Dorin Andrica Dorel Duca Gheorghe Lobonț

Concursul interjudețean de MATEMATICĂ „Marian Țarină”

Volumul II
(2011-2019)

Editura Paralela 45

Design copertă: Marius Badea
Pregătire de tipar: Marius Badea

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
ANDRICA, DORIN
Concursul interjudețean de matematică „Marian Țarină" / Dorin Andrica, Dorel Duca, Gheorghe Lobonț. - Pitești : Paralela 45, 2023
2 vol.
ISBN 978-973-47-3848-9
Vol. 2 : (2011-2019). - 2023. - ISBN 978-973-47-3850-2

I. Duca, Dorel
II. Lobonț, Gheorghe

51

Cuprins

Cuvânt înainte

Dacă ştiinţele matematice sunt o piramidă de stilizări, a face matematică înseamnă a învăţa stilizarea (modelarea) situaţiilor concrete şi a operaţiilor efectuate asupra lor. Matematica este o şcoală a rigorii. Profesorii văd fondul vocaţiei lor în faptul că învăţarea matematicii are semnificaţie pentru ei în măsura în care contribuie la dezvoltarea intelectuală a elevilor. Ei formează inteligenţe în sensul propriu al termenului, le dau o structură, atunci când ea nu este decât virtuală, îi învaţă să gândească riguros şi să îşi utilizeze propriile capacităţi.

Concursurile de matematică, dar nu numai de matematică, au în primul rând rolul de socializare. Elevul care participă la un concurs întâlneşte colegi din alte clase, de la alte şcoli, din alte localităţi, din alte ţări şi cunoaşte alţi profesori. Profesorul care merge cu elevii la un concurs cunoaşte alţi elevi, se întâlneşte sau se reîntâlneşte cu alţi colegi şi, de ce nu, cu unii din profesorii lui... Pe de altă parte, concursurilor au rolul de a răspunde unei necesităţi sufleteşti a candidaţilor: Care este nivelul meu de pregătire în comparaţie cu colegii mei?

Urmărind aceste idei, prof. Mariana Ursu şi prof. Gheorghe Lobonţ, au iniţiat în anul 2001, la Colegiul Naţional „Mihai Viteazul" din Turda, Concursul Interjudeţean de Matematică „Marian Ţarină". Numele concursului este dat de Marian Ţarină (1932-1992), fost elev al liceului „Regele Ferdinand", actualmente Colegiul Naţional „Mihai Viteazul" din Turda. Acesta a fost unul dintre marii profesori de la Facultatea de Matematică şi Informatică a Universităţii „Babeş-Bolyai" din Cluj-Napoca, cu multiple preocupări legate de matematica de nivel preuniversitar şi colaborator la Gazeta Matematică. În primul an concursul a avut loc iarna şi s-a adresat doar elevilor de liceu. Din anul următor a fost extins şi la clasele de gimnaziu şi s-a desfăşurat în luna mai, după etapa naţională a Olimpiadei de Matematică. Observând că după etapa naţională a olimpiadelor interesul elevilor pentru concursuri scade, în ultimii ani concursul s-a desfăşurat înaintea Olimpiadei Naţionale de Matematică. Începând cu anul 2007 concursul a fost extins şi pentru elevii claselor a IV-a.

Toate cele 19 ediţii de până acum s-au desfăşurat la Colegiul Naţional „Mihai Viteazul” din Turda sub atenta îndrumare a directorilor: prof. Mariana Ursu, prof. Gheorghe Lobonţ, prof. Alexandra Zamfir. Încă de la început concursul s-a bucurat de un sprijin substanţial din partea unor cadre didactice de la Facultatea de Matematică şi Informatică a Universităţii „Babeş-Bolyai” din Cluj-Napoca, în ceea ce priveşte întocmirea subiectelor şi coordonarea corecturii lucrărilor participanţilor. Preşedintele tuturor ediţiilor a fost prof. univ. dr. Dorel I. Duca.

Problemele propuse la cele 19 ediţii sunt conţinute în prezentele două volume. Primul volum acoperă perioada 2001-2010 iar al doilea perioada 2011-2019, împreună conţinând 640 probleme cu grad ridicat de dificultate însoţite de rezolvări complete. Ne exprimăm speranţa că această lucrare este utilă atât elevilor cât şi profesorilor în procesul de pregătire pentru concursurile de matematică.

Capitolul 1

Enunţuri

1.1 Ediţia a XI-a (6-7 mai 2011)

Clasa a IV-a

1. Aflaţi diferenţa dintre numerele naturale a şi b ştiind că ele verifică egalităţile

$$[(4 + a : 3) : 12 + 5] \cdot 4 - 26 = 42$$
$$[(b + 7) : 25 - 8] \cdot 8 + 5 = 37.$$

Gheorghe Lobonţ

2. Suma a două numere naturale este 225. Dacă pe primul număr îl înmulţim cu 2, iar pe al doilea îl împărţim la 2, obţinem numere egale. Care sunt numerele?

Eugenia Miron

3. În urmă cu 7 ani, suma vârstelor fraţilor Mariei era de 9 ani. Acum suma vârstelor fraţilor ei este 37 ani. Câţi fraţi are Maria?

Ioan Groza

4. La concursul de matematică şi informatică „Marian Ţarină", ediţia a X-a, au participat 272 elevi, dintre care 258 au rezolvat prima problemă, 250 au rezolvat a doua problemă, 163 au rezolvat a treia problemă şi 149 au rezolvat a patra problemă. Arătaţi că cel puţin patru elevi au rezolvat toate problemele.

Vasile Şerdean

Clasa a V-a

1. Determinaţi toate numerele naturale $\overline{abcd}$ cu proprietatea că

$$\overline{ab} - \overline{ba} = 36 \quad \text{şi} \quad \overline{dc} + \overline{cd} = 33.$$

Monica Fodor

2. Fie numărul $A = 91992999399994\ldots999\ldots92006$.

a) Calculaţi suma cifrelor numărului A.

b) Care este cifra de pe locul 108?

c) Determinaţi câte cifre de 9 conţine numărul A.

Ioan Groza, Cristian Pop

3. Suma a trei numere naturale este 349. Împărţind primul număr la al doilea obţinem câtul 4 şi restul 5, iar împărţind al doilea număr la al treilea obţinem câtul 7 şi restul 4. Să se afle numerele.

Gheorghe Lobonţ, Lucia Iepure

4. Se consideră 10 numere naturale nenule (nu neapărat diferite) şi calculăm toate sumele posibile formate din câte 9 dintre aceste numere şi obţinem: $83, 84, 85, \ldots, 90, 91$ (sumele care se repetă le scriem o singură dată). Aflaţi cele 10 numere.

Vasile Şerdean

Clasa a VI-a

1. Fie x, y, z trei numere întregi pozitive cu proprietatea că primele două sunt direct proporţionale cu 2 şi 3, iar ultimele două sunt invers proporţionale cu $1/2$ şi $1/5$. Studiaţi dacă produsul lor este cub perfect, când suma numerelor este 100.

Monica Fodor, Ancuţa Nechita

2. a) Fie

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{2011}, \\ y &= 1 + 3 + 3^3 + \ldots + 3^{2011}, \\ z &= 1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{2011}. \end{aligned}$$

Scrieţi în ordine crescătoare numerele $9z + 1$, $(2y + 1)^2$ şi $(x + 1)^3$.

b) Să se arate că fracţia $\dfrac{5c + 8}{3c + 5}$ este ireductibilă oricare ar fi $c \in \mathbb{N}$.

Vasile Şerdean, Monica Fodor

3. Pe o dreaptă d se consideră punctele A, B, C, D (în această ordine), astfel încât $(AB) = (CB) = (CD)$. Fie E un punct exterior dreptei d, astfel încât $\widehat{EAD} = \widehat{EDA}$. În triunghiul EDA se construiesc medianele (AF) $(F \in (ED))$ şi (DP) $(P \in (AE))$. Să se arate că:

a) E aparţine mediatoarei segmentului (BC);

b) $(AF) = (DP)$;
c) $\widehat{APB} = \widehat{DFC}$;
d) $\widehat{PBE} = \widehat{FCE}$.

* * *

4. Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A şi înălţimea AD, $D \in (BC)$. Fie $(BE$ bisectoarea unghiului B. Dacă $AD \cap BE = \{T\}$, $TE = 6$ cm şi $DT = 3$ cm, calculaţi măsura unghiului C.

Vasile Şerdean, Camelia Măgdaş

Clasa a VII-a

1. a) Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, arătaţi că

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \geq 8abc.$$

b) Utilizând eventual punctul a), demonstraţi că:

$$(a_1^2+1)(a_2^2+1)\ldots(a_n^2+1) \geq 2^n, \text{ dacă } a_1a_2\ldots a_n = 1.$$

* * *

2. Să se arate că

$$\frac{1}{671} + \frac{1}{672} + \ldots + \frac{1}{2011} = \frac{2}{1\cdot 2} + \frac{2}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{2}{2009\cdot 2010\cdot 2011}.$$

Vasile Şerdean

3. În triunghiul ABC se consideră punctul D pe segmentul (BC). Fie E şi F simetricele punctului D faţă de dreptele AB respectiv AC.

a) Demonstraţi că $m(\widehat{EAF})$ este constantă oricare ar fi poziţia punctului D pe latura (BC).

b) Determinaţi poziţia punctului D pe segmentul (BC) astfel încât perimetrul triunghiului AEF să fie minim.

c) Arătaţi că $EF < 2AD$.

d) Care este poziţia punctului D pe (BC) astfel încât $AD \perp EF$?

Ioan Groza, Lucia Iepure

4. Se consideră punctul M în interiorul triunghiului echilateral ABC şi P, L, K proiecţiile sale pe (AB), (BC), respectiv (AC). Calculaţi aria triunghiului ABC ştiind că $AP = 8$, $BL = 12$ şi $CK = 7$.

Vasile Şerdean, Gheorghe Lobonţ

Clasa a VIII-a

1. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $x \in [0, 3a]$ şi $y \in [0, 2b]$. Demonstraţi că are loc inegalitatea:

$$(x-y)^2 + \left(\frac{2x}{3} + \frac{3y}{2}\right)^2 \leq 13(a^2+b^2).$$

Ştefania Mustea, Monica Fodor

2. a) Ştiind că $x^3 - 3xy^2 = 10$ şi $y^3 - 3x^2y = 198$, calculaţi $x^2 + y^2$.

b) Să se determine cifra n din numărul $x = 1,n12$ care are proprietatea că $2d(x) + x = 2,488$, unde $d(x)$ notează distanţa de la x la cel mai apropiat număr întreg faţă de x.

Vasile Şerdean, Dorel I. Duca

3. Cubul $ABCDA'B'C'D'$ are muchia de lungime a. Calculaţi:

a) distanţa de la punctul B la dreapta $A'D$;

b) cosinusul unghiului format de planele $(O'AC)$ şi $(O'AB)$ unde

$$\{O'\} = A'C' \cap B'D';$$

c) distanţa de la punctul A la planul $(O'BC)$;

d) aria secţiunii determinată în cub de planul $(O'BC)$.

Monica Fodor, Ioan Groza

4. O piramidă triunghiulară $VABC$ are aria bazei ABC egală cu 16. Feţele laterale VAB, VAC, VBC au respectiv ariile 10, 10, 12 şi fac acelaşi unghi cu planul bazei. Să se calculeze volumul piramidei $VABC$.

Vasile Şerdean, Cristian Pop

Clasa a IX-a

1. Fie $n \geq 1$ un număr natural.

a) Arătaţi că restul împărţirii lui $4^{4\cdot 5^{n-1}}$ la 5^n este 1.

b) Arătaţi că dacă numărul natural $m \geq 1$ are proprietatea că restul împărţirii lui m^5 la 5^n este 1, atunci restul împărţirii lui m la 5^{n-1} este 1.

Dorel I. Duca

2. Fie ABC un triunghi oarecare. Bisectoarele exterioare ale unghiurilor $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ respectiv $\widehat{C}$ se intersectează două câte două în punctele A', B' respectiv C'. (A şi A' sunt separate de dreapta BC, B şi B' sunt separate de dreapta CA, C şi

Capitolul 2

Soluţii

2.1 Ediţia a XI-a (6-7 mai 2011)

Clasa a IV-a

1. *Aflaţi diferenţa dintre numerele naturale a şi b ştiind că ele verifică egalităţile*

$$[(4 + a : 3) : 12 + 5] \cdot 4 - 26 = 42$$
$$[(b + 7) : 25 - 8] \cdot 8 + 5 = 37.$$

Gheorghe Lobonţ

Soluţie. Prima egalitate devine $[(4 + a : 3) : 12 + 5] \cdot 4 = 42 + 26$ sau $[(4 + a : 3) : 12 + 5] = 68 : 4$ adică $(4 + a : 3) : 12 = 17 - 5$ deci $4 + a : 3 = 12 \cdot 12$. Urmează că $a = 420$.

A doua egalitate devine $[(b + 7) : 25 - 8] \cdot 8 = 32 \Leftrightarrow (b + 7) : 25 - 8 = 4$

$$\Leftrightarrow (b + 7) : 25 = 12 \Leftrightarrow b + 7 = 300 \Leftrightarrow b = 293.$$

Urmează că $a - b = 420 - 293 = 127$.

2. *Suma a două numere naturale este 225. Dacă pe primul număr îl înmulţim cu 2, iar pe al doilea îl împărţim la 2, obţinem numere egale. Care sunt numerele?*

Eugenia Miron

Soluţie. Avem $a + b = 225$ şi $4a = b$. Deci $5a = 225$. Aşadar $a = 45$ şi $b = 180$.

3. *În urmă cu 7 ani, suma vârstelor fraţilor Mariei era de 9 ani. Acum suma vârstelor fraţilor ei este 37 ani. Câţi fraţi are Maria?*

Ioan Groza

Soluţie. $37 - 9 = 28$ reprezintă numărul fraţilor înmulţit cu 7 ani. Atunci $28 : 7 = 4$ este numărul fraţilor Mariei.

4. *La concursul de matematică şi informatică „Marian Ţarină", ediţia a X-a, au participat 272 elevi, dintre care 258 au rezolvat prima problemă, 250 au rezolvat a doua problemă, 163 au rezolvat a treia problemă şi 149 au rezolvat a patra problemă. Arătaţi că cel puţin patru elevi au rezolvat toate problemele.*

Vasile Şerdean

Soluţie. Prima problemă nu au rezolvat-o: $272 - 248 = 14$ elevi.
A doua problemă nu au rezolvat-o: $272 - 250 = 22$ elevi.
A treia problemă nu au rezolvat-o: $272 - 163 = 109$ elevi.
A patra problemă nu au rezolvat-o: $272 - 149 = 123$ elevi.
Avem nerezolvate: $14 + 22 + 109 + 123 = 268$ probleme.
Cum au fost 272 elevi, rezultă că cel puţin 4 elevi au rezolvat toate problemele.

Clasa a V-a

1. *Determinaţi toate numerele naturale* $\overline{abcd}$ *cu proprietatea că*

$$\overline{ab} - \overline{ba} = 36 \quad \text{şi} \quad \overline{dc} + \overline{cd} = 33.$$

Monica Fodor

Soluţie. Avem $\overline{ab} - \overline{ba} = 9(a-b) \Rightarrow 9(a-b) = 36 \Rightarrow a - b = 4 \Rightarrow a = b + 4$ şi $\overline{dc} + \overline{cd} = 11(d+c) \Rightarrow 11(d+c) = 33 \Rightarrow d + c = 3 \Rightarrow d = 3 - c$.

Deoarece $a, b, c, d \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ urmează că:

Pentru $b \in \{5, 4, 3, 2, 1\} \Rightarrow a \in \{9, 8, 7, 6, 5\} \Rightarrow \overline{ab} \in \{95, 84, 73, 62, 51\}$.

Pentru $c \in \{1, 2\} \Rightarrow d \in \{2, 1\} \Rightarrow \overline{cd} \in \{12, 21\}$.

Concluzie: $\overline{abcd} \in \{9512, 9521, 8412, 8421, 7312, 7321, 6212, 6221, 5112, 5121\}$.

2. *Fie numărul* $A = 91992999399994\ldots999\ldots92006$.
a) Calculaţi suma cifrelor numărului A.
b) Care este cifra de pe locul 108?
c) Determinaţi câte cifre de 9 conţine numărul A.

Ioan Groza, Cristian Pop

Soluţie. a) Avem

$9 + 1 = 10,\ 2 \cdot 9 + 2 = 20,\ 3 \cdot 9 + 3 = 30, \ldots, 9 \cdot 2006 + 2006 = 20060$

şi atunci $S = 10 + 20 + \ldots + 20060 = 2007 \cdot 10030 = 20130210$.

b) Deoarece 91 are 2 cifre, 992 are 3 cifre,..., $99\ldots99$ are 10 cifre, $99\ldots910$ are 12 cifre, $99\ldots911$ are 13 crifre, $99\ldots912$ are 14 cifre, $99\ldots913$ are 15 cifre.

Cum $2+3+4+5+6+7+8+9+10+12+13+14+15=108$ urmează că cifra de pe locul 108 este 3.

c) Numărul A conţine $1+2+3+\ldots+2006=1003\cdot 2007$ cifre.

3. *Suma a trei numere naturale este 349. Împărţind primul număr la al doilea obţinem câtul* 4 *şi restul* 5, *iar împărţind al doilea număr la al treilea obţinem câtul* 7 *şi restul* 4. *Să se afle numerele.*

Gheorghe Lobonţ, Lucia Iepure

Soluţie. Fie a,b,c cele 3 numere. Atunci $a+b+c=349$, $a=4b+5$, $b=7c+4$. Rezultă $c=9$, $b=67$, $a=273$.

4. *Se consideră* 10 *numere naturale nenule (nu neapărat diferite) şi calculăm toate sumele posibile formate din câte 9 dintre aceste numere şi obţinem:* $83,84,85,\ldots,90,91$ *(sumele care se repetă le scriem o singură dată). Aflaţi cele 10 numere.*

Vasile Şerdean

Soluţie. Fie $x_1,x_2,\ldots,x_{10}$ numerele, cu $x_1\le x_2\le\ldots\le x_{10}$ şi

$$S=x_1+x_2+\ldots+x_{10}.$$

Sumele obţinute sunt printre numerele $S-x_1,S-x_2,\ldots,S-x_{10}$ care au suma $10S-(x_1+x_2+\ldots+x_{10})=10S-S=9S$. Fiindcă sunt numai nouă sume $(83,84,\ldots,91)$ rezultă că printre numerele $S-x_1,S-x_2,\ldots,S-x_{10}$ se află două numere identice. Fie acestea x. Atunci

$$x+83+84+\ldots+91=9S\Rightarrow x+87\cdot 9=9S\Rightarrow x=9(S-87).$$

Sumele fiind de la 83 la 91 $\Rightarrow S=97$. Atunci $x=9(97-87)=9\cdot 10=90$ şi deci numerele sunt: $97-83$, $97-94,\ldots$, $97-90$, $97-90$, $97-91$. Aşadar cele 10 numere sunt $14,13,12,11,10,9,8,7,7,6$.

Clasa a VI-a

1. *Fie x,y,z trei numere întregi pozitive cu proprietatea că primele două sunt direct proporţionale cu* 2 *şi* 3, *iar ultimele două sunt invers proporţionale cu* $1/2$ *şi* $1/5$. *Studiaţi dacă produsul lor este cub perfect, când suma numerelor este* 100.

Monica Fodor, Ancuţa Nechita

Soluţie. Avem $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3}$ şi $y \cdot \dfrac{1}{2} = z \cdot \dfrac{1}{5} \Rightarrow \dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{6} = \dfrac{z}{15} = \dfrac{x+y+z}{25} = 4$

$$\Rightarrow x \cdot y \cdot z = 4^2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 15 \cdot 4 = 2^9 \cdot 3^2 \cdot 5 = (2^3)^3 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

Concluzie: nu este cub perfect.

2. *a) Fie*

$$x = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{2011},$$
$$y = 1 + 3 + 3^3 + \ldots + 3^{2011},$$
$$z = 1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{2011}.$$

Scrieţi în ordine crescătoare numerele $9z + 1$, $(2y+1)^2$ *şi* $(x+1)^3$.

b) Să se arate că fracţia $\dfrac{5c+8}{3c+5}$ *este ireductibilă oricare ar fi* $c \in \mathbb{N}$.

Vasile Şerdean, Monica Fodor

Soluţie. a) Avem $x = 2^{2012} - 1 \Rightarrow (1+x)^3 = (2^3)^{2012} = 8^{2012}$. Cum

$$y = \frac{3^{2012} - 1}{2} \Rightarrow (2y+1)^2 = (3^2)^{2012} = 9^{2012}.$$

Deoarece $z = \dfrac{10^{2012} - 1}{9}$ rezultă $1 + 9z = 10^{2012}$.
Concluzie: $8^{2012} < 9^{2012} < 10^{2012} \Rightarrow x < y < z$.

b) Fie d divizor comun al numărătorului şi al numitorului $\Rightarrow d \mid 5c + 8$
$\Rightarrow d \mid 3(5c+8)$; $d \mid 3c + 5 \Rightarrow d \mid 5(3c+5) \Rightarrow d \mid 3(5c+8) - 5(3c+5) \Rightarrow d \mid 1$.
Concluzie: Fracţia este ireductibilă.

3. *Pe o dreaptă d se consideră punctele* A, B, C, D *(în această ordine), astfel încât* $(AB) = (CB) = (CD)$. *Fie* E *un punct exterior dreptei* d, *astfel încât* $\widehat{EAD} = \widehat{EDA}$. *În triunghiul* EDA *se construiesc medianele* (AF) $(F \in (ED))$ *şi* (DP) $(P \in (AE))$. *Să se arate că:*

a) E *aparţine mediatoarei segmentului* (BC);

b) $(AF) = (DP)$;

c) $\widehat{APB} = \widehat{DFC}$;

d) $\widehat{PBE} = \widehat{FCE}$.

* * *

Soluţie. a) Din $\widehat{EAD} = \widehat{EDA}$ deducem că $\triangle EAD$ este isoscel.

Atunci mediana (EM) $(M \in AD)$ este şi mediatoare şi înălţime şi bisectoare, deci $EM \perp AD$, $(AM) = (DM)$. Acum din faptul că $(AB) = (CD)$, deducem că