măsurilor celor trei unghiuri.
- Justifică în două moduri că cele trei unghiuri nu sunt unghiuri în jurul punctului O .

8. Un unghi AOB este alungit, semidreapta OC este astfel încât $\sphericalangle AOC = 5 \cdot \sphericalangle COB$, punctele D și C sunt situate de o parte și de alta a dreptei AB și $\sphericalangle AOD = 2 \cdot \sphericalangle COB$.

- Calculează măsurile unghiurilor AOC și COB .
- Arată că unghiurile AOC , COB , BOD și DOA sunt unghiuri în jurul punctului O .

FII CAMPION!

9. Se notează cu O punctul de intersecție a două drepte concurente a și b . Rezultă patru unghiuri proprii, cu vârful O comun.

- Demonstrează că cele patru unghiuri sunt unghiuri în jurul punctului O .
- Dacă suma măsurilor a trei dintre unghiuri este de $322^\circ 23'$, calculează măsura fiecărui unghi.

10. Două unghiuri proprii AOB și BOC au interioarele disjuncte (fără puncte comune). Notăm cu x și y măsurile unghiurilor AOB , respectiv BOC , exprimate în grade. Dacă $x + y > 180^\circ$, demonstrează că unghiurile AOB , BOC , AOC sunt unghiuri în jurul punctului O .

Lecția 4. Unghiuri suplementare. Unghiuri complementare. Unghiuri adiacente

Rezolvăm împreună și descoperim noțiuni noi

1. Dintre trei semidrepte distincte OA , OB și OC , cu originea comună O , semidreptele OA și OB sunt semidrepte opuse. Calculează suma măsurilor unghiurilor AOC și BOC .

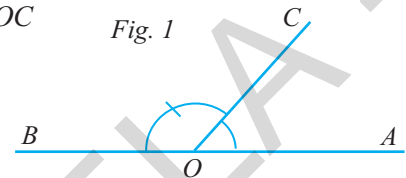
Rezolvare:

Desenăm semidreptele opuse OA și OB , apoi desenăm semidreapta OC (figura 1).

Observăm că $\sphericalangle AOC + \sphericalangle COB = \sphericalangle AOB$.

Dar unghiul AOB este alungit, deci $\sphericalangle AOB = 180^\circ$.

Rezultă că $\sphericalangle AOC + \sphericalangle COB = 180^\circ$.



Observație:

Deoarece suma măsurilor unghiurilor AOB și BOC este 180° , se spune că unghiurile sunt *unghiuri suplementare*.

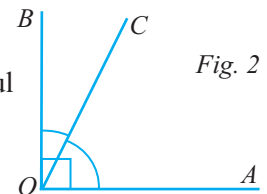
2. Dacă unghiul AOB este drept și C este un punct interior unghiului AOB , calculează suma măsurilor unghiurilor AOC și BOC (figura 2).

Rezolvare:

Folosind echerul, desenăm un unghi drept AOB , desenăm un punct C în interiorul unghiului AOB și apoi desenăm semidreapta OC . Observăm că $\sphericalangle AOC + \sphericalangle COB = \sphericalangle AOB$.

Dar unghiul AOB este drept, deci $\sphericalangle AOB = 90^\circ$.

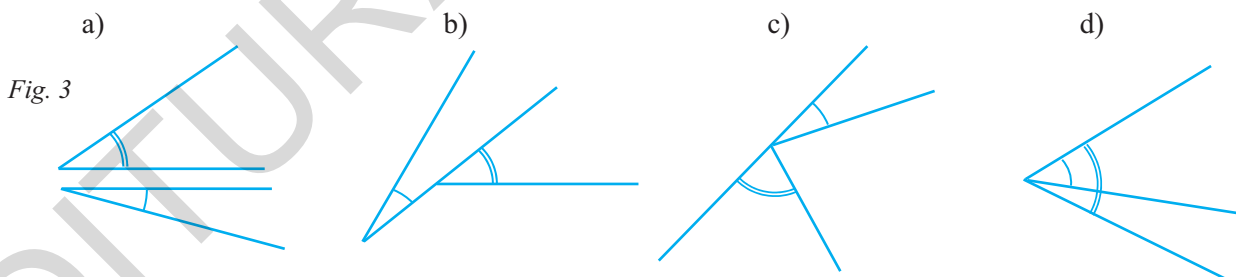
Rezultă că $\sphericalangle AOC + \sphericalangle COB = 90^\circ$.



Observație:

Deoarece suma măsurilor unghiurilor AOB și BOC este 90° , se spune că unghiurile sunt *unghiuri complementare*.

3. Despre o pereche de unghiuri care au vârful comun, o latură comună și interioarele disjuncte se spune că sunt *unghiuri adiacente*. Explică, pentru fiecare pereche de unghiuri din figura 3, de ce nu sunt unghiuri adiacente.



Rezolvare:

Cele două unghiuri nu sunt adiacente deoarece:

- unghiurile au interioarele disjuncte, dar nu au vârful comun și nici latură comună;
- unghiurile au interioarele disjuncte, dar nu au vârful comun și nici latură comună;
- unghiurile au vârful comun, interioarele disjuncte, dar nu au latură comună;
- unghiurile au vârful comun, o latură comună, dar interioarele lor nu sunt disjuncte.

CUPRINS

Capitolul I. UNGHIURI	5
Lecția 1. Recapitulare și completări	5
Lecția 2. Unghiuri opuse la vârf	8
Lecția 3. Unghiuri în jurul unui punct	11
Lecția 4. Unghiuri suplimentare. Unghiuri complementare. Unghiuri adiacente.....	14
Lecția 5. Bisectoarea unui unghi. Construcția bisectoarei unui unghi	17
<i>Recapitulare</i>	22
<i>Evaluare</i>	24
Capitolul II. PARALELISM ȘI PERPENDICULARITATE	26
Lecția 1. Drepte paralele. Axioma paralelelor	26
Lecția 2. Criterii de paralelism (unghiuri formate de două drepte paralele cu o secantă).....	32
Lecția 3. Drepte perpendiculare în plan. Oblice. Distanța de la un punct la o dreaptă	37
Lecția 4. Mediatoarea unui segment. Simetria față de o dreaptă	41
Lecția 5. Aplicații practice în poligoane și în corpuri geometrice	46
<i>Recapitulare</i>	49
<i>Evaluare</i>	51
Capitolul III. CERCUL	53
Lecția 1. Cerc (construcție, definiție, elementele unui cerc).....	53
Lecția 2. Unghi la centru	57
Lecția 3. Pozițiile unei drepte față de un cerc. Pozițiile relative a două cercuri	61
Lecția 4. Aplicații practice în poligoane și în corpuri geometrice	65
<i>Recapitulare</i>	67
<i>Evaluare</i>	69
Capitolul IV. TRIUNGHIUL	71
Lecția 1. Triunghiul (definiția și elementele unui triunghi, perimetru, suma măsurilor unghiurilor, unghi exterior, teorema unghiului exterior, clasificarea triunghiurilor).....	71
Lecția 2. Construcția triunghiurilor. Inegalități între elementele triunghiului	76
Lecția 3. Linii importante în triunghi.....	81
Lecția 4. Congruența triunghiurilor	87
Lecția 5. Metoda triunghiurilor congruente. Aplicații	92
Lecția 6. Proprietățile triunghiului isoscel și ale triunghiului echilateral	97
Lecția 7. Proprietățile triunghiului dreptunghic	102
<i>Recapitulare</i>	107
<i>Evaluare</i>	109
Soluții	111