8

Maria Zaharia
Dan Zaharia

GEOMETRIA
în gimnaziu

Explicații și rezolvări complete

Editura Paralela 45

Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programa școlară în vigoare pentru clasa a VIII-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Redactare: Iuliana Ene, Andreea Roşca
Tehnoredactare: Adriana Vlădescu, Roxana Pietreanu
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
ZAHARIA, MARIA
Geometria în gimnaziu : explicaţii şi rezolvări complete : clasa a VIII-a /
Maria Zaharia, Dan Zaharia. - Piteşti : Paralela 45, 2022
ISBN 978-973-47-3714-7

I. Zaharia, Dan

51

COMENZI – CARTEA PRIN POŞTĂ

EDITURA PARALELA 45
Bulevardul Republicii, Nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești,
jud. Argeș, cod 110177
Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918
Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492
E-mail: comenzi@edituraparalela45.ro

www.edituraparalela45.ro

Tiparul executat la tipografia *Editurii Paralela 45*
E-mail: tipografie@edituraparalela45.ro

Capitolul I
ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAŢIU

Lecţia 1. Puncte, drepte, plane. Determinarea planului. Relaţii între puncte, drepte şi plane

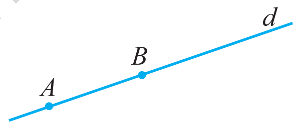
1. PUNCTE, DREPTE, PLANE

Cu noțiunile de *punct*, *dreaptă*, *plan* ne-am întâlnit încă din clasa a V-a. Am învățat atunci că aceste noțiuni sunt *noțiuni primare, fundamentale* care nu se definesc. Noțiunile de *punct*, *dreaptă*, *plan* au fost reprezentate în plan prin desene, folosind anumite convenții de notare.

În clasa a VIII-a facem cunoștință cu geometria în spațiu. Toate axiomele geometriei plane și toate rezultatele învățate în geometria plană rămân valabile și în geometria în spațiu.

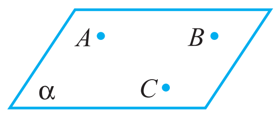
Geometria în spațiu se bazează pe următoarele *axiome*:

1. Axioma dreptei: *Prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una.* Dacă A și B sunt cele două puncte, atunci dreapta care trece prin cele două puncte se notează cu AB și spunem că este *dreapta determinată de punctele A și B*.

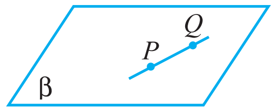


2. Axioma paralelelor sau axioma lui Euclid: *Într-un plan, printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o paralelă la dreapta respectivă și numai una.* Dacă d este dreapta și M este un punct exterior dreptei d, atunci dreapta d', care trece prin punctul M, este paralela la dreapta d. Notăm $d' \parallel d$.

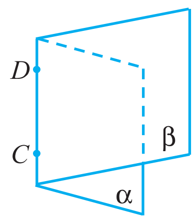
3. Axioma planului: *Prin trei puncte necoliniare trece un plan și numai unul. În orice plan există cel puțin trei puncte necoliniare.* Dacă A, B și C sunt cele trei puncte necoliniare, atunci *planul determinat* de ele se notează cu (ABC). În figura alăturată, în planul α sunt puse în evidență cele trei puncte care îl determină. Planul α coincide cu planul (ABC). Notăm $\alpha = (ABC)$.



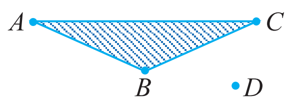
4. Axioma includerii: *Dacă două puncte distincte ale unei drepte aparțin unui plan, atunci dreapta determinată de aceste puncte este inclusă în plan.* Dacă P și Q sunt cele două puncte distincte care aparțin unui plan β, atunci dreapta determinată de ele este inclusă în plan. Dacă $P \in \beta$, $Q \in \beta$, $P \neq Q$, atunci $PQ \subset \beta$.



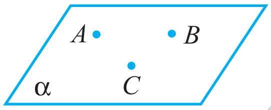
5. Axioma de intersecție a planelor: *Dacă două plane distincte au un punct comun, atunci ele se intersectează după o dreaptă care trece prin acel punct.* Dacă C este punctul comun planelor distincte α și β, atunci cele două plane mai au cel puțin un punct comun D, $D \neq C$ și intersecția lor este dreapta CD.



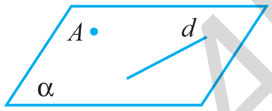
6. Axioma spațiului: *În spațiu există cel puțin patru puncte care nu sunt situate în același plan, numite puncte necoplanare.* În figura alăturată, punctele necoliniare A, B, C determină în mod unic planul (ABC) și punctul D este exterior planului (ABC), $D \notin (ABC)$. În acest caz, punctele A, B, C, D sunt puncte necoplanare, adică nu există un plan care să le conțină.



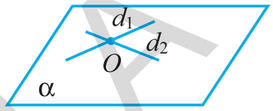
2. DETERMINAREA PLANULUI



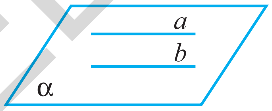
- **Axioma planului:** *Trei puncte necoliniare determină un plan* α. Dacă A, B, C sunt trei puncte necoliniare, atunci ele determină în mod unic un plan α. Notăm $\alpha = (ABC)$.



- *O dreaptă și un punct exterior determină un plan.* Dacă punctul A este exterior dreptei d, $A \notin d$, atunci dreapta d împreună cu punctul A determină în mod unic un plan α. Notăm $\alpha = (d, A)$.



- *Două drepte concurente determină un plan.* Dacă d_1 și d_2 sunt două drepte concurente, $d_1 \cap d_2 = \{O\}$, atunci ele determină în mod unic un plan α. Notăm $\alpha = (d_1, d_2)$.



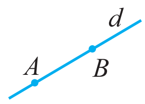
- *Două drepte paralele determină un plan.* Dacă a și b sunt două drepte paralele, $a \parallel b$, atunci ele determină în mod unic un plan α. Notăm $\alpha = (a, b)$.

Observaţie:

A determina un plan înseamnă a preciza numărul minim de elemente (puncte sau drepte) necesare pentru a-l identifica, pentru a ști cu exactitate unde se află acesta într-o configurație.

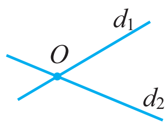
3. RELAȚII ÎNTRE PUNCTE, DREPTE ȘI PLANE

A. Pozițiile relative a două drepte în spațiu



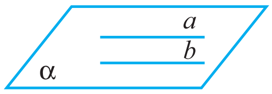
- Două drepte sunt *identice* (*confundate* sau *coincid*) dacă au două puncte distincte comune.

Exemplu: Dacă $A, B \in d$, $A \neq B$, atunci dreapta AB coincide cu dreapta d.



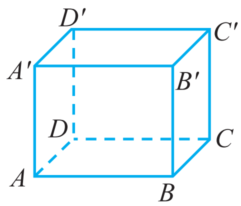
- Două drepte sunt *concurente* dacă au un punct comun.

Exemplu: Dacă d_1 și d_2 au un punct comun, $d_1 \cap d_2 = \{O\}$, atunci d_1 și d_2 sunt drepte concurente.



- Două drepte sunt *paralele* dacă sunt coplanare și nu au puncte comune.

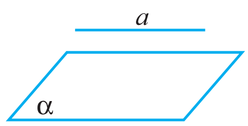
Exemplu: Dacă $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$, $a \cap b = \varnothing$, atunci $a \parallel b$.



- Două drepte sunt *necoplanare* dacă nu au puncte comune și nu sunt paralele.

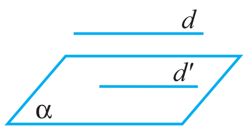
Exemplu: În figura alăturată, dreapta AA' este *necoplanară* cu dreapta BC, cu dreapta CD, cu dreapta $B'C'$, cu dreapta $C'D'$.

B. Pozițiile relative ale unei drepte față de un plan



- **Dreaptă paralelă cu planul:** *dreapta și planul nu au niciun punct comun.*

Dacă o dreaptă a nu are niciun punct comun cu un plan α, atunci dreapta a este paralelă cu planul α și notăm $a \parallel \alpha$.



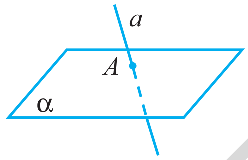
Teoremă: O dreaptă d este paralelă cu un plan α dacă și numai dacă dreapta d nu este inclusă în planul α și este paralelă cu o dreaptă d', conținută în planul α.

Dacă $d \not\subset \alpha$, $d \parallel d'$ și $d' \subset \alpha$, atunci dreapta d este paralelă cu planul α și notăm $d \parallel \alpha$.

- **Dreaptă secantă planului:** *dreapta și planul au un singur punct comun.*

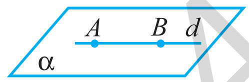
Dacă o dreaptă a are un singur punct comun cu un plan α, spunem că dreapta intersectează planul sau „înțeapă” planul sau este secantă planului.

Dacă $a \cap \alpha = \{A\}$, atunci dreapta a este secantă planului α.



- **Dreaptă inclusă în plan:** *dreapta și planul au cel puțin două puncte comune.*

Dacă o dreaptă d are cel puțin două puncte comune cu un plan α, spunem că dreapta d este inclusă în planul α sau că dreapta d este conținută în planul α.



Observație:

Conform axiomei includerii: *Dacă două puncte distincte ale unei drepte sunt conținute într-un plan, atunci dreapta determinată în mod unic de cele două puncte este conținută în acel plan*, rezultă că este *suficient* ca două puncte distincte ale unei drepte să fie într-un plan pentru a ne asigura că dreapta este inclusă în acel plan. Dacă A și B sunt două puncte distincte ale unei drepte d ($A \in d$, $B \in d$) și cele două puncte se află într-un plan α ($A \in \alpha$, $B \in \alpha$), atunci dreapta d se află în planul α, adică dreapta d este inclusă în planul α ($d \subset \alpha$). Dreapta d și dreapta determinată de punctele A și B coincid.

EXERSEAZĂ!

1. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.

a) Patru puncte care nu sunt situate în același plan se numesc puncte necoliniare. A F

b) Dacă o dreaptă are două puncte distincte comune cu un plan, atunci dreapta este conținută în acel plan. A F

c) Două plane care au un punct comun sunt plane identice. A F

2. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

a) Printr-un punct, se poate/pot construi:

A. două drepte distincte; B. trei drepte distincte; C. o singură dreaptă; D. o infinitate de drepte.

b) Prin două puncte distincte, se poate/pot construi:

A. un plan; B. două plane; C. trei plane; D. o infinitate de plane.

c) Un plan este determinat de:

A. două puncte distincte; B. trei puncte coliniare;

C. două drepte concurente; D. o dreaptă.

3. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

a) Prin două puncte distincte se poate/pot construi:

A. o singură dreaptă; B. două drepte distincte; C. trei drepte distincte; D. o infinitate de drepte.

b) Dacă punctele distincte A și B sunt situate în planul α, iar punctul C nu aparține planului α, atunci:

A. $AB \subset \alpha$; B. $AC \subset \alpha$; C. $BC \subset \alpha$; D. A, B, C sunt coliniare.

c) Patru puncte necoplanare pot determina:

A. două plane; B. trei plane; C. patru plane; D. șase plane.

4. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta.

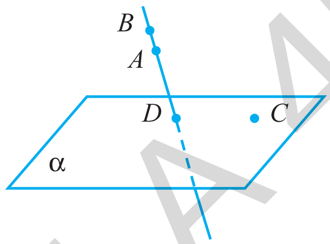
Se consideră punctele A, B, C, D necoplanare și se notează cu M și N mijloacele segmentelor AB, respectiv AC.

a) Punctul B nu aparține planului ...	1) (ABC);
b) Dreapta DM este inclusă în planul ...	2) (ABD);
c) Mijlocul segmentului MN este situat în planul ...	3) (ACD);
	4) (BCD).

5. Completează spațiul punctat cu răspunsul corect.

a) Cinci puncte distincte, oricare trei necoliniare, determină ... drepte distincte.
b) Patru puncte necoplanare determină ... plane distincte.
c) Se consideră cubul $ABCDEFGH$. Dreapta comună planelor (ABE) și (BCG) este ... .

FIXEAZĂ!



6. În figura alăturată, punctele A și B sunt exterioare planului α, C se află în planul α și $AB \cap \alpha = \{D\}$.
a) Scrie dreptele determinate de oricare două dintre punctele A, B, C, D.
b) Scrie planele determinate de oricare trei dintre punctele A, B, C, D.
c) Demonstrează că planele (ABC) și (BCD) coincid.

7. Punctele A, B, C sunt necoliniare și aparțin unui plan α, iar punctul M este exterior planului α.
a) Arată că $CB \subset \alpha$ și $AM \not\subset \alpha$.
b) Arată că $(ABC) = \alpha$.
c) Precizează dreapta comună planelor (MAB) și (BCM).

8. Se consideră punctele necoplanare M, N, P, Q și un punct R situat pe segmentul MN.
a) Realizează un desen care să corespundă datelor problemei.
b) Scrie trei drepte care conțin punctul M.
c) Scrie trei plane care conțin punctul R.

FII CAMPION!

9. Se consideră pătratul $ABCD$ și un punct V exterior planului (ABC).
a) Află numărul dreptelor determinate de oricare două dintre punctele A, B, C, D, V.
b) Află numărul planelor determinate de oricare trei dintre punctele A, B, C, D, V.

10. Se consideră semidreptele OA, OB, OC, astfel încât $\sphericalangle AOB = 90°$, $\sphericalangle BOC = 110°$ și $\sphericalangle AOC = 130°$. Demonstrează că punctele O, A, B, C sunt necoplanare.

Evaluare

Testul 1

I. Completează în căsuța alăturată fiecărui enunț litera A, dacă propoziția este adevărată, sau litera F, dacă propoziția este falsă.

(5p) **1.** Prisma cu cel mai mic număr de fețe este prisma patrulateră. ☐

(5p) **2.** Baza unei piramide regulate este un poligon regulat. ☐

(5p) **3.** Fețele laterale ale oricărei piramide regulate sunt dreptunghiuri. ☐

(5p) **4.** Un cilindru circular drept are lungimea razei bazei egală cu 6 cm și lungimea generatoarei egală cu 8 cm. Perimetrul desfășurării suprafeței laterale a cilindrului este egal cu $8 \cdot (3\pi + 2)$ cm. ☐

(5p) **5.** Desfășurarea suprafeței laterale a unui con circular drept este un sector de cerc cu lungimea razei de 18 cm și măsura unghiului de 120°. Raza bazei conului are lungimea egală cu 8 cm. ☐

(5p) **6.** O prismă triunghiulară regulată are toate muchiile congruente, având lungimea de 4 cm. Aria desfășurării prismei este egală cu $48\sqrt{3}\ \text{cm}^2$. ☐

II. Unește, prin săgeți, fiecare cifră corespunzătoare enunțurilor din coloana A cu litera care indică răspunsul corespunzător din coloana B.

Se consideră un tetraedru regulat *VABC* care are suma lungimilor tuturor muchiilor egală cu 72 cm.

A	B
(5p) **1.** Lungimea unei muchii a tetraedrului este egală cu ...	a) $108\sqrt{3}\ \text{cm}^2$;
(5p) **2.** Suma tuturor ariilor fețelor laterale ale tetraedrului este egală cu ...	b) $12\sqrt{3}$ cm;
(5p) **3.** Aria desfășurării tetraedrului este egală cu ...	c) 12 cm;
(5p) **4.** Lungimea celui mai scurt drum al unui punct mobil care parcurge distanța de la punctul *A* la punctul *C*, deplasându-se pe suprafața laterală a tetraedrului, astfel încât să intersecteze muchia *VB* este egală cu ...	d) $144\sqrt{3}\ \text{cm}^2$; e) 6 cm.

III. Pentru fiecare enunț de mai jos, alege litera care indică singurul răspuns corect.

(10p) **1.** Desfășurarea suprafeței laterale a unui cub este dreptunghiul *MNPQ*. Dacă punctul *R* este situat pe segmentul *MN*, astfel încât $\frac{RN}{MN} = \frac{3}{4}$ și $RP = 6\sqrt{10}$ cm, atunci lungimea muchiei cubului este egală cu:

A. 12 cm; B. 10 cm; C. 6 cm; D. 18 cm.

(10p) **2.** Numărul fețelor unei prisme hexagonale este:

A. 8; B. 6; C. 7; D. 12.

(10p) **3.** Un cilindru circular drept are aria desfășurării suprafeței laterale egală cu $64\pi\ \text{cm}^2$. Dacă lungimea generatoarei este egală cu 8 cm, atunci lungimea razei bazei cilindrului este egală cu:

A. 8 cm; B. 6 cm; C. 2 cm; D. 4 cm.

(10p) **4.** Desfășurarea suprafeței laterale a unui con circular drept este un sector de cerc determinat de un unghi la centru cu măsura de 150° și care are aria egală cu $15\pi\ \text{cm}^2$. Lungimea generatoarei conului este egală cu:

A. 5 cm; B. 6 cm; C. 10 cm; D. 8 cm.

Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota se obține împărțind punctajul final la 10.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	I.5	I.6	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4
Punctajul														
Nota														

TESTUL 2

I. Completează în căsuța alăturată fiecărui enunț litera A, dacă propoziția este adevărată, sau litera F, dacă propoziția este falsă.

(5p) **1.** Prisma care are șase fețe este o prismă hexagonală.

(5p) **2.** Piramida cu șase muchii, toate de aceeași lungime, se numește tetraedru regulat.

(5p) **3.** Fețele laterale ale unei prisme regulate sunt triunghiuri isoscele.

(5p) **4.** O piramidă care are ca bază un triunghi echilateral este un tetraedru regulat.

(5p) **5.** Un con circular drept are lungimea razei egală cu 6 cm și lungimea generatoarei egală cu 10 cm. Aria desfășurării suprafeței laterale a conului este egală cu 72π cm^2.

(5p) **6.** Desfășurarea suprafeței laterale a unui cilindru circular drept este un pătrat cu lungimea laturii egală cu 24π cm. Diametrul bazei cilindrului are lungimea de 12 cm.

II. Unește, prin săgeți, fiecare cifră corespunzătoare enunțurilor din coloana A cu litera care indică răspunsul corespunzător din coloana B.

Se consideră o piramidă hexagonală regulată $VABCDEF$. Lungimea muchiei laterale a piramidei este de 10 cm, iar măsura unghiului AVB este egală cu 30°.

	A	B
(5p)	**1.** Lungimea laturii bazei piramidei hexagonale regulate este egală cu ...	a) 10 cm;
(5p)	**2.** Aria desfășurării suprafeței laterale a piramidei hexagonale regulate este ...	b) 150 cm^2;
(5p)	**3.** Lungimea celui mai scurt drum al unui punct mobil care parcurge distanța de la punctul A la punctul C, deplasându-se pe suprafața laterală a piramidei, astfel încât să intersecteze muchia VB este egală cu ...	c) $10\sqrt{2-\sqrt{3}}$ cm; d) $150\sqrt{3}$ cm^2;
(5p)	**4.** Lungimea celui mai scurt drum al unui punct mobil care parcurge distanța de la punctul A la punctul D, deplasându-se pe suprafața laterală a piramidei, astfel încât să intersecteze muchiile BV și CV este egală cu ...	e) $10\sqrt{2}$ cm.

III. Pentru fiecare enunț de mai jos, alege litera care indică singurul răspuns corect.

(10p) **1.** Două cuburi cu muchiile de 4 cm se alătură, astfel încât să se obțină un paralelipiped dreptunghic. Suma tuturor muchiilor paralelipipedului obținut este egală cu:

A. 48 cm; B. 96 cm; C. 64 cm; D. 90 cm.

(10p) **2.** Desfășurarea suprafeței laterale a unui con circular drept este un sector de cerc determinat de un unghi la centru cu măsura de 120° și aria egală cu 12π cm^2. Lungimea generatoarei conului este egală cu:

A. 6 cm; B. 12 cm; C. 18 cm; D. 15 cm.

(10p) **3.** Dacă o față a unui tetraedru regulat are aria $18\sqrt{3}$ cm^2, atunci lungimea muchiei tetraedrului este egală cu:

A. 9 cm; B. $6\sqrt{2}$ cm; C. $6\sqrt{3}$ cm; D. $9\sqrt{3}$ cm.

(10p) **4.** Se consideră o prismă triunghiulară regulată cu toate muchiile congruente. Dacă aria desfășurării prismei este egală cu $36\sqrt{3}(1+2\sqrt{3})$ cm^2, atunci lungimea muchiei prismei este egală cu:

A. 9 cm; B. $6\sqrt{2}$ cm; C. $6\sqrt{3}$ cm; D. 6 cm.

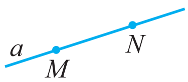
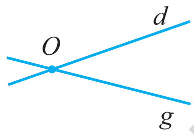
Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota se obține împărțind punctajul final la 10.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	I.5	I.6	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4
Punctajul														
Nota														

Capitolul III
PARALELISM ÎN SPAŢIU

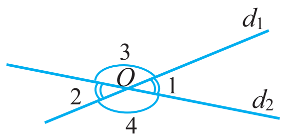
Lecţia 1. Drepte paralele. Unghiul a două drepte în spaţiu

În spaţiu două drepte pot fi coplanare sau necoplanare.

Drepte coplanare			Drepte necoplanare
identice (coincid)	paralele	concurente	
			
$M \in a$, $N \in a$	$d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow d_1$ și d_2 coplanare și $d_1 \cap d_2 = \varnothing$	$d \cap g = \{O\}$	$b \cap e = \varnothing$
Dreptele a și MN sunt identice (coincid).	Două drepte sunt paralele dacă și numai dacă sunt coplanare și nu au niciun punct comun.	Două drepte sunt concurente dacă și numai dacă au un singur punct comun.	Două drepte sunt necoplanare dacă nu au niciun punct comun și nu sunt paralele.

Reţine!

- Dacă două drepte sunt identice, atunci unghiul celor două drepte este **nul**.
- Dacă două drepte sunt paralele, adică $d_1 \parallel d_2$, atunci unghiul celor două drepte este **nul**.
- Dacă două drepte sunt concurente, atunci în planul determinat de acestea, cele două drepte formează patru unghiuri în jurul punctului de intersecție, două câte două opuse la vârf.



Prin *măsura unghiului format de dreptele d_1 și d_2* înțelegem cea mai mică dintre măsurile celor patru unghiuri formate în jurul punctului O și notăm $\sphericalangle(d_1, d_2)$.

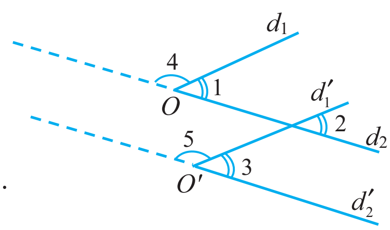
În cazul nostru, $\sphericalangle(d_1, d_2) = \sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$.

Observaţie:

Pentru unghiul format de două drepte d_1 și d_2 și pentru măsura acestui unghi se folosește aceeași notație, $\sphericalangle(d_1, d_2)$. Din contextul problemei ne vom da seama dacă este vorba despre unghi sau despre măsura unghiului.

Teoremă:

Două unghiuri cu laturile respectiv paralele sunt congruente dacă ambele sunt ascuțite sau ambele sunt obtuze și sunt suplementare dacă unul este ascuțit și celălalt obtuz.



Spre exemplificare, vom considera cazul când două unghiuri cu laturile respectiv paralele sunt situate în același plan.

Reformulăm teorema:

Ipoteza: $d_1 \parallel d_1'$, $d_2 \parallel d_2'$, $d_1 \cap d_2 = \{O\}$; $d_1' \cap d_2' = \{O'\}$.

Concluzia: a) $\sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle 3$; $\sphericalangle 4 \equiv \sphericalangle 5$; b) $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 5 = 180°$; $\sphericalangle 3 + \sphericalangle 4 = 180°$.

Demonstrație:

a) Suntem în cazul în care unghiurile cu laturile respectiv paralele sunt situate în același plan, adică $(d_1, d_2) = (d_1', d_2')$. Dreapta d_1' intersectează dreapta d_2 căci în caz contrar am avea prin punctul O două paralele la dreapta d_2 ($d_1' \parallel d_2'$ și $d_1 \parallel d_2$), ceea ce ar contrazice axioma paralelelor.

Avem $\sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle 2$, ca unghiuri corespondente formate de dreptele $d_1 \parallel d_1'$ și secanta d_2.

Analog, $\sphericalangle 3 \equiv \sphericalangle 2$, ca unghiuri corespondente formate de dreptele $d_2 \parallel d_2'$ și secanta d_1'. Din (1) și (2) rezultă $\sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle 3$.

Cum $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 4 = 180°$, $\sphericalangle 3 + \sphericalangle 5 = 180°$ și $\sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle 3$, rezultă $\sphericalangle 4 \equiv \sphericalangle 5$.

b) Din $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 4 = 180°$ și $\sphericalangle 4 \equiv \sphericalangle 5$, rezultă $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 5 = 180°$.

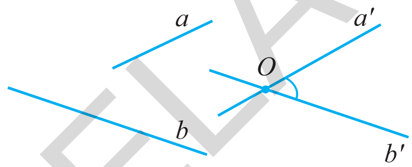
Din $\sphericalangle 3 + \sphericalangle 5 = 180°$ și $\sphericalangle 4 \equiv \sphericalangle 5$, rezultă $\sphericalangle 3 + \sphericalangle 4 = 180°$.

Observaţie:

Teorema rămâne valabilă și dacă unghiurile cu laturile respectiv paralele sunt situate în plane diferite.

Prin **unghiul a două drepte necoplanare** a și b înțelegem unghiul format de paralelele la cele două drepte, printr-un punct fixat O oarecare.

Dacă $a' \parallel a$, $b' \parallel b$ și $a' \cap b' = \{O\}$, atunci $\sphericalangle(a, b) = \sphericalangle(a', b')$.

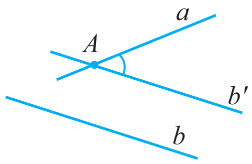


Cum punctul poate fi oarecare, rezultă că putem să ducem, printr-un punct al unei drepte, paralela la cealaltă și putem reformula *definiția*:

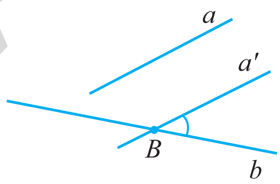
Prin *unghiul format de două drepte necoplanare oarecare a și b* înțelegem:

– unghiul format de dreapta a cu o paralelă la b, printr-un punct oarecare al dreptei a sau

– unghiul format de dreapta b cu o paralelă la a, printr-un punct oarecare al dreptei b.



sau



Dacă $A \in a$, $b' \parallel b$ și $A \in b'$, atunci $\sphericalangle(a, b) = \sphericalangle(a, b')$. Dacă $B \in b$, $a' \parallel a$ și $B \in a'$, atunci $\sphericalangle(a, b) = \sphericalangle(a', b)$.

Observaţii:

1. După cum se poate observa, măsura unghiului a două drepte necoplanare nu depinde de poziția punctului ales pentru a duce paralele la cele două drepte.
2. În probleme este convenabil să folosim cea de-a doua definiție, adică printr-un punct al uneia dintre drepte să ducem paralelă la cealaltă dreaptă.
3. Uneori, în aplicații există deja printr-un punct al unei drepte paralelă la cealaltă dreaptă, iar noi trebuie doar să evidențiem care este unghiul și să justificăm alegerea făcută.

EXERSEAZĂ!

1. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.

Se consideră o prismă triunghiulară regulată $MNPM'N'P'$ cu toate muchiile congruente.

a) Unghiul format de dreptele MM' și NP este drept. A F

b) Unghiul format de dreptele NN' și MP' are măsura egală cu 30°. A F

c) Măsura unghiului format de dreptele MP și NN' este egală cu 45°. A F

d) Măsura unghiului format de dreptele $M'N$ și $P'P$ este egală cu 60°. A F

2. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$.

a) Numărul muchiilor cubului paralele cu dreapta AA' este egal cu:

A. 4; B. 2; C. 3; D. 6.

b) Perechea de muchii situate pe drepte paralele este:

A. (AD, CC'); B. $(AB, B'C')$; C. $(BC, A'B')$; D. $(CD, A'B')$.

CUPRINS