Dorin Andrica Dorel Duca Gheorghe Lobonț

Concursul interjudețean de MATEMATICĂ „Marian Țarină”

Volumul I
(2001-2010)

Editura Paralela 45

Design copertă: Marius Badea
Pregătire de tipar: Marius Badea

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
ANDRICA, DORIN
Concursul interjudețean de matematică „Marian Țarină" / Dorin Andrica, Dorel Duca, Gheorghe Lobonț. - Pitești : Paralela 45, 2023
2 vol.
ISBN 978-973-47-3848-9
Vol. 1 : (2001-2010). - 2023. - ISBN 978-973-47-3849-6

I. Duca, Dorel
II. Lobonț, Gheorghe

51

Cuprins

Cuvânt înainte

Dacă ştiinţele matematice sunt o piramidă de stilizări, a face matematică înseamnă a învăţa stilizarea (modelarea) situaţiilor concrete şi a operaţiilor efectuate asupra lor. Matematica este o şcoală a rigorii. Profesorii văd fondul vocaţiei lor în faptul că învăţarea matematicii are semnificaţie pentru ei în măsura în care contribuie la dezvoltarea intelectuală a elevilor. Ei formează inteligenţe în sensul propriu al termenului, le dau o structură, atunci când ea nu este decât virtuală, îi învaţă să gândească riguros şi să îşi utilizeze propriile capacităţi.

Concursurile de matematică, dar nu numai de matematică, au în primul rând rolul de socializare. Elevul care participă la un concurs întâlneşte colegi din alte clase, de la alte şcoli, din alte localităţi, din alte ţări şi cunoaşte alţi profesori. Profesorul care merge cu elevii la un concurs cunoaşte alţi elevi, se întâlneşte sau se reîntâlneşte cu alţi colegi şi, de ce nu, cu unii din profesorii lui... Pe de altă parte, concursurilor au rolul de a răspunde unei necesităţi sufleteşti a candidaţilor: Care este nivelul meu de pregătire în comparaţie cu colegii mei?

Urmărind aceste idei, prof. Mariana Ursu şi prof. Gheorghe Lobonţ, au iniţiat în anul 2001, la Colegiul Naţional „Mihai Viteazul” din Turda, Concursul Interjudeţean de Matematică „Marian Ţarină”. Numele concursului este dat de Marian Ţarină (1932-1992), fost elev al liceului „Regele Ferdinand”, actualmente Colegiul Naţional „Mihai Viteazul” din Turda. Acesta a fost unul dintre marii profesori de la Facultatea de Matematică şi Informatică a Universităţii „Babeş-Bolyai” din Cluj-Napoca, cu multiple preocupări legate de matematica de nivel preuniversitar şi colaborator la Gazeta Matematică. În primul an concursul a avut loc iarna şi s-a adresat doar elevilor de liceu. Din anul următor a fost extins şi la clasele de gimnaziu şi s-a desfăşurat în luna mai, după etapa naţională a Olimpiadei de Matematică. Observând că după etapa naţională a olimpiadelor interesul elevilor pentru concursuri scade, în ultimii ani concursul s-a desfăşurat înaintea Olimpiadei Naţionale de Matematică. Începând cu anul 2007 concursul a fost extins şi pentru elevii claselor a IV-a.

Toate cele 19 ediţii de până acum s-au desfăşurat la Colegiul Naţional „Mihai Viteazul" din Turda sub atenta îndrumare a directorilor: prof. Mariana Ursu, prof. Gheorghe Lobonţ, prof. Alexandra Zamfir. Încă de la început concursul s-a bucurat de un sprijin substanţial din partea unor cadre didactice de la Facultatea de Matematică şi Informatică a Universităţii „Babeş-Bolyai" din Cluj-Napoca, în ceea ce priveşte întocmirea subiectelor şi coordonarea corecturii lucrărilor participanţilor. Preşedintele tuturor ediţiilor a fost prof. univ. dr. Dorel I. Duca.

Problemele propuse la cele 19 ediţii sunt conţinute în prezentele două volume. Primul volum acoperă perioada 2001-2010 iar al doilea perioada 2011-2019, împreună conţinând 640 probleme cu grad ridicat de dificultate însoţite de rezolvări complete. Ne exprimăm speranţa că această lucrare este utilă atât elevilor cât şi profesorilor în procesul de pregătire pentru concursurile de matematică.

Capitolul 1

Enunţuri

1.1 Ediţia I (23-25 februarie 2001)

Clasa a IX-a

1. Să se rezolve ecuaţia:

$$\left(\left[\frac{x+1}{4}\right]+\left[\frac{x+4}{4^2}\right]+\left[\frac{x+4^2}{4^3}\right]+\ldots+\left[\frac{x+4^{n-1}}{4^n}\right]\right)$$
$$+\left(\left[\frac{x+2}{4}\right]+\left[\frac{x+2^3}{4^2}\right]+\left[\frac{x+2^5}{4^3}\right]+\ldots+\left[\frac{x+2^{2n-1}}{4^n}\right]\right)$$
$$+\left(\left[\frac{x+3}{4}\right]+\left[\frac{x+3\cdot 4}{4^2}\right]+\left[\frac{x+3\cdot 4^2}{4^3}\right]+\ldots+\left[\frac{x+3\cdot 4^{n-1}}{4^n}\right]\right)$$
$$=[x]-1,\ n\in\mathbb{N}^*.$$

Gheorghe Lobonţ

2. Fie numerele reale $a,b,c,d\in\left[0,\frac{1}{3}\right]$, astfel încât $a+b+c+d=1$. Să se arate că:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}\geq\sqrt{1-3a}+\sqrt{1-3b}+\sqrt{1-3c}+\sqrt{1-3d}.$$

Dorin Andrica

3. Să se arate că, în orice triunghi

$$\frac{m_a}{a\cdot s_a}+\frac{m_b}{b\cdot s_b}+\frac{m_c}{c\cdot s_c}\geq\frac{\sqrt{3}}{R},$$

unde a,b,c sunt lungimile laturilor, m_a, m_b, m_c sunt lungimile medianelor, s_a,s_b,s_c sunt lungimilor simedianelor interioare ale triunghiului, iar R este raza cercului circumscris triunghiului (simediana este simetrica unei mediane faţă de bisectoarea din acelaşi vârf).

Vasile Şerdean

4. Fie $\triangle ABC$ oarecare, M un punct în interiorul $\triangle ABC$ şi P un punct fixat în plan. Notăm cu $\overline{r_X} = \overline{PX}$ (vectorul de poziţie al punctului oarecare X din plan) şi cu S, S_A, S_B, S_C ariile triunghiurilor ABC, MBC, MCA, MAB. Să se arate că:

1) $\overline{r_M} = \dfrac{1}{S}(S_A \cdot \overline{r_A} + S_B \cdot \overline{r_B} + S_C \cdot \overline{r_C})$;

2) $\overline{r_I} = \dfrac{1}{a+b+c}(a \cdot \overline{r_A} + b \cdot \overline{r_B} + c \cdot \overline{r_C})$;

$\overline{r_H} = \dfrac{1}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}(\operatorname{tg} A \cdot \overline{r_A} + \operatorname{tg} B \cdot \overline{r_B} + \operatorname{tg} C \cdot \overline{r_C})$;

$\overline{r_O} = \dfrac{1}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}(\sin 2A \cdot \overline{r_A} + \sin 2B \cdot \overline{r_B} + \sin 2C \cdot \overline{r_C})$;

unde I, H, O sunt centrul cercului înscris, ortocentrul şi centrul cercului circumscris triunghiului ABC, a, b, c sunt lungimile laturilor BC, CA, AB iar A, B, C sunt măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

Ariana Stanca Văcăreţu, Daniel Văcăreţu

Clasa a X-a

1. Fie

$$\sqrt{2^x \cdot \lg(2y^4 + 5y^2 + 2)} + \sqrt{[2^x + \lg(y^2 + 2)] \cdot \lg(2y^2 + 1)}$$
$$+ \sqrt{[2^x + \lg(2y^2 + 1)] \cdot \lg(y^2 + 2)} = \sqrt{2} \cdot [2^x + \lg(2y^4 + 5y^2 + 2)].$$

Să se determine $x, y \in \mathbb{R}$.

Gheorghe Lobonţ

2. Membrii unei echipe sportive au tricourile numerotate de la 1 la n. Ei ocupă loc într-o tribună cu scaune numerotate de la 1 la m.

a) În câte moduri se poate face aşezarea?

b) Dar dacă în timpul aşezării exact k dintre sportivi are acelaşi număr pe tricou cât şi pe scaunul pe care îl ocupă (unde $k \le \min\{m, n\}$)?

Dorin Andrica

3. Determinaţi:

a) $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ astfel încât: $\sqrt{2 + \sqrt{2}} = 2 \cdot \cos \alpha$;

b) $n \in \mathbb{N}$ astfel încât:

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}+i\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)^n + 2^n = 0.$$

Ioan Popa

4. Fie $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$. Să se arate că: $|1+z| + |1+z^2| + |1+z^3| \geq 2$.
Când are loc egalitatea? Argumentaţi.

* * *

Clasa a XI-a

1. Calculaţi:

$$L = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2}\lim_{n\to\infty}\left(x - \sqrt[n]{(x-1^2)\cdot(x-2^2)\cdot\ldots\cdot(x-n^2)}\right)\right].$$

Dorel I. Duca

2. Fie $x_1 \in \mathbb{R}$ fixat şi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şirul definit prin recurenţa:

$$x_n = x_{n-1}^2 + x_{n-1} + 1,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$$

Calculaţi $L = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(x_{n+1}+1)^2}{(x_1^2+2)\cdot(x_2^2+2)\cdot\ldots\cdot(x_n^2+2)}$.

Dorel I. Duca

3. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $A^p + A^{p+1} = O_n$, $p \in \mathbb{N}^*$.
Dacă $B = A + I_n$, arătaţi că matricea

$$C = I_n + AB + \ldots + A^{p-1}B^{p-1}$$

este inversabilă.

Gheorghe Lobonţ

4. Fie

$$D = \begin{vmatrix} (a^2+1)^3 & (ab+1)^3 & (ac+1)^3 & (ad+1)^3 \\ (ab+1)^3 & (b^2+1)^3 & (bc+1)^3 & (bd+1)^3 \\ (ac+1)^3 & (bc+1)^3 & (c^2+1)^3 & (cd+1)^3 \\ (ad+1)^3 & (bd+1)^3 & (cb+1)^3 & (d^2+1)^3 \end{vmatrix}.$$

Să se calculeze determinantul D, punând rezultatul sub formă de produs.

Simion Miheţ

Clasa a XII-a

1. Fie
$$A=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ b & a\end{pmatrix}:\ a,b\in\mathbb{Z}\right\}.$$
Determinaţi morfismele de la inelul $(A,+,\cdot)$ la inelul $(\mathbb{Z},+,\cdot)$, unde operaţiile din inelul $(A,+,\cdot)$ sunt cele uzuale de adunare şi înmulţire a matricelor.

Dorel Miheţ

2. Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ fixat, $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$,
$$a_{ij}=\begin{cases} n-1, & \text{dacă}\quad i=j\\ -1, & \text{dacă}\quad i\neq j\end{cases},\qquad b_{ij}=1,\ \forall\, i,j\in\{1,\ldots,n\},$$
$$M_x=\frac{-x}{n}\cdot A+\frac{1}{n\cdot x^2}\cdot B\quad\text{şi}\quad G=\{M_x:\ x\in\mathbb{R}^*\}.$$
a) Arătaţi că $(G,\cdot)$ este grup comutativ izomorf cu grupul multiplicativ $(\mathbb{R}^*,\cdot)$.
b) Determinaţi $(M_x)^{2001}$.

Ioan Popa

3. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcţie derivabilă pe $[0,1]$, continuă pe $[0,1]$ şi
$$f(0)=f(1)=0.$$
Arătaţi că dacă $\varphi,\psi:[0,1]\to\mathbb{R}$ sunt definite prin:
$$\varphi(x)=\begin{cases} f(x)\cdot f'(x)\cdot\operatorname{ctg}\pi x, & \text{dacă}\quad x\in(0,1)\\ \left(\dfrac{f'(x)}{\pi}\right)^2, & \text{dacă}\quad x\in\{0,1\},\end{cases}$$
$$\psi(x)=\begin{cases} (f(x))^2\cdot(1+\operatorname{ctg}^2\pi x), & \text{dacă}\quad x\in(0,1)\\ \left(\dfrac{f'(x)}{\pi}\right)^2, & \text{dacă}\quad x\in\{0,1\},\end{cases}$$
atunci φ şi ψ sunt integrabile pe $[0,1]$ şi $\displaystyle\int_0^1\varphi(x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^1\psi(x)dx.$

Dorel I. Duca

4. Să se calculeze: $\displaystyle\int\frac{\sin x\cdot\cos x}{\sqrt{3+\sin 4x}}dx.$

* * *

De asemenea, pentru $n \in \mathbb{N}^*$ avem

$$\begin{aligned} 0 = f_n(x_n) = f_{n+1}(x_{n+1}) &= \frac{1}{(1-x_n)^k} - (kx+n) \\ &= \frac{1}{(1-x_n)^k} - (kx+n+1) + 1 \\ &= f_{n+1}(x_n) + 1, \end{aligned}$$

deci $f_{n+1}(x_n) < f_{n+1}(x_{n+1})$, de unde $x_n < x_{n+1}$, căci f_{n+1} este strict crescătoare. Astfel $(x_n)_{n\geq 1}$ este şir strict crescător. (4)

Din (3), (4) şi teorema lui Weierstrass de convergenţă pentru şiruri rezultă că $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent. Fie $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in [0,1]$. Folosind faptul că $f_n(x_n) = 0$ şi

$$f_n\left(1 - \frac{1}{\sqrt[k]{n}}\right) = -k\left(1 - \frac{1}{\sqrt[k]{n}}\right) < 0,$$

deducem că $1 \geq x_n > 1 - \dfrac{1}{\sqrt[k]{n}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. De aici, cu criteriul cleştelui, obţinem că $x = 1$.

2. *Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ de muchie a şi punctele $X \in (AB$, $Y \in (AD$, $Z \in (AA'$ astfel încât $AX = \alpha$, $AY = \beta$, $AZ = \gamma$ unde $\alpha, \beta, \gamma \in (a, 2a)$. Planul (XYZ) împarte cubul în două corpuri. Să se demonstreze că sferele situate în interiorul acestor corpuri, tangente planului (XYZ) şi feţelor triedrelor tridreptunghice cu vârfurile în A respectiv C' au raze egale dacă şi numai dacă*

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{2}{a}.$$

Daniel Văcăreţu

Soluţie. Considerăm sistemul de axe $Oxyz$ în care $O = A$, $(Ox = (AB$, $(OY = (AD$ şi $(Oz = (AA'$. Atunci $X(\alpha, 0, 0)$, $Y(0, \beta, 0)$ şi $Z(0, 0, \gamma)$ şi ecuaţia planului (XYZ) este

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} - 1 = 0.$$

Din enunţ cele două sfere sunt tangente planelor $(ABCD)$, $(ABB'A')$, $(ADD'A')$, (XYZ), respectiv $(BCC'B')$, $(CDD'C')$, (XYZ), deci au centrele pe AC' (căci $ABCDA'B'C'D'$ este cub), de unde rezultă imediat că P şi Q au coordonatele date de $P(p, p, p)$ şi $Q(q, q, q)$, cu $p, q > 0$. Atunci $d(P, (XYZ)) = p$ şi

$d(Q,(XYZ)) = a - q$ ceea ce revine la

$$\frac{\left|\frac{p}{\alpha}+\frac{p}{\beta}+\frac{p}{\gamma}-1\right|}{\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}}} = p,$$

respectiv

$$\frac{\left|\frac{q}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\frac{q}{\gamma}-1\right|}{\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}}} = a-q,$$

adică la

$$1 - p\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}\right) = p\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}}$$

respectiv

$$\frac{q}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\frac{q}{\gamma} = (a-q)\cdot\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}}$$

(căci modulele s-au explicitat ţinând cont că originea A şi P sunt de aceeaşi parte a lui (XYZ), respectiv A şi Q sunt separate de (XYZ)). Notând cu r_1 şi r_2 razele celor două sfere avem că $r_1 = p$ şi $r_2 = a - q$, unde

$$p = \left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}}\right)^{-1}$$

şi

$$a-q = \left[a\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)-1\right]\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}}\right)^{-1}.$$

Atunci $r_1 = r_2 = a - q \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma} = \frac{2}{a}$.

3. *Să se arate că ecuaţia*

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = 0,\ n \in \mathbb{N}^*$$

are cel mult o rădăcină reală.

Nicolae Lung

Soluţie. Fie $f_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$. Atunci $f_n'(x) = f_{n-1}(x)$ şi

$$f_n(x) = f_{n-1}(x) + \frac{x^n}{n!}. \tag{1}$$

Evident f_n nu are rădăcini pozitive. Pentru n impar, f_n are cel puţin o rădăcină negativă. Dacă $f_{2k-1}(x_0) = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} f_{2k}(x_0) > 0$ (2)
$f_1(x) = 1 + x$ este strict crescătoare pe $(-\infty, 0)$ cu rădăcina unică $x_1 < 0$.
Presupunem că f_{2k-1} este strict crescătoare cu rădăcina unică $x_{2k-1} < 0$. Avem

x	$-\infty$		x_{2k-1}		0
f_{2k+1}	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1
f_{2k}	∞	$\searrow$	$+$	$\searrow$	1
f_{2k-1}	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

Deci f_{2n+1} are o unică rădăcină negativă şi f_{2n} nu are rădăcini (are minim pozitiv conform (2)).

4. *Fie numărul natural p, $p < 2002$, fixat. Fie matricea $A = (a_{ik})_{\substack{1\le i\le 2002\\ 1\le k\le 2002}}$, unde $a_{ik} = (i+1)\cdot|k-1| + (i+2)\cdot|k-2| + \ldots + (i+p)\cdot|k-p|$. Calculaţi* $\det A$.

Octavian Agratini

Soluţie. Descompunem matricea A în produs $A = BC$, unde

$$B = \mathcal{M}_{2002,p}(\mathbb{R}),\ b_{ij} = i + j \quad \text{şi} \quad C = \mathcal{M}_{p,2002}(\mathbb{R}),\ c_{jk} = |k - j|.$$

Avem $\operatorname{rang} B \le p$, $\operatorname{rang} C \le p$ şi folosind proprietatea

$$\operatorname{rang} A \le \min\{\operatorname{rang} B, \operatorname{rang} C\},$$

obţinem $\operatorname{rang} A \le p < 2002$, deci $\det A = 0$.

Clasa a XII-a

1. *Să se determine grupurile $(G, \cdot)$ cu proprietatea că oricare ar fi H subgrup al lui G, $H \ne \{e\}$, (e – elementul neutru al grupului G) avem $(H, \cdot) \cong (G, \cdot)$.*

* * *

Soluţie. Este clar că G trebuie să aibă cel puţin două elemente pentru a satisface enunţul.

Cazul 1. $(G, \cdot)$ este grup finit. Fie $x \in G$, $x \ne e$. Dacă $ord(G) = n$, atunci $x^n = e$ şi notând cu $m = ord(x)$ atunci avem că $H = \{e, x, \ldots, x^{m-1}\}$ este subgrup al lui G (este subgrupul generat de x). Prin urmare (căci $(H,\cdot)\cong G(,\cdot)$ şi G este finit) rezultă că $m=n$ şi $G=H$, deci G este grup ciclic.

Vom demonstra că $n=ord(G)$ este număr prim. Presupunem prin absurd că $n=pq$, unde $p,q\in\mathbb{N}$, $p,q\geq 2$. Atunci

$$e=x^{pq}=(x^p)^q,$$

deci $ord(x^p)\leq q<n$, deci notând $m=ord(x^p)$,

$$H=\{e,x,x^{2p},\ldots,x^{p(m-1)}\}$$

este subgrup al lui G cu $m<n$ elemente, deci nu poate fi izomorf cu G, contradicţie.

Cazul 2. $(G,\cdot)$ este grup infinit. Fie $x\in G\setminus\{e\}$. Dacă $ord(x)=n$ este finit, atunci $H=\{e,x,\ldots,x^{n-1}\}$ este subgrup finit al grupului finit G, deci nu poate fi izomorf cu G. Prin urmare $ord(x)=\infty$, $\forall\ x\in G\setminus\{e\}$ şi considerând $H=\{x^n\mid n\in\mathbb{Z}\}$ avem că $(H,\cdot)$ este subgrup al lui G, $H\neq\{e\}$, deci $(H,\cdot)\cong(G,\cdot)$. Astfel am arătat că

$$G=\{x^k\mid k\in\mathbb{Z}\},\ \forall\ x\in G\setminus\{e\}.$$

Astfel de grupuri verifică condiţia din enunţ. Este clar că $(\mathbb{Z},+)\cong(G,\cdot)$ şi cum subgrupurile diferite de $\{0\}$ ale lui $\mathbb{Z}$ sunt cele de forma $n\mathbb{Z}$, cu $n\in\mathbb{N}^*$, subgrupurile lui G diferite de $\{e\}$ vor fi de forma $H_n=\{x^{nk}\mid k\in\mathbb{Z}\}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$, care evident sunt izomorfe cu G, un izomorfism fiind

$$g:H_n\to G,\ f(x^{nk})=x^k.$$

În concluzie $G=\{e,x,\ldots,x^{p-1}\}$ cu $p\geq 2$ număr prim sau

$$G=\{x^k\mid k\in\mathbb{Z}\},\ \forall\ x\in G\setminus\{e\}.$$

2. *Fie $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),+,\cdot)$ inelul matricelor pătratice de ordinul n cu elemente reale şi $C_n(\mathbb{R})$ mulţimea matricelor circulare de ordinul n cu elemente reale.*
(O matrice este circulară dacă elementele liniilor $2,3,\ldots,n$ se obţin prin permutarea circulară a elementelor primei linii).

a) Să se arate că dacă $A,B\in C_n(\mathbb{R})$, atunci $AB\in C_n(\mathbb{R})$.

b) Să se arate că $(C_n(\mathbb{R}),+,\cdot)$ este subinel a lui $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),+,\cdot)$.

c) Să se arate că grupurile $(C_n(\mathbb{R}),+,\cdot)$ şi $(\mathbb{R}_{n-1}[X],+,\cdot)$ sunt izomorfe, unde $(\mathbb{R}_{n-1}[X],+,\cdot)$ este grupul aditiv al polinoamelor cu coeficienţi reali de grad cel mult $n-1$.

Dorin Andrica

măsura în radiani a unghiului $\widehat{B}$, respectiv $\widehat{A}$. Aplicând teorema sinusurilor în triunghiurile CAD şi CDB rezultă

$$\frac{AC}{\sin\alpha} = \frac{CD}{\sin A} \quad \text{şi} \quad \frac{BC}{\sin(\pi-\alpha)} = \frac{CD}{\sin B}.$$

Înmulţind aceste ultime două egalităţi obţinem:

$$\frac{AC \cdot BC}{\sin^2\alpha} = \frac{CD^2}{\sin A \cdot \sin B},$$

şi atunci existenţa punctului D este echivalentă cu existenţa unei soluţii a ecuaţiei

$$\sin^2\alpha = \sin A \cdot \sin B.$$

3. *Dacă x şi y sunt numere reale astfel încât $xy \geq 0$, atunci demonstraţi că*

$$|xy-1| \leq \max\{|x^2-1|, |y^2-1|\}.$$

Octavian Agratini

Soluţie. • Dacă $x = 0$ sau $y = 0$ sau $x = y$, relaţia este evidentă.
• Ipoteza $xy \geq 0$ înseamnă
(i) x şi y pozitive sau
(ii) x şi y negative.
Dacă demonstrăm cazul (i), prin alegerea $x = -x$, $y = -y$ obţinem faptul că (ii) se reduce la (i). Astfel vom demonstra inegalitatea considerând doar situaţia:

$$x > 0,\ y > 0,\ x \neq y.$$

Pentru fixarea ideilor presupunem $x < y$. Vom folosi inegalităţile

$$a \leq \max\{a,b\},\ b \leq \max\{a,b\}. \tag{$*$}$$

Cazul 1. x şi y supraunitare.

$$1 \leq x < y \underset{|\cdot\, y}{\Rightarrow} y \leq xy < y^2 \tag{1}$$

$$|xy-1| = xy - 1 \underset{(1)}{<} y^2 - 1 = |y^2-1| \underset{(*)}{\leq} \max\{|x^2-1|, |y^2-1|\}.$$

Cazul 2. x şi y subunitare.

$$0 < x < y \leq 1 \underset{|\cdot\, x}{\Rightarrow} 0 < x^2 < xy \leq x \tag{2}$$

$$|xy-1| = 1 - xy < 1 - x^2 = |1-x^2| \underset{(*)}{\leq} \max\{|x^2-1|, |y^2-1|\}.$$

Cazul 3. $0 < x \leq 1 \leq y \overset{|\cdot x \quad |\cdot y}{\Longrightarrow} |xy-1| \leq \max\{|x^2-1|, |y^2-1|\}$.

3.1. Dacă $xy \leq 1$ avem

$$\begin{cases} x^2 \leq xy & (3) \quad \text{şi} \\ xy \leq y^2 & (4) \end{cases}$$

$$|xy-1| = 1 - xy \underset{(3)}{\leq} 1 - x^2 = |1-x^2| \underset{(*)}{\leq} \max\{|x^2-1|, |y^2-1|\}.$$

3.2. Dacă $xy > 1$ avem

$$|xy-1| = xy - 1 \underset{(4)}{\leq} y^2 - 1 = |y^2-1| \underset{(*)}{\leq} \max\{|x^2-1|, |y^2-1|\}.$$

4. *Fie ABC un triunghi oarecare şi fie punctele $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$ şi $C' \in (AB)$. Fie A^*, B^*, C^* punctele de intersecţie ale perechilor de drepte BB' şi CC', CC' şi AA', respectiv AA' şi BB'. Notăm cu R_{A_1}, R_{B_1}, R_{C_1} şi cu R_{A_2}, R_{B_2}, R_{C_2} razele cercurilor circumscrise triunghiurilor AB^*C', BC^*A', CA^*B' respectiv $AB'C^*$, $BC'A^*$, $CA'B^*$. Să se demonstreze că*

$$\frac{R_{A_1}}{R_{A_2}} \cdot \frac{R_{B_1}}{R_{B_2}} \cdot \frac{R_{C_1}}{R_{C_2}} = 1$$

dacă şi numai dacă dreptele AA', BB' şi CC' sunt concurente (altfel spus, punctele A^*, B^*, C^* coincid).

Daniel Văcăreţu

Soluţie. În triunghiul AB^*C' avem:

$$\frac{AB^*}{\sin[\pi - (A+\gamma_1)]} = 2R_{A_1} \Leftrightarrow R_{A_1} = \frac{AB^*}{2\sin(A+\gamma_1)}.$$

În triunghiul AB^*C avem:

$$\frac{AB^*}{\sin\gamma_1} = \frac{b}{\sin[\pi - (\gamma_1 + \alpha_2)]} \Leftrightarrow AB^* = \frac{b\sin\gamma_1}{\sin(\gamma_1+\alpha_2)}.$$

Rezultă

$$R_{A_1} = \frac{b\sin\gamma_1}{2\sin(A+\gamma_1)\sin(\gamma_1+\alpha)2}. \tag{1}$$

În triunghiul $AB'C^*$ avem:

$$\frac{AB'}{\sin(\alpha_1+\beta_2)} = 2R_{A_2} \Leftrightarrow R_{A_2} = \frac{AB'}{2\sin(\alpha_1+\beta_2)}.$$

În triunghiul ABB' avem:

$$\frac{AB'}{\sin\beta_2} = \frac{c}{\sin(C+\beta_1)} \Leftrightarrow AB' = \frac{c\sin\beta_2}{\sin(C+\beta_1)}.$$

Rezultă

$$R_{A_2} = \frac{c\sin\beta_2}{2\sin(C+\beta_1)\sin(\alpha_1+\beta_2)}. \tag{2}$$

Din (1) şi (2) rezultă

$$\frac{R_{A_1}}{R_{A_2}} = \frac{b}{c}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin(C+\beta_1)\sin(\alpha_1+\beta_2)}{\sin(A+\gamma_1)\sin(\gamma_1+\alpha_2)}. \tag{3}$$

Analog

$$\frac{R_{B_1}}{R_{B_2}} = \frac{c}{a}\cdot\frac{\sin\alpha_1}{\sin\gamma_2}\cdot\frac{\sin(A+\gamma_1)\sin(\beta_1+\gamma_2)}{\sin(B+\alpha_1)\sin(\alpha_1+\beta_2)} \tag{4}$$

$$\frac{R_{C_1}}{R_{C_2}} = \frac{a}{b}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin(\beta+\alpha_1)\sin(\gamma_1+\alpha_2)}{\sin(C+\beta_1)\sin(\beta_1+\gamma_2)} \tag{5}$$

Înmulţind relaţiile (3), (4) şi (5) obţinem:

$$\frac{R_{A_1}}{R_{A_2}}\cdot\frac{R_{B_1}}{R_{B_2}}\cdot\frac{R_{C_1}}{R_{C_2}} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}.$$

Prin urmare

$$\frac{R_{A_1}}{R_{A_2}}\cdot\frac{R_{B_1}}{R_{B_2}}\cdot\frac{R_{C_1}}{R_{C_2}} = 1 \Leftrightarrow \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = 1$$

$$\Leftrightarrow AA', BB', CC' \text{ concurente.}$$

Clasa a X-a

1. *Să se rezolve în* $\mathbb{R}$ *ecuaţia*

$$\frac{(2^x+3^x+5^x)^{10}}{10^{2x+8}} = 3375^{x-1}.$$

Gheorghe Lobonţ

Soluţie. Avem

$$\begin{aligned} 2^x+3^x+5^x &= 2^{x-1}+2^{x-1}+3^{x-1}+3^{x-1}+3^{x-1}+5\cdot 5^{x-1} \\ &\geq 10\cdot \sqrt[10]{2^{2x-2}\cdot 3^{3x-3}\cdot 5^{5x-5}} \\ &= 10\cdot \sqrt[10]{337500^{x-1}} \end{aligned}$$

şi atunci

$$\frac{(2^x+3^x+5^x)^{10}}{10^{2x+8}} \geq 3375^{x-1}$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $2^{x-1}=3^{x-1}=5^{x-1}$. Urmează că ecuaţia are o singură soluţie reală $x=1$.

2. *Considerăm numerele* $a_k=1+q+\ldots+q^{k-1}$, $b_k=a_1a_2\ldots a_k$, $k\in\mathbb{N}$, *unde* $q>0$ *este fixat. Pentru orice* n *natural fie*

$$s_{n,k}=\frac{b_n}{b_kb_{n-k}},\ 0\leq k\leq n.$$

Determinaţi numerele x_k *şi* y_k *astfel încât să aibă loc următoarele relaţii*

$$s_{n+1,k}=s_{n,k-1}+x_ks_{n,k},\ s_{n+1,k}=y_kq^{n+1}s_{n,k-1}+s_{n,k},\ 1\leq k\leq n.$$

Octavian Agratini

Soluţie. Avem

$$\begin{aligned} \frac{s_{n+1,k}-s_{n,k-1}}{s_{n,k}} &= \frac{b_k\cdot b_{n-k}}{b_n}\left(\frac{b_{n+1}}{b_k\cdot b_{n+1-k}}-\frac{b_n}{b_{k-1}\cdot b_{n+1-k}}\right) \\ &= \frac{b_{n-k}b_{n+1}}{b_nb_{n+1-k}}-\frac{b_kb_{n-k}}{b_{k-1}b_{n+1-k}} \\ &= \frac{(a_1\ldots a_{n-k})(a_1\ldots a_{n+1})}{(a_1\ldots a_{k-1})(a_1\ldots a_{n+1-k})}-\frac{(a_1\ldots a_k)(a_1\ldots a_{n-k})}{(a_1\ldots a_{k-1})(a_1\ldots a_{n+1-k})} \\ &= \frac{a_{n+1}}{a_{n+1-k}}-\frac{a_k}{a_{n+1-k}}=\frac{q^k+q^{k+1}+\ldots+q^n}{1+q+\ldots+q^{n-k}}=q^k. \end{aligned}$$

Deci $x_k=q^k$. Analog, avem

$$\frac{s_{n+1,k}-s_{n,k}}{q^{n+1}s_{n,k-1}}=\frac{b_{k-1}\cdot b_{n-k+1}}{q^{n+1}b_n}\left(\frac{b_{n+1}}{b_k\cdot b_{n+1-k}}-\frac{b_n}{b_k\cdot b_{n-k}}\right)$$

$$=\frac{1}{q^{n+1}}\left(\frac{a_{n+1}}{a_k}-\frac{a_{n-k+1}}{a_k}\right)=\frac{1}{q^{n+1}}\cdot\frac{q^{n-k+1}+\ldots+q^n}{1+q+\ldots+q^{k-1}}=\frac{1}{q^k}.$$

Deci $y_k=1/q^k$.