

*Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.N. nr. 4696/02.08.2019.*

*Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programul școlar în vigoare pentru clasa a VII-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.*

**Referință științifică:** Lucrarea a fost definitivată prin contribuția și recomandările Comisiei științifice și metodice a publicațiilor Societății de Științe Matematice din România. Aceasta și-a dat avizul favorabil în ceea ce privește alcătuirea și conținutul matematic.

Redactare: Roxana Pietreanu  
Tehnoredactare: Iuliana Ene  
Pregătire de tipar: Marius Badea  
Design copertă: Mirona Pintilie

**Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României**  
**TUDOR, ION**

**Matematică : algebră, geometrie : modalități de lucru diferențiate, pregătire suplimentară prin planuri individualizate : caiet de lucru : [clasa] 7 / Ion Tudor. - Ed. a 7-a. - Pitești : Paralela 45, 2023-2 vol.**  
ISBN 978-973-47-3893-9  
**Partea 1. - 2023. - ISBN 978-973-47-3894-6**

51

**COMENZI – CARTEA PRIN POȘTĂ**

EDITURA PARALELA 45  
Bulevardul Republicii, Nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești,  
jud. Argeș, cod 110177  
Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918  
Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492  
E-mail: [comenzi@edituraparelela45.ro](mailto:comenzi@edituraparelela45.ro)  
sau accesați [www.edituraparelela45.ro](http://www.edituraparelela45.ro)

Tiparul executat la tipografia Editurii Paralela 45  
E-mail: [tipografie@edituraparelela45.ro](mailto:tipografie@edituraparelela45.ro)

Copyright © Editura Paralela 45, 2023  
Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate,  
iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.  
[www.edituraparelela45.ro](http://www.edituraparelela45.ro)

Ion TUDOR

# matematică

algebră, geometrie

- Modalități de lucru diferențiate
- Pregătire suplimentară prin planuri individualizate

Caiet de lucru

**Partea I**

**7**

Ediția a VII-a

Editura Paralela 45

## Teste de evaluare inițială

### Testul 1

Se acordă 1 punct din oficiu.

Partea I – Scrieți litera corespunzătoare singurului răspuns corect:

- (0,5p) 1. Forma zecimală a fracției ordinare  $\frac{3}{4}$  este:  
A. 0,5;            B. 0,75;            C. 0,65;            D. 0,8.
- (0,5p) 2. Cel mai mic număr natural prim de două cifre este:  
A. 10;            B. 15;            C. 11;            D. 13.
- (0,5p) 3. Suma numerelor raționale pozitive  $1\frac{1}{3}$  și  $\frac{1}{6}$  este egală cu:  
A.  $\frac{3}{2}$ ;            B.  $\frac{2}{3}$ ;            C.  $\frac{5}{6}$ ;            D.  $\frac{3}{4}$ .
- (0,5p) 4. Suplementul unghiului cu măsura de  $78^\circ$  este unghiul cu măsura de:  
A.  $160^\circ$ ;            B.  $12^\circ$ ;            C.  $90^\circ$ ;            D.  $102^\circ$ .
- (0,5p) 5. Rezultatul calculului  $(-1)^{2017} + (-1)^{2018}$  este egal cu:  
A. 2;            B. -2;            C. -1;            D. 0.
- (0,5p) 6. Soluția inecuației  $-3x \leq 9$ , unde  $x \in \mathbb{Z}$ , este:  
A.  $\{3, 4, 5, \dots\}$ ;            B.  $\{-3, -2, -1, \dots\}$ ;            C.  $\{\dots, -5, -4, -3\}$ ;            D.  $\{\dots, 1, 2, 3\}$ .
- (0,5p) 7. Cel mai mic multiplu comun al numerelor 6 și 8 este egal cu:  
A. 12;            B. 24;            C. 48;            D. 18.
- (0,5p) 8. Dacă  $ABC$  este un triunghi dreptunghic în  $A$  și  $\sphericalangle B = 4\sphericalangle C$ , atunci măsura unghiului  $C$  este egală cu:  
A.  $60^\circ$ ;            B.  $30^\circ$ ;            C.  $18^\circ$ ;            D.  $45^\circ$ .
- (0,5p) 9. Calculând 40% din 35 obținem numărul:  
A. 15;            B. 40;            C. 70;            D. 14.

Partea a II-a – La următoarele probleme se cer rezolvări complete:

(0,8p) 1. Se consideră triunghiul isoscel  $ABC$ . Dacă  $AB = 10$  cm și  $AC = 4,5$  cm, aflați  $BC$ .

2. Se consideră numărul rațional pozitiv  $x = \frac{11}{10} - \left[ 2\frac{1}{3} - \left( \frac{1}{2} \right)^2 \right] : \frac{5}{2}$ .

(0,8p) a) Arătați că  $x = \frac{4}{15}$ .

(0,7p) b) Rotunjiți la a doua zecimală numărul rațional pozitiv  $x$ .

# ALGEBRĂ

## Capitolul I

### MULȚIMEA NUMERELOR REALE

#### Lecția 1. Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural. Estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional



#### Citesc și rețin

**Definiție:** Un număr natural  $a$  se numește **pătrat perfect** dacă există un număr natural  $b$ , astfel încât  $a = b^2$ .

**Exemple:**  $9 = 3^2$ ,  $25 = 5^2$ ,  $100 = 10^2$ .

**Observație:** Dacă  $a$ ,  $a \neq 0$ , este un număr natural pătrat perfect, atunci există două numere întregi  $b$  și  $-b$  cu proprietatea că  $a = b^2 = (-b)^2$ .

**Exemple:**  $1 = 1^2 = (-1)^2$ ,  $4 = 2^2 = (-2)^2$ ,  $9 = 3^2 = (-3)^2$ .

**Definiție:** **Rădăcina pătrată** a numărului natural pătrat perfect  $a$  ( $a = b^2$ ,  $b \in \mathbb{Z}$ ) este numărul natural  $|b|$ . Notăm  $\sqrt{a} = |b|$ .

**Exemple:**  $\sqrt{5^2} = 5$ ;  $\sqrt{19^2} = 19$ ;  $\sqrt{(-11)^2} = |-11| = 11$ .

**Observații:**

1. Dacă  $a = b^2$ ,  $b \in \mathbb{N}$ , atunci  $\sqrt{a} = b$ .

2. Dacă  $a \in \mathbb{N}$  și  $b \in \mathbb{N}^*$ , atunci  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ .



#### Cum se aplică?

1. Calculați:

a)  $\sqrt{25}$ ;

b)  $\sqrt{81}$ .

**Soluție:**

a)  $\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$ ;

b)  $\sqrt{81} = \sqrt{9^2} = 9$ .

2. Calculați:

a)  $\sqrt{\frac{49}{64}}$ ;

b)  $\sqrt{\frac{48}{75}}$ .

**Soluție:**

a)  $\sqrt{\frac{49}{64}} = \sqrt{\frac{7^2}{8^2}} = \frac{7}{8}$ ;

b)  $\sqrt{\frac{48^3}{75}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{4^2}{5^2}} = \frac{4}{5}$ .

3. Determinați cardinalul mulțimii  $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 5 < \sqrt{n} \leq 6\}$ .

**Soluție:**

$5 < \sqrt{n} \leq 6$ , deci  $25 < n \leq 36$ , de unde rezultă  $A = \{26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36\}$ , prin urmare card  $A = 11$ .



### Știu să rezolv

#### Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Arătați că următoarele numere naturale sunt pătrate perfecte:

- a)  $16 = \dots\dots\dots$ ; b)  $36 = \dots\dots\dots$ ; c)  $49 = \dots\dots\dots$ ; d)  $64 = \dots\dots\dots$ ; e)  $81 = \dots\dots\dots$ ;  
f)  $100 = \dots\dots\dots$ ; g)  $144 = \dots\dots\dots$ ; h)  $196 = \dots\dots\dots$ ; i)  $324 = \dots\dots\dots$ ; j)  $400 = \dots\dots\dots$ .

2. Citiți următoarele propoziții:

- a)  $\sqrt{25} = 5$ ; b)  $\sqrt{169} = 13$ ; c)  $\sqrt{361} = 19$ ; d)  $\sqrt{81} = 9$ .

3. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

- a)  $\sqrt{14^2} = 14$ ;  b)  $\sqrt{19^2} = 19$ ;  c)  $\sqrt{41^2} = 41$ ;   
d)  $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$ ;  e)  $\sqrt{(-13)^2} = -13$ ;  f)  $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$ .

4. Calculați:

- a)  $\sqrt{16} = \dots\dots\dots$ ; b)  $\sqrt{25} = \dots\dots\dots$ ; c)  $\sqrt{36} = \dots\dots\dots$ ; d)  $\sqrt{49} = \dots\dots\dots$ ; e)  $\sqrt{64} = \dots\dots\dots$ ;  
f)  $\sqrt{100} = \dots\dots\dots$ ; g)  $\sqrt{121} = \dots\dots\dots$ ; h)  $\sqrt{144} = \dots\dots\dots$ ; i)  $\sqrt{225} = \dots\dots\dots$ ; j)  $\sqrt{256} = \dots\dots\dots$ .

5. Completați spațiile punctate cu răspunsul corect:

- a)  $\sqrt{(-11)^2} = \dots\dots\dots$ ; b)  $\sqrt{(-23)^2} = \dots\dots\dots$ ; c)  $\sqrt{(-59)^2} = \dots\dots\dots$ ; d)  $\sqrt{(-77)^2} = \dots\dots\dots$ .

6. Determinați mulțimile:

- a)  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{x^2} = 7\} = \dots\dots\dots$ ; b)  $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{x^2} = 8\} = \dots\dots\dots$ ;  
c)  $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{x^2} = 29\} = \dots\dots\dots$ ; d)  $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{x^2} = 67\} = \dots\dots\dots$ .

7. Calculați:

- a)  $\sqrt{16} + \sqrt{25}$ ; b)  $\sqrt{64} - \sqrt{49}$ ; c)  $\sqrt{36} + \sqrt{81}$ ; d)  $\sqrt{64} + \sqrt{25}$ ;  
e)  $\sqrt{81} - \sqrt{36} = \dots\dots\dots$ ; f)  $\sqrt{16} - \sqrt{64} = \dots\dots\dots$ .

8. Calculați:

- a)  $(\sqrt{225} - \sqrt{36}) \cdot \sqrt{100}$ ; b)  $\sqrt{121} : (\sqrt{25} - \sqrt{256})$ ; c)  $\sqrt{144} : (\sqrt{49} - \sqrt{169})$ ;  
d)  $\sqrt{196} : (\sqrt{64} - \sqrt{100}) = \dots\dots\dots$ .

9. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a)  $\sqrt{\frac{4}{81}} = \frac{2}{9}$ ;  b)  $\sqrt{\frac{49}{25}} = \frac{7}{5}$ ;  c)  $\sqrt{\frac{81}{16}} = \frac{9}{4}$ ;  d)  $\sqrt{\frac{64}{9}} = \frac{8}{3}$ .

## Lecția 7. Adunarea și scăderea numerelor reale



### Citesc și rețin

**Suma** numerelor reale  $x$  și  $y$  este un număr real unic, notat  $x + y$ .

Operația prin care se obține suma a două numere reale se numește **adunare**.

**Proprietățile adunării:**

- comutativitatea:  $a + b = b + a$ , oricare ar fi  $a, b \in \mathbb{R}$ ;
- asociativitatea:  $(a + b) + c = a + (b + c)$ , oricare ar fi  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ;
- 0 este element neutru:  $a + 0 = 0 + a = a$ , oricare ar fi  $a \in \mathbb{R}$ ;
- orice număr  $a \in \mathbb{R}$  are un opus  $-a \in \mathbb{R}$ :  $a + (-a) = 0$ .

**Diferența** numerelor reale  $x$  și  $y$  este un număr real unic, notat  $x - y$ , și care reprezintă suma dintre  $x$  și opusul lui  $y$ , adică  $x - y = x + (-y)$ .

**Reguli de calcul:**

- $a\sqrt{n} + b\sqrt{n} = (a + b)\sqrt{n}$ ,  $n > 0$ ;
- $a\sqrt{n} - b\sqrt{n} = (a - b)\sqrt{n}$ ,  $n > 0$ ;
- $a_1\sqrt{n} + a_2\sqrt{n} + a_3\sqrt{n} + \dots + a_m\sqrt{n} = (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_m)\sqrt{n}$ ,  $n > 0$ .



### Cum se aplică?

1. Calculați:

- a)  $3\sqrt{2} + 7\sqrt{2}$ ;                      b)  $9\sqrt{5} - 3\sqrt{5}$ ;                      c)  $2\sqrt{7} - 5\sqrt{7}$ .

**Soluție:**

- a)  $3\sqrt{2} + 7\sqrt{2} = \sqrt{2}(3 + 7) = 10\sqrt{2}$ ;                      b)  $9\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = \sqrt{5}(9 - 3) = 6\sqrt{5}$ ;  
c)  $2\sqrt{7} - 5\sqrt{7} = \sqrt{7}(2 - 5) = -3\sqrt{7}$ .

2. Calculați:

- a)  $5\sqrt{12} + 2\sqrt{27}$ ;                      b)  $2\sqrt{63} - 5\sqrt{28}$ ;                      c)  $-\sqrt{18} - 3\sqrt{98}$ .

**Soluție:**

- a)  $5\sqrt{12} + 2\sqrt{27} = 5\sqrt{2^2 \cdot 3} + 2\sqrt{3^2 \cdot 3} = 10\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$ ;  
b)  $2\sqrt{63} - 5\sqrt{28} = 2\sqrt{3^2 \cdot 7} - 5\sqrt{2^2 \cdot 7} = 6\sqrt{7} - 10\sqrt{7} = -4\sqrt{7}$ ;  
c)  $-\sqrt{18} - 3\sqrt{98} = -\sqrt{3^2 \cdot 2} - 3\sqrt{7^2 \cdot 2} = -3\sqrt{2} - 21\sqrt{2} = -24\sqrt{2}$ .

3. Calculați:  $7\sqrt{24} - 3\sqrt{20} - \sqrt{150} - 2\sqrt{80}$ .

**Soluție:**

$$\begin{aligned} 7\sqrt{24} - 3\sqrt{20} - \sqrt{150} - 2\sqrt{80} &= 7\sqrt{2^2 \cdot 6} - 3\sqrt{2^2 \cdot 5} - \sqrt{5^2 \cdot 6} - 2\sqrt{4^2 \cdot 5} = 14\sqrt{6} - \\ &- 6\sqrt{5} - 5\sqrt{6} - 8\sqrt{5} = \sqrt{6}(14 - 5) + \sqrt{5}(-6 - 8) = 9\sqrt{6} - 14\sqrt{5}. \end{aligned}$$



## Știu să rezolv

### Exerciții și probleme de dificultate minimă

#### 1. Calculați:

- a)  $(-3) + 5$ ;                      b)  $7 + (-9)$ ;                      c)  $(-2) + (-6)$ ;                      d)  $(-4) + (-5)$ ;  
 e)  $21 + (-17)$ ;                      f)  $(-19) + 12$ ;                      g)  $(-12) + (-27)$ ;                      h)  $(-14) + (-35)$ ;  
 i)  $(-7) - 12$ ;                      j)  $(-6) - 18$ ;                      k)  $(-4) - (-7)$ ;                      l)  $(-8) - (-6)$ ;  
 m)  $18 - (-20)$ ;                      n)  $14 - (-21)$ ;                      o)  $(-37) - (-9)$ ;                      p)  $(-41) - (-5)$ .

g)																				
o)																				

#### 2. Calculați:

- a)  $\frac{9}{4} + \frac{3}{2}$ ;                      b)  $\frac{5}{6} - \frac{4}{3}$ ;                      c)  $\frac{7}{6} + \frac{5}{4}$ ;                      d)  $\frac{7}{4} - \frac{8}{5}$ ;  
 e)  $2\frac{3}{8} + \left(-\frac{13}{6}\right)$ ;                      f)  $\left(-\frac{7}{4}\right) - 1\frac{3}{14}$ ;                      g)  $\left(-\frac{11}{12}\right) - 1\frac{4}{9}$ ;                      h)  $\left(-2\frac{1}{8}\right) + \frac{9}{10}$ .

g)																				

#### 3. Calculați:

- a)  $0,(6) + 1,25$ ;                      b)  $2,(3) - 0,75$ ;                      c)  $0,68 - 1,(6)$ ;  
 d)  $1,2(7) - 1,75$ ;                      e)  $1,75 - 0,6(1)$ ;                      f)  $0,2(6) - 1,52$ .

e)																				

#### 4. Calculați:

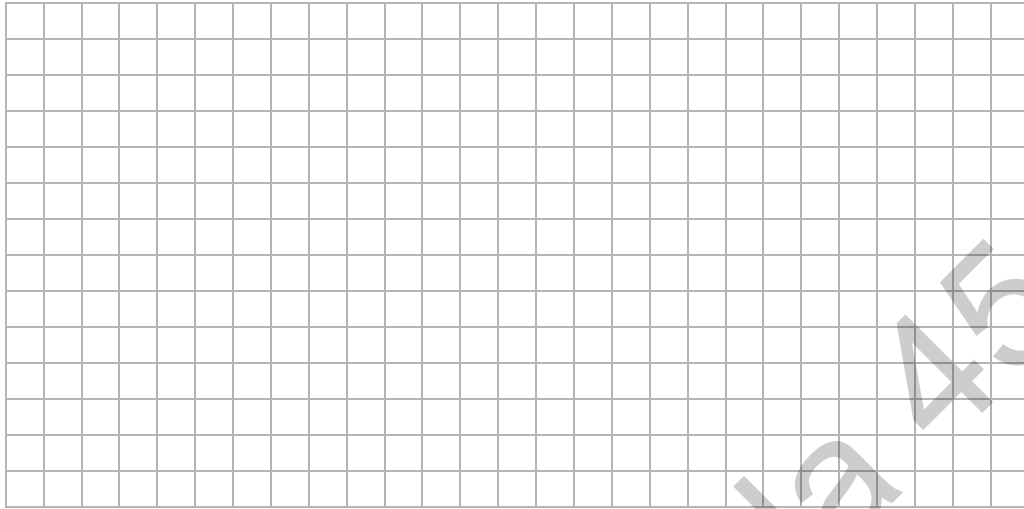
- a)  $5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = \dots\dots\dots$ ;                      b)  $6\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \dots\dots\dots$ ;                      c)  $7\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = \dots\dots\dots$ ;  
 d)  $5\sqrt{7} + 3\sqrt{7} = \dots\dots\dots$ ;                      e)  $4\sqrt{6} + 6\sqrt{6} = \dots\dots\dots$ ;                      f)  $5\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = \dots\dots\dots$ ;  
 g)  $\sqrt{7} - 8\sqrt{7} = \dots\dots\dots$ ;                      h)  $\sqrt{3} - 9\sqrt{3} = \dots\dots\dots$ ;                      i)  $\sqrt{2} - 11\sqrt{2} = \dots\dots\dots$ ;  
 j)  $-6\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = \dots\dots\dots$ ;                      k)  $-7\sqrt{5} - 5\sqrt{5} = \dots\dots\dots$ ;                      l)  $-4\sqrt{2} - 9\sqrt{2} = \dots\dots\dots$ ;  
 m)  $8\sqrt{3} - 15\sqrt{3} = \dots\dots\dots$ ;                      n)  $4\sqrt{5} - 17\sqrt{5} = \dots\dots\dots$ ;                      o)  $2\sqrt{7} - 22\sqrt{7} = \dots\dots\dots$ .

#### 5. Calculați:

- a)  $2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$ ;                      b)  $4\sqrt{3} - 8\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$ ;                      c)  $-\sqrt{5} - 23\sqrt{5} + 9\sqrt{5}$ ;  
 d)  $-7\sqrt{6} + 2\sqrt{6} + 5\sqrt{6}$ ;                      e)  $-4\sqrt{7} - 6\sqrt{7} + 7\sqrt{7}$ ;                      f)  $-2\sqrt{5} + 6\sqrt{5} - 12\sqrt{5}$ .



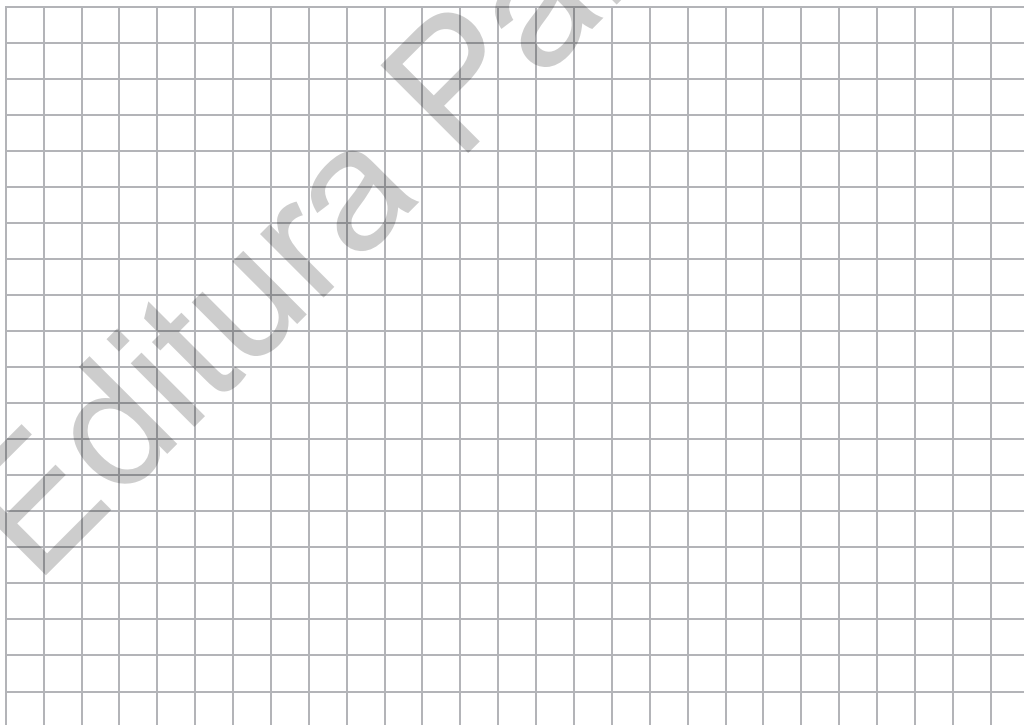




V. Se consideră numerele:

$$x = \frac{\sqrt{5} + 2\sqrt{7}}{\sqrt{35}} + \frac{\sqrt{7} - \sqrt{2}}{\sqrt{14}} - \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{5}}{\sqrt{10}} \text{ și } y = \left( \frac{1 - \sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{1 + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} \right) : \frac{1}{3}.$$

- (8p) a) Arătați că  $x = \sqrt{2}$ .  
(8p) b) Arătați că  $\sqrt{xy} \in \mathbb{N}$ .



## Lecția 13. Media geometrică a două numere reale pozitive



### Citesc și rețin

**Definiție:** Media geometrică a numerelor reale pozitive  $a$  și  $b$  este dată de formula  $m_g = \sqrt{a \cdot b}$ .

**Teoremă:** Dacă  $a$  și  $b$  sunt două numere reale pozitive, atunci  $m_a(a; b) \geq m_g(a; b)$ . Egalitatea se obține când  $a = b$ .



### Cum se aplică?

1. Calculați media aritmetică și media geometrică a numerelor 2 și 8. Comparați cele două medii.

**Soluție:**

$$m_a = \frac{2+8}{2} = \frac{10}{2} = 5; m_g = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = \sqrt{4^2} = 4; m_a = 5 \text{ și } m_g = 4, \text{ prin urmare}$$

$$m_a > m_g.$$

2. Calculați media geometrică a numerelor reale:

a) 3,5 și 4,(6);

b)  $5\sqrt{35}$  și  $7\sqrt{35}$ .

**Soluție:**

$$\text{a) } m_g = \sqrt{3,5 \cdot 4,(6)} = \sqrt{\frac{7}{2} \cdot \frac{14}{3}} = \sqrt{\frac{7 \cdot 7}{1 \cdot 3}} = \sqrt{\frac{7^2}{3}} = \frac{\sqrt{3} \cdot 7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3};$$

$$\text{b) } m_g = \sqrt{5\sqrt{35} \cdot 7\sqrt{35}} = \sqrt{35 \cdot 35} = \sqrt{35^2} = 35.$$

3. Media geometrică a două numere reale pozitive este egală cu 18. Dacă unul dintre numere este  $6\sqrt{2}$ , aflați celălalt număr.

**Soluție:**

Notăm cu  $x$  numărul necunoscut;  $m_g = 18$ , deci  $\sqrt{6\sqrt{2} \cdot x} = 18$ , prin urmare

$$\sqrt{6\sqrt{2} \cdot x}^2 = 18^2 \text{ sau } 6\sqrt{2} \cdot x = 324, \text{ deci } x = \frac{324}{6\sqrt{2}} \text{ sau } x = \frac{\sqrt{2} \cdot 54}{\sqrt{2}} = \frac{54\sqrt{2}}{2} = 27\sqrt{2}.$$



### Știu să rezolv

#### Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Încercuțiți litera corespunzătoare soluției corecte. Media geometrică a numerelor 12 și 3 este egală cu:

A.  $m_g = \sqrt{12 \cdot 3} = \sqrt{4} = 2;$

B.  $m_g = \sqrt{12 \cdot 3} = \sqrt{36} = 6.$

2. Completați tabelul următor:

Numerele	16; 1	1; 25	36; 1	1; 49
Media geometrică				

# GEOMETRIE

## Capitolul I PATRULATERUL

### Lecția 1. Patrulaterul convex



#### Citesc și rețin

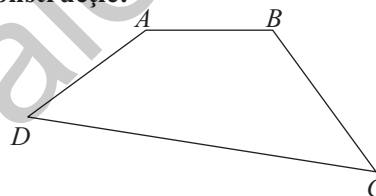
**Definiție:** Numim **patrulater** de vârfuri  $A, B, C$  și  $D$  reuniunea segmentelor  $AB \cup BC \cup CD \cup DA$ , unde punctele distincte  $A, B, C$  și  $D$  îndeplinesc condițiile:

- oricare trei dintre ele sunt necoliniare;
- $AB \cap CD = \emptyset, BC \cap AD = \emptyset$ .

Patrulaterul de vârfuri  $A, B, C$  și  $D$  se notează  $ABCD$ .

**Definiție:** Un **patrulater** se numește **convex** dacă dreapta determinată de oricare două vârfuri alăturate ale acestuia **nu separă** celelalte două vârfuri ale patrulaterului.

#### Construcție:



#### Elemente:

- vârfurile patrulaterului:  $A, B, C, D$ ;
- laturile patrulaterului:  $AB, BC, CD, DA$ ;
- unghiurile patrulaterului:  $\sphericalangle A, \sphericalangle B, \sphericalangle C, \sphericalangle D$ ;
- diagonalele patrulaterului:  $AC, BD$ .

Laturile  $AB$  și  $BC, BC$  și  $CD$  etc. se numesc **alăturate**, iar laturile  $AB$  și  $CD$ , respectiv  $BC$  și  $DA$  se numesc **opuse**.

Unghiurile  $\sphericalangle A$  și  $\sphericalangle B, \sphericalangle B$  și  $\sphericalangle C$  etc. se numesc **alăturate**, iar unghiurile  $\sphericalangle A$  și  $\sphericalangle C$ , respectiv  $\sphericalangle B$  și  $\sphericalangle D$  se numesc **opuse**.

#### Proprietăți:

**Teoremă:** Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este egală cu  $360^\circ$ .

**Definiție:** Perimetrul patrulaterului convex  $ABCD$  este dat de formula:

$$\mathcal{P}_{ABCD} = AB + BC + CD + DA.$$



#### Cum se aplică?

**1.** Fie  $ABCD$  un patrulater convex. Dacă  $\sphericalangle A = 60^\circ, \sphericalangle B = 73^\circ$  și  $\sphericalangle C = 135^\circ$ , aflați măsura unghiului  $D$ .

#### Soluție:

$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D = 360^\circ$ , deci  $60^\circ + 73^\circ + 135^\circ + \sphericalangle D = 360^\circ$  sau  $268^\circ + \sphericalangle D = 360^\circ$ , de unde rezultă că  $\sphericalangle D = 360^\circ - 268^\circ$  și obținem  $\sphericalangle D = 92^\circ$ .

2. Calculați perimetrul patrulaterului convex  $DEFG$ , cu  $DE = 7$  cm,  $EF = 5$  cm,  $FG = 3$  cm și  $GD = 6$  cm.

**Soluție:**

$$P_{DEFG} = DE + EF + FG + GD = 7 \text{ cm} + 5 \text{ cm} + 3 \text{ cm} + 6 \text{ cm} = 21 \text{ cm}.$$

3. Determinați măsurile unghiurilor patrulaterului convex  $MNPQ$  știind că  $\sphericalangle M = 5 \sphericalangle P$ ,  $\sphericalangle N = 2 \sphericalangle P$  și  $\sphericalangle Q = 4 \sphericalangle P$ .

**Soluție:**

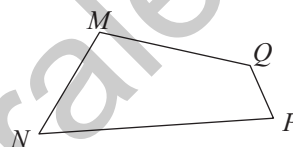
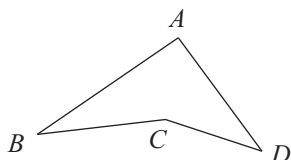
$\sphericalangle M + \sphericalangle N + \sphericalangle P + \sphericalangle Q = 360^\circ$ , deci  $5 \sphericalangle P + 2 \sphericalangle P + \sphericalangle P + 4 \sphericalangle P = 360^\circ$ , deci  $12 \sphericalangle P = 360^\circ$ , de unde rezultă că  $\sphericalangle P = 360^\circ : 12$  și obținem  $\sphericalangle P = 30^\circ$ ;  $\sphericalangle M = 5 \cdot 30^\circ = 150^\circ$ ;  $\sphericalangle N = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$  și  $\sphericalangle Q = 4 \cdot 30^\circ = 120^\circ$ .



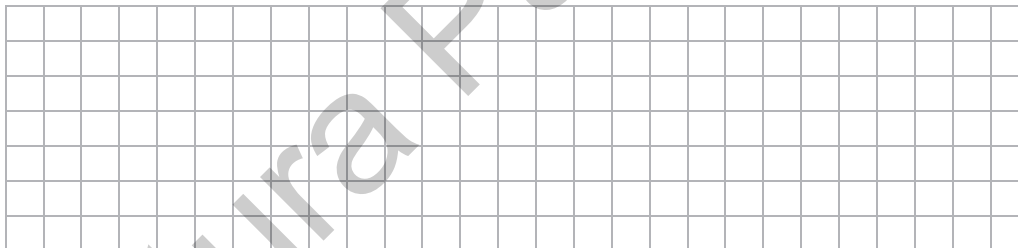
### Știu să rezolv

#### Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Completați spațiul punctat cu răspunsul corect. Dintre patrulaterelor  $ABCD$  și  $MNPQ$  reprezentate în figurile următoare, cel convex este patrulaterul .....

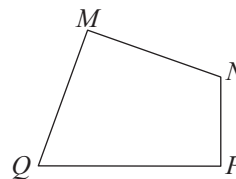


2. Construiește patrulaterul convex  $ABCD$  și notați cu  $O$  punctul de intersecție al diagonalelor acestuia.



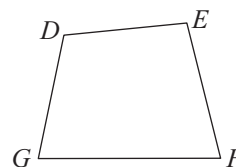
3. În figura alăturată este reprezentat patrulaterul convex  $MNPQ$ . Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a)  $\sphericalangle M$  și  $\sphericalangle N$  sunt alăturate;
- b)  $\sphericalangle P$  și  $\sphericalangle Q$  sunt opuse;
- c)  $\sphericalangle N$  și  $\sphericalangle Q$  sunt alăturate;
- d)  $\sphericalangle M$  și  $\sphericalangle P$  sunt opuse.

4. În figura alăturată este reprezentat patrulaterul convex  $DEFG$ . Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a) laturile  $DE$  și  $FG$  sunt alăturate;
- b) laturile  $DG$  și  $FG$  sunt opuse;
- c) laturile  $DE$  și  $EF$  sunt alăturate;
- d) laturile  $DG$  și  $EF$  sunt opuse.

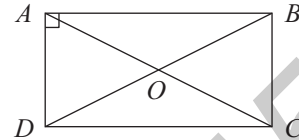
## Lecția 5. Dreptunghiul



### Citesc și rețin

**Definiție:** Paralelogramul care are un unghi drept se numește **dreptunghi**.

**Construcție:**



**Proprietăți:**

**Teorema 1:** Cele patru unghiuri ale unui dreptunghi sunt unghiuri drepte.

**Teorema 2:** Diagonalele dreptunghiului sunt congruente.

**Teorema 3:** Dacă într-un paralelogram diagonalele sunt congruente, atunci paralelogramul este dreptunghi.

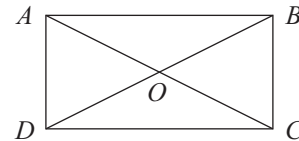


### Cum se aplică?

1. În dreptunghiul  $ABCD$ , notăm cu  $O$  punctul de intersecție a diagonalelor. Dacă  $AB = 8$  cm și  $\mathcal{P}_{AOB} = 18$  cm, aflați  $AC + BD$ .

**Soluție:**

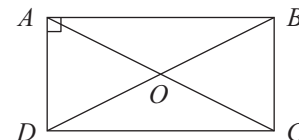
$\mathcal{P}_{AOB} = 18$  cm, deci  $AB + AO + OB = 18$  cm sau  $8$  cm +  $AO + OB = 18$  cm, așadar  $AO + OB = 10$  cm. Deoarece  $AC \equiv BD$ , rezultă că  $AO \equiv OB$  și  $AO + OB = AC$ , prin urmare  $AC = 10$  cm, și obținem  $AC + BD = 20$  cm.



2. Fie  $O$  punctul de intersecție a diagonalelor dreptunghiului  $ABCD$ . Dacă  $\sphericalangle CAD = 43^\circ$ , determinați măsura unghiului  $\sphericalangle COD$ .

**Soluție:**

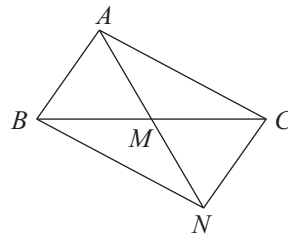
$ABCD$  este dreptunghi, deci  $AO \equiv DO$ , prin urmare  $\sphericalangle OAD \equiv \sphericalangle ODA$ . În  $\triangle OAD$  avem  $\sphericalangle O + \sphericalangle A + \sphericalangle D = 180^\circ$ , așadar  $43^\circ + 43^\circ + \sphericalangle O = 180^\circ$ , de unde obținem  $\sphericalangle O = 94^\circ$ ;  $\sphericalangle COD = \sphericalangle AOC - \sphericalangle AOD = 180^\circ - 94^\circ = 86^\circ$ .



3. În triunghiul  $ABC$  cu  $\sphericalangle A = 90^\circ$  construim mediana  $AM$ ,  $M \in BC$ . Arătați că  $AM = \frac{BC}{2}$ .

**Soluție:**

Notăm cu  $N$  simetricul punctului  $A$  față de punctul  $M$ . Deoarece  $AM \equiv MN$ ,  $BM \equiv MC$  și  $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ , rezultă că patrulaterul  $ABNC$  este dreptunghi, deci  $AN = BC$ , sau  $2AM = BC$ , prin urmare  $AM = \frac{BC}{2}$ .



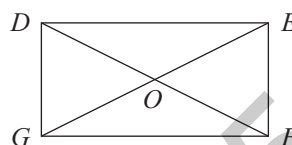


## Știu să rezolv

### Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. În figura alăturată este reprezentat dreptunghiul  $DEFG$  în care am notat cu  $O$  punctul de intersecție a diagonalelor. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

- a)  $\sphericalangle EDG = 90^\circ$ ;       b)  $DE \equiv GF$ ;   
 c)  $DG \not\equiv EF$ ;       d)  $DF \equiv EG$ .



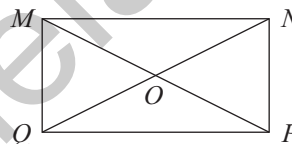
2. În figura alăturată este reprezentat dreptunghiul  $ABCD$ . Știind că  $AD = 7$  cm și  $CD = 11$  cm, completați spațiile punctate cu răspunsul corect:

- a)  $AB = \dots\dots\dots$ ;      b)  $BC = \dots\dots\dots$ .



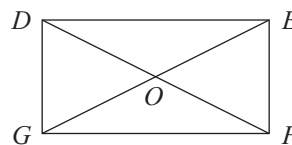
3. În figura alăturată este reprezentat dreptunghiul  $MNPQ$  în care am notat cu  $O$  punctul de intersecție a diagonalelor. Completați spațiile punctate cu răspunsul corect. Dacă:

- a)  $MP = 5$  cm, atunci  $NQ = \dots\dots\dots$ ;  
 b)  $NQ = 7$  cm, atunci  $MP = \dots\dots\dots$ ;  
 c)  $MP = 6$  cm, atunci  $NO = \dots\dots\dots$ ;  
 d)  $QO = 4$  cm, atunci  $MP = \dots\dots\dots$ .



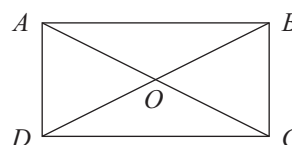
4. În figura alăturată am notat cu  $O$  punctul de intersecție a diagonalelor dreptunghiului  $DEFG$ . Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

- a)  $\triangle DOE$  este isoscel;       b)  $\triangle EOF$  este isoscel;   
 c)  $\triangle FOG$  este isoscel;       d)  $\triangle GOD$  este isoscel.



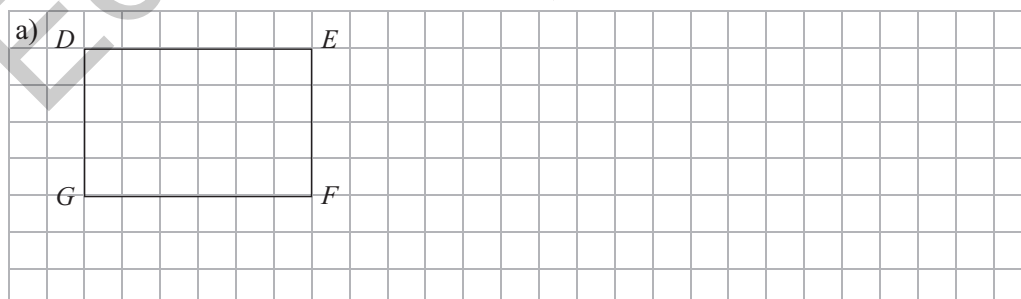
5. În figura alăturată am notat cu  $O$  punctul de intersecție a diagonalelor dreptunghiului  $ABCD$ . Completați spațiile punctate cu răspunsul corect:

- a) Dacă  $AC = 10$  cm și  $AB = 7$  cm, atunci  $\mathcal{P}_{AOB} = \dots\dots\dots$  .  
 b) Dacă  $BD = 14$  cm și  $BC = 5$  cm, atunci  $\mathcal{P}_{AOD} = \dots\dots\dots$  .



6. Calculați perimetrul dreptunghiului  $DEFG$ , știind că:

- a)  $DE = 15$  cm și  $EF = 8$  cm;      b)  $DG = 9$  cm și  $GF = 16$  cm.





## Teste de evaluare sumativă

### Testul 1

Se acordă 1 punct din oficiu.

- (1p) 1. Notăm cu  $O$  punctul de intersecție a diagonalelor dreptunghiului  $ABCD$ . Știind că:  
a)  $AC = 7$  cm, aflați  $BO$ ;                      b)  $CO = 5$  cm, aflați  $BD$ .
- (1p) 2. Se consideră rombul  $DEFG$ , cu  $DE = 5$  cm și  $\sphericalangle EDG = 70^\circ$ . Aflați:  
a)  $\mathcal{P}_{DEFG}$ ;    b)  $\sphericalangle DEG$ .
- (1p) 3. Notăm cu  $O$  punctul de intersecție a diagonalelor pătratului  $ABCD$ . Calculați  $\sphericalangle BAC + \sphericalangle COD$ .
- (1p) 4. În pătratul  $ABCD$ , notăm cu  $M, N, P$  și  $Q$  mijloacele laturilor  $AB, BC, CD$ , respectiv  $DA$ . Arătați că patrulaterul  $MNPQ$  este pătrat.
5. Notăm cu  $O$  punctul de intersecție a diagonalelor dreptunghiului  $ABCD$ . Dacă  $\sphericalangle AOB = 3\sphericalangle BOC$ , aflați:  
(1p) a)  $\sphericalangle BOC$ ;    (1p) b)  $\sphericalangle BAC$ .
6. Notăm cu  $O$  punctul de intersecție a diagonalelor rombului  $ABCD$  cu perimetrul de 28 cm și  $\sphericalangle B = 2\sphericalangle A$ . Construim  $OE \perp AD, E \in AD$ . Calculați:  
(1p) a)  $\sphericalangle A$ ;    (1p) b)  $BD$ ;    (1p) c)  $AE$ .

### Testul 2

Se acordă 1 punct din oficiu.

- (1p) 1. Se consideră rombul  $ABCD$ , cu  $AB = 4$  cm și  $\sphericalangle ABD = 54^\circ$ . Aflați:  
a)  $BC$ ;    b)  $\sphericalangle DBC$ .
- (1p) 2. Notăm cu  $O$  punctul de intersecție a diagonalelor pătratului  $ABCD$ , care are perimetrul de 20 cm. Aflați:  
a)  $\sphericalangle BDC$ ;    b)  $AD$ .
- (1p) 3. Arătați că diagonalele dreptunghiului  $DEFG$  sunt congruente.
- (1p) 4. Pe cercul  $\mathcal{C}(O)$  considerăm punctele  $A, B$  și  $C$ , astfel încât patrulaterul  $OABC$  este romb. Determinați măsurile unghiurilor rombului  $OABC$ .
5. Se consideră rombul  $ABCD$  cu  $\sphericalangle B = 3\sphericalangle A$ . Mediatoarele laturilor  $AB$  și  $CD$  intersectează diagonala  $AC$  în punctele  $E$ , respectiv  $F$ .  
(1p) a) Aflați măsurile unghiurilor rombului  $ABCD$ .  
(1p) b) Arătați că patrulaterul  $BEDF$  este un pătrat.
6. Notăm cu  $O$  punctul de intersecție a diagonalelor dreptunghiului  $ABCD$ . Dacă  $\mathcal{P}_{ADC} = 48$  cm,  $\mathcal{P}_{ABO} = 36$  cm și  $\mathcal{P}_{BCO} = 32$  cm, aflați:  
(1p) a)  $BC$ ;    (1p) b)  $AB$ ;    (1p) c)  $BD$ .

## Lecția 8. Trapezul. Trapezul isoscel



### Citesc și rețin

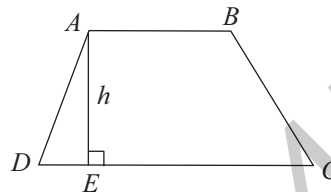
**Definiție:** Patrulaterul care are două laturi paralele și celelalte două laturi neparalele se numește **trapez**.

Laturile paralele ale unui trapez se numesc **bazele** trapezului.

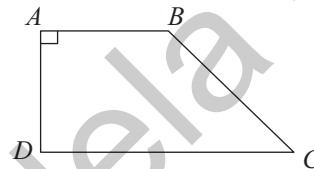
**Definiție:** Trapezul care are un unghi drept se numește **trapez dreptunghic**.

**Definiție:** Trapezul care are laturile neparalele congruente se numește **trapez isoscel**.

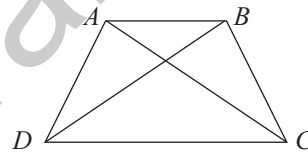
**Construcție:**



**Construcție:**



**Construcție:**



**Definiție:** Segmentul determinat de punctele de intersecție dintre bazele trapezului și o perpendiculară comună a acestora se numește **înălțimea** trapezului. Lungimea înălțimii se notează cu  $h$ .

**Proprietăți (trapezul isoscel):**

**Teorema 1:** Într-un trapez isoscel, unghiurile alăturate bazei mari și unghiurile alăturate bazei mici sunt, respectiv, congruente.

**Teorema 2:** Dacă unghiurile alăturate unei baze a unui trapez sunt congruente, atunci trapezul este isoscel.

**Teorema 3:** Diagonalele trapezului isoscel sunt congruente.

**Teorema 4:** Dacă un trapez are diagonalele congruente, atunci trapezul este isoscel.

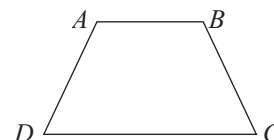


### Cum se aplică?

1. Aflați măsurile unghiurilor trapezului isoscel  $ABCD$  cu  $AB \parallel CD$ , dacă  $\sphericalangle A = 3\sphericalangle D$ .

**Soluție:**

Deoarece  $AB \parallel CD$ , rezultă că  $\sphericalangle A + \sphericalangle D = 180^\circ$  (interne de aceeași parte a secantei  $AD$ ), deci  $3\sphericalangle D + \sphericalangle D = 180^\circ$ , de unde rezultă că  $\sphericalangle D = 45^\circ$ ,  $\sphericalangle A = 135^\circ$ . Aplicăm teorema 1:  $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$  și  $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle D$ , prin urmare  $\sphericalangle B = 135^\circ$  și  $\sphericalangle C = 45^\circ$ .



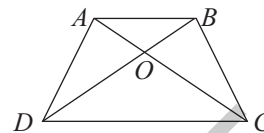


2. Notăm cu  $O$  punctul de intersecție a diagonalelor trapezului isoscel  $ABCD$  cu  $AB \parallel CD$ . Arătați că:

- a)  $AO \equiv BO$ ;      b)  $CO \equiv DO$ .

**Soluție:**

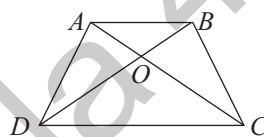
a) Deoarece  $ABCD$  este trapez isoscel avem  $AD \equiv BC$  și  $AC \equiv BD$ , deci  $\triangle ABD \equiv \triangle BAC$ , de unde rezultă că  $\sphericalangle ABO \equiv \sphericalangle BAO$ , prin urmare  $AO \equiv BO$ ; b)  $OC = AC - AO$  și  $OD = BD - BO$ , de unde rezultă că  $CO \equiv DO$ .



3. În trapezul isoscel  $ABCD$  cu  $AB \parallel CD$ , notăm cu  $O$  punctul de intersecție a diagonalelor. Dacă  $\mathcal{P}_{ABC} = 25$  cm și  $\mathcal{P}_{ADO} = 19$  cm, aflați  $AB$ .

**Soluție:**

$\mathcal{P}_{ABC} = 25$  cm, deci  $AB + BC + CA = 25$  cm sau  $AB + BD + DA = 25$  cm (1);  $\mathcal{P}_{ADO} = 19$  cm, deci  $AO + OD + DA = 19$  cm, dar în problema precedentă am arătat că  $AO \equiv BO$ , deci  $BD + DA = 19$  cm și înlocuind în (1) obținem  $AB = 6$  cm.

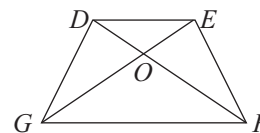


### Știu să rezolv

#### Exerciții și probleme de dificultate minimă

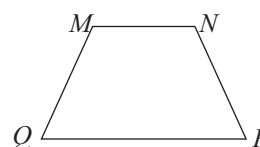
1. În figura alăturată este reprezentat trapezul isoscel  $DEFG$  cu  $DE \parallel FG$ , în care am notat cu  $O$  punctul de intersecție a diagonalelor. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

- |   |                          |   |                          |
|---|--------------------------|---|--------------------------|
| a) $DE \parallel GF$ ;                                | <input type="checkbox"/> | b) $DG \parallel EF$ ;                                | <input type="checkbox"/> |
| c) $DE \equiv GF$ ;                                   | <input type="checkbox"/> | d) $DG \equiv EF$ ;                                   | <input type="checkbox"/> |
| e) $\sphericalangle DGF \equiv \sphericalangle EFG$ ; | <input type="checkbox"/> | f) $\sphericalangle EDG \equiv \sphericalangle DEF$ ; | <input type="checkbox"/> |
| g) $DF \equiv EG$ ;                                   | <input type="checkbox"/> | h) $DO \equiv FO$ .                                   | <input type="checkbox"/> |



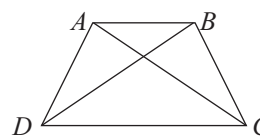
2. În figura alăturată este reprezentat trapezul isoscel  $MNPQ$  cu  $MN \parallel PQ$ . Completați spațiile punctate cu răspunsul corect. Dacă:

- a)  $MQ = 3,5$  cm, atunci  $NP = \dots\dots\dots$ ;  
 b)  $NP = 4,7$  cm, atunci  $MQ = \dots\dots\dots$ .



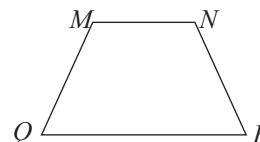
3. În figura alăturată este reprezentat trapezul isoscel  $ABCD$  cu  $AB \parallel CD$ . Completați spațiile punctate cu răspunsul corect. Dacă:

- a)  $AC = 6,5$  cm, atunci  $BD = \dots\dots\dots$ ;  
 b)  $BD = 3,8$  cm, atunci  $AC = \dots\dots\dots$ .



4. În figura alăturată este reprezentat trapezul isoscel  $MNPQ$  cu  $MN \parallel PQ$ . Completați spațiile punctate cu răspunsul corect. Dacă:

- a)  $\sphericalangle M = 127^\circ$ , atunci  $\sphericalangle N = \dots\dots\dots$ ;  
 b)  $\sphericalangle P = 68^\circ$ , atunci  $\sphericalangle Q = \dots\dots\dots$ .



# CAPITOLUL II

## Cercul

### Lecția 12. Unghi înscris în cerc



#### Citesc și rețin

**Definiție:** Numim **cerc** de centru  $O$  și rază  $R$ , notat  $\mathcal{C}(O, R)$ , mulțimea punctelor din plan situate la distanța  $R$  față de punctul  $O$ .

**Definiție:** **Măsura** unui cerc este egală cu  $360^\circ$ .

**Definiție:** Un unghi care are vârful în centrul unui cerc se numește **unghi la centru**. (În figura alăturată, unghiul  $\sphericalangle AOB$  este unghi la centru pentru cercul respectiv.)

#### Definiții:

- Mulțimea punctelor de pe un cerc situate în interiorul unghiului  $\sphericalangle AOB$  se numește **arc mic**  $AB$ , notat  $\widehat{AB}$ .
- Mulțimea punctelor de pe cerc situate în exteriorul unghiului  $\sphericalangle AOB$

se numește **arc mare**  $AB$ , notat  $\widehat{AMB}$ , unde  $M$  este un punct de pe cerc situat în exteriorul unghiului  $\sphericalangle AOB$  (pentru ambele arce, punctele  $A$  și  $B$  se numesc **capete** sau **extremități**).

**Observație:** Măsura arcului de cerc de extremități  $X$  și  $Y$  se notează  $\widehat{XY}$ .

#### Definiții:

- Dacă  $\widehat{AB}$  este un arc mic, atunci  $\widehat{AB} = \sphericalangle AOB$ .
- Dacă  $\widehat{AMB}$  este un arc mare, atunci  $\widehat{AMB} = 360^\circ - \sphericalangle AOB$ .

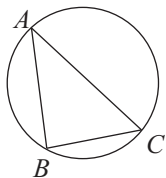
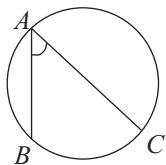
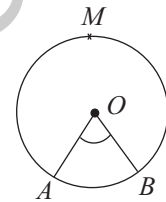
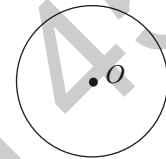
**Definiție:** Două arce  $\widehat{AB}$  și  $\widehat{CD}$  ale aceluiași cerc (sau din cercuri congruente) se numesc **congruente**, dacă  $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ ; se notează  $\widehat{AB} \equiv \widehat{CD}$ .

**Definiție:** Un unghi cu vârful pe cerc și ale cărui laturi sunt două coarde ale cercului se numește **unghi înscris în cerc**.

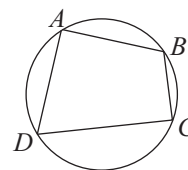
**Teoremă:** Măsura unui unghi înscris în cerc este egală cu jumătate din măsura arcului de cerc cuprins între laturile sale:

$$\sphericalangle BAC = \frac{\widehat{BC}}{2}.$$

**Definiție:** Un triunghi se numește **înscris într-un cerc** dacă vârfurile sale aparțin cercului respectiv. În acest caz, spunem că cercul este **circumscriș triunghiului**, centrul său fiind punctul de concurență a mediatoarelor laturilor triunghiului.



**Definiție:** Un patrulater se numește **patrulater inscriptibil**, dacă există un cerc care conține vârfurile acestuia. Cercul respectiv se numește **cercul circumscris patrulaterului**.



**Teoremă:** Patrulaterul care are unghiurile opuse suplementare este inscriptibil.

**Teoremă:** Patrulaterul în care diagonalele formează cu două laturi opuse ale acestuia unghiuri congruente este inscriptibil.



### Cum se aplică?

1. Pe un cerc se consideră punctele  $E$  și  $F$  și punctul  $D$  pe arcul mare de extremități  $E$  și  $F$ .

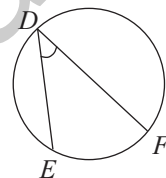
a) Dacă  $\widehat{EF} = 56^\circ$ , aflați  $\sphericalangle EDF$ .

b) Dacă  $\sphericalangle EDF = 32^\circ$ , aflați  $\widehat{EF}$ .

**Soluție:**

a)  $\sphericalangle EDF = \frac{\widehat{EF}}{2} = \frac{56^\circ}{2} = 28^\circ$ ; b)  $\sphericalangle EDF = \frac{\widehat{EF}}{2}$ , deci  $32^\circ = \frac{\widehat{EF}}{2}$ , de

unde rezultă că  $\widehat{EF} = 32^\circ \cdot 2$  și obținem  $\widehat{EF} = 64^\circ$ .

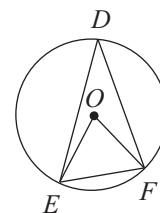


2. Pe cercul  $\mathcal{C}(O, 2\sqrt{3} \text{ cm})$  se consideră punctele  $D, E$  și  $F$ . Știind că  $\sphericalangle EDF = 30^\circ$ , calculați lungimea coardei  $EF$ .

**Soluție:**

$\sphericalangle EDF = \frac{\widehat{EF}}{2}$  sau  $30^\circ = \frac{\widehat{EF}}{2}$ , de unde rezultă că  $\widehat{EF} = 60^\circ$ , prin

urmare  $\sphericalangle EOF = 60^\circ$ , deci  $\triangle EOF$  este echilateral, prin urmare  $EF = R = 2\sqrt{3} \text{ cm}$ .



3. Fie  $ABC$  un triunghi înscris într-un cerc. Aflați măsurile unghiurilor triunghiului  $ABC$ , știind că măsurile arcelor  $\widehat{AB}$ ,  $\widehat{BC}$  și  $\widehat{CA}$  sunt direct proporționale cu numerele 10, 11 și 19.

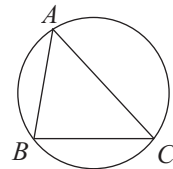
**Soluție:**

Din ipoteză avem  $\frac{\widehat{AB}}{10} = \frac{\widehat{BC}}{11} = \frac{\widehat{CA}}{19} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CA}}{10 + 11 + 19} = \frac{360^\circ}{40} = 9^\circ$ , deci  $\frac{\widehat{AB}}{10} = 9^\circ$ ,

de unde rezultă că  $\widehat{AB} = 90^\circ$  și analog obținem  $\widehat{BC} = 99^\circ$  și  $\widehat{CA} =$

$= 171^\circ$ ;  $\sphericalangle A = \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{99^\circ}{2} = 49^\circ 30'$ ,  $\sphericalangle B = \frac{\widehat{CA}}{2} = \frac{171^\circ}{2} = 85^\circ 30'$ ,  $\sphericalangle C =$

$= \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$ .





### Știu să rezolv

#### Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Încercuți litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

Măsura cercului este egală cu:

- A.  $100^\circ$ ;      B.  $180^\circ$ ;      C.  $360^\circ$ ;      D.  $400^\circ$ .

2. În figura alăturată este reprezentat cercul  $\mathcal{C}(O)$  și unghiul la centru  $\sphericalangle MON$ . Completați spațiile punctate cu răspunsul corect:

a) Dacă  $\sphericalangle MON = 54^\circ$ , atunci  $\widehat{MN} = \dots\dots\dots$ .

b) Dacă  $\widehat{MN} = 48^\circ$ , atunci  $\sphericalangle MON = \dots\dots\dots$ .



3. Pe un cerc se consideră punctele  $E$  și  $F$ , iar pe arcul mare de extremități  $E$  și  $F$  se consideră punctul  $D$ . Aflați  $\widehat{EF}$  și  $\widehat{EDF}$ , dacă:

a)  $\widehat{EDF} = 5 \widehat{EF}$ ;

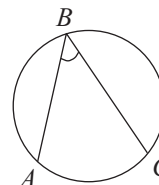
b)  $\widehat{EDF} = 4 \widehat{EF}$ .

b)

4. În figura alăturată este reprezentat un cerc și unghiul  $\sphericalangle ABC$  înscris în cercul respectiv. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a)  $\sphericalangle ABC = \frac{\widehat{AC}}{3}$ ;     

b)  $\sphericalangle ABC = \frac{\widehat{AC}}{2}$ .     



5. Pe un cerc se consideră punctele  $E$  și  $F$ , iar punctul  $D$  este situat pe arcul mare de extremități  $E$  și  $F$ . Aflați  $\sphericalangle EDF$ , dacă:

a)  $\widehat{EF} = 40^\circ$ ;

b)  $\widehat{EF} = 74^\circ$ ;

c)  $\widehat{EF} = 96^\circ$ .

c)

## Lecția 15. Poligoane regulate înscrise într-un cerc



### Citesc și rețin

**Definiție:** Un poligon care are toate laturile congruente și toate unghiurile congruente se numește **poligon regulat**.

**Teoremă:** Orice poligon regulat se poate înscrie într-un cerc. Centrul cercului se numește **centrul poligonului regulat**.

Lungimea laturii poligonului regulat cu  $n$  laturi se notează  $l_n$ .

**Definiție:** Segmentul construit din centrul unui poligon regulat, perpendicular pe o latură a acestuia, se numește **apotema poligonului regulat**.

**Teoremă:** Suma măsurilor unghiurilor unui poligon convex cu  $n$  laturi este dată de formula  $S_n = (n - 2) \cdot 180^\circ$ .

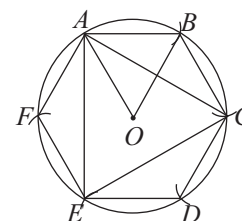
**Teoremă:** Măsura unui unghi al unui poligon regulat cu  $n$  laturi, notată  $u_n$ , este dată de

$$\text{formula } u_n = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}.$$

### Construcția unui poligon regulat înscris într-un cerc dat

În continuare, prezentăm construcția cu ajutorul compasului și al riglei negradate a hexagonului regulat  $ABCDEF$  înscris în cercul dat,  $\mathcal{C}(O, R)$ .

Pe cercul  $\mathcal{C}(O, R)$  construim punctul  $A$  și, luând în compas o deschidere egală cu  $R$ , construim arcul  $\widehat{AB}$ .  $\triangle AOB$  este echilateral, deci  $\widehat{AB} = 60^\circ$ , prin urmare, construind în același fel arcele  $\widehat{BC}$ ,  $\widehat{CD}$ ,  $\widehat{DE}$  și  $\widehat{EF}$ , cercul a fost împărțit în șase arce de cerc congruente. Cu ajutorul riglei, construim hexagonul regulat  $ABCDEF$ .



**Observație:** Triunghiul  $ACE$  este echilateral, deci această construcție poate fi utilizată și pentru construcția triunghiului echilateral înscris într-un cerc dat.



### Cum se aplică?

1. Calculați suma măsurilor unghiurilor unui poligon regulat cu 10 laturi.

**Soluție:**

Se aplică formula  $S_n = (n - 2) \cdot 180^\circ$ . Obținem  $S_{10} = (10 - 2) \cdot 180^\circ = 8 \cdot 180^\circ = 1440^\circ$ .

2. Aflați numărul de laturi ale unui poligon regulat care are unghiurile cu măsura de  $135^\circ$ .



## Modele de teste pentru evaluarea cunoștințelor

### Testul 1

Capitolele: Mulțimea numerelor reale, Patrulaterul și Cercul  
Se acordă 10 puncte din oficiu.

#### Subiectul I. Încercuiți litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

- (7p) 1. Numărul  $\sqrt{0,01}$  aparține mulțimii:  
A.  $\mathbb{N}$ ;                      B.  $\mathbb{Z}$ ;                      C.  $\mathbb{Q}$ ;                      D.  $\mathbb{I}$ .
- (7p) 2. Media aritmetică a numerelor  $\sqrt{20}$  și  $2\sqrt{45}$  este egală cu:  
A.  $3\sqrt{6}$ ;                      B.  $2\sqrt{3}$ ;                      C.  $6\sqrt{2}$ ;                      D.  $4\sqrt{5}$ .
- (7p) 3. Comparând numerele reale  $a = 5\sqrt{3}$  și  $b = 6\sqrt{2}$  obținem:  
A.  $a \geq b$ ;                      B.  $a > b$ ;                      C.  $a < b$ ;                      D.  $a \leq b$ .
- (7p) 4. Rezultatul calculului  $3\sqrt{10} \cdot \sqrt{8}$  este egal cu:  
A.  $12\sqrt{5}$ ;                      B.  $6\sqrt{3}$ ;                      C.  $9\sqrt{2}$ ;                      D.  $10\sqrt{2}$ .
- (7p) 5. Perimetrul paralelogramului cu  $L = 15$  cm și  $l = 8$  cm este egal cu:  
A. 52 cm;                      B. 28 cm;                      C. 46 cm;                      D. 30 cm.
- (7p) 6. Dacă  $ABCD$  este un trapez isoscel cu  $AB \parallel CD$  și  $\sphericalangle A = 108^\circ$ , atunci măsura unghiului  $C$  este egală cu:  
A.  $65^\circ$ ;                      B.  $72^\circ$ ;                      C.  $54^\circ$ ;                      D.  $90^\circ$ .

#### Subiectul al II-lea. La următoarele probleme se cer rezolvările complete.

- (8p) 1. Scrieți sub forma cea mai simplă opusul numărului real:  
$$x = \left| (-\sqrt{2})^3 + (-\sqrt{2})^5 \right| : (-2\sqrt{6}).$$
- (8p) 2. Rotunjiți la prima zecimală numărul real  $a = \left( \sqrt{0,5 \cdot 1,3(8)} - \frac{7}{30} \right) : \sqrt{1,3}$ .
- (8p) 3. Media aritmetică ponderată a numerelor reale  $3\sqrt{5}$  și  $8\sqrt{5}$  cu ponderile 2, respectiv  $n$  este egală cu  $6\sqrt{5}$ . Determinați numărul natural  $n$ .
- (8p) 4. Pe un cerc se consideră punctele  $D$ ,  $E$  și  $F$  în această ordine, astfel încât  $\widehat{EDF} = 7\widehat{EF}$ . Aflați măsura unghiului  $\sphericalangle EDF$ .
5. Se consideră trapezul isoscel  $ABCD$  cu  $AB \parallel CD$ ,  $AB = 7$  cm,  $CD = 21$  cm și  $\sphericalangle A = 2\sphericalangle D$ .
- (8p) a) Aflați măsurile unghiurilor  $\sphericalangle A$ ,  $\sphericalangle B$ ,  $\sphericalangle C$  și  $\sphericalangle D$ .
- (8p) b) Calculați perimetrul trapezului  $ABCD$ .

# INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

## TESTE DE EVALUARE ÎNȚĂLĂ

### Testul 1

Partea I:

Nr. item	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Rezultate	B	C	A	D	D	B	B	C	D

Partea a II-a: **1.**  $BC + AC > AB$ , deci  $BC = 10$  cm. **2.** a)  $x = \frac{11}{10} - \left( \frac{4}{3} - \frac{3}{4} \right) : \frac{5}{6} = \frac{11}{10} - \frac{25}{12} \cdot \frac{6}{5} = \frac{3}{10} - \frac{5}{2} = \frac{8^2}{30} = \frac{4}{15}$ ; b)  $x = \frac{4}{15} = 0,2(6) = 0,266\dots$ , deci rotunjind la a doua zecimală numărul rațional pozitiv  $x$  obținem 0,27. **3.** a)  $BC = 17$  cm; b)  $\sphericalangle AED = 60^\circ$ ; c)  $\triangle ADE$  este echilateral cu latura de 10 cm, prin urmare  $\mathcal{P}_{ADE} = 30$  cm.

### Testul 2

Partea I:

Nr. item	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Rezultate	C	D	A	B	A	D	C	B	A

Partea a II-a: **1.**  $x = \frac{21}{40}$ . **2.** a)  $a = 9$  și  $b = 12$ ; b)  $\frac{b}{a} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} = 1,3(3)$ . **3.** a)  $\sphericalangle NFD = \sphericalangle EDF = 60^\circ$ , deci  $NF \parallel DE$ ; b)  $NF \equiv MD$ ;  $\sphericalangle F = \sphericalangle D$  și  $FD \equiv DE$ , deci  $\triangle NFD \equiv \triangle MDE$ ; c)  $\triangle NFD \equiv \triangle MDE$ , deci  $\sphericalangle DNF = \sphericalangle EMD = 90^\circ$ , deci  $DN \perp FN$ , dar  $FN \parallel DE$ , prin urmare  $ND \perp DE$ .

### Testul 3

Partea I:

Nr. item	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Rezultate	D	D	C	A	C	A	B	C	C

Partea a II-a: **1.**  $x \in \{0, 1, 2\}$ . **2.** a)  $x < y$ ; b)  $y : (x^2 - y) = \frac{17}{9} : \left( \frac{121}{36} - \frac{17}{9} \right) = \frac{17}{9} : \frac{53}{36} = \frac{68}{53}$ . **3.** a)  $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABD = 45^\circ$ , deci  $AD \equiv BD$ ; b)  $\sphericalangle ACE = 45^\circ$  și  $\sphericalangle CDH = 90^\circ$ , deci  $\sphericalangle DHC = 45^\circ$ ; c)  $AD \equiv BD$ ,  $\sphericalangle ADH \equiv \sphericalangle BDC$  și  $DH \equiv DC$ , deci  $\triangle ADH \equiv \triangle BDC$ , așadar  $AH \equiv BC$ .

## ALGEBRĂ

### CAPITOLUL I. MULȚIMEA NUMERELOR REALE

#### Lecția 1. Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural. Estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional

**1.** a)  $16 = 4^2$ ; b)  $36 = 6^2$ ; c)  $49 = 7^2$ ; d)  $64 = 8^2$ ; e)  $81 = 9^2$ ; f)  $100 = 10^2$ ; g)  $144 = 12^2$ ; h)  $196 = 14^2$ ; i)  $324 = 18^2$ ; j)  $400 = 20^2$ . **2.** a) Rădăcina pătrată a numărului natural 25 este 5 sau radical din 25 este egal cu 5. **3.** a) A; b) A; c) A; d) A; e) F; f) A. **4.** a)  $\sqrt{16} = 4$ ; b)  $\sqrt{25} = 5$ ; c)  $\sqrt{36} = 6$ ; d)  $\sqrt{49} = 7$ ; e)  $\sqrt{64} = 8$ ; f)  $\sqrt{100} = 10$ ; g)  $\sqrt{121} = 11$ ; h)  $\sqrt{144} = 12$ ; i)  $\sqrt{225} = 15$ ; j)  $\sqrt{256} = 16$ . **5.** a)  $\sqrt{(-11)^2} = 11$ ; b)  $\sqrt{(-23)^2} = 23$ ; c)  $\sqrt{(-59)^2} = 59$ ; d)  $\sqrt{(-77)^2} = 77$ . **6.** a)  $A = \{-7, 7\}$ ; b)  $B = \{-8, 8\}$ ; c)  $C = \{-29, 29\}$ ; d)  $D = \{-67, 67\}$ . **7.** a) 9; b) 1; c) 15; d) 13; e) 3; f) -4. **8.** a) 90; b) -1; c) -2; d) -7. **9.** a) A; b) A; c) A; d) A. **10.** a)  $\frac{6}{5}$ ; b)  $\frac{4}{7}$ ; c)  $\frac{8}{9}$ ; d)  $\frac{5}{7}$ ; e)  $\frac{9}{10}$ . **11.** a)  $\frac{3}{2}$ ; b)  $\frac{3}{4}$ ; c)  $\frac{3}{2}$ ; d)  $\frac{5}{6}$ ; e)  $\frac{4}{7}$ ; f)  $\frac{5}{9}$ . **12.** a)  $\frac{1}{2}$ ; b)  $\frac{4}{5}$ ; c)  $\frac{3}{5}$ ; d)  $\frac{3}{2}$ ; e)  $\frac{7}{12}$ ; g)  $\frac{15}{8}$ ; h)  $\frac{14}{5}$ .



### Fișă pentru portofoliul elevului

I. 1. A. 2. A. 3. A. II. 1.  $4\sqrt{5}$  . 2.  $\sqrt{2}$  . 3.  $-2\sqrt{2}$  . III. 1. C. 2. D. 3. B. IV.  $a = \frac{4}{9}$ ,  $\sqrt{a} = \frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$ .

V. a)  $x = \sqrt{2}$ ; b)  $y = 2\sqrt{2}$ ;  $\sqrt{xy} = 2 \in \mathbb{N}$ .

### Lecția 12. Media aritmetică și media aritmetică ponderată a $n$ numere reale, $n \geq 2$

1. 28; 32; 40; 35. 2. 7; 8; 9; 12. 3.  $9\sqrt{6}$ ;  $12\sqrt{5}$ ;  $8\sqrt{7}$ ;  $12\sqrt{3}$ . 4.  $5\sqrt{2}$ ;  $4\sqrt{3}$ ;  $6\sqrt{5}$ ;  $8\sqrt{7}$ . 5. a) 8; b) 7; c) 7; d) 6. 6. a)  $2\frac{1}{8}$ ; b)  $1\frac{7}{24}$ ; c)  $\frac{19}{36}$ ; d)  $1\frac{21}{40}$ . 7. a)  $\frac{25}{24}$ ; b)  $\frac{47}{24}$ ; c)  $\frac{61}{60}$ ; d)  $\frac{17}{9}$ . 8. a)  $y = 34\sqrt{2}$ ; b)  $y = 30\sqrt{2}$ ; c)  $y = 27\sqrt{2}$ . 9. a)  $\sqrt{2} + 3\sqrt{7}$ ; b)  $3\sqrt{5} + 3\sqrt{3}$ . 10. a)  $5\sqrt{2} + 5\sqrt{3} + 7\sqrt{5}$ ; b)  $5\sqrt{2} + 2\sqrt{5} + 3\sqrt{7}$ . 11. a)  $1\frac{7}{8}$ ; b)  $\frac{23}{36}$ ; c)  $\frac{29}{54}$ ; d)  $1\frac{13}{72}$ . 12. a)  $y = 15\sqrt{7}$ ; b)  $y = 7\sqrt{7}$ ; c)  $y = 13\sqrt{7}$ . 13. a)  $2\frac{1}{30}$ ; b)  $\frac{167}{192}$ . 14. a)  $\frac{43}{150}$ ; b)  $\frac{77}{480}$ . 15. a)  $5\sqrt{2}$ ; b)  $6\sqrt{7}$ . 16. a)  $\frac{21\sqrt{5}}{2}$ ; b)  $\frac{19\sqrt{3}}{2}$ . 17. a)  $5\sqrt{7}$ ; b)  $4\sqrt{5}$ . 18. a)  $n = 5$ ; b)  $n = 6$ . 19. a)  $1\frac{9}{29}$ ; b)  $2\frac{9}{22}$ . 20. a)  $n = 3$ ; b)  $n = 2$ . 21. a)  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ; b)  $\frac{\sqrt{2}}{6}$ . 22. 7,32. 23. a)  $n = 3$ ; b)  $n = 5$ . 24.  $a = 2\sqrt{7}$ ,  $b = 6\sqrt{7}$ ,  $c = 16\sqrt{7}$ . 25. Deoarece  $\overline{1,a38} < \overline{1,2a8}$  rezultă că  $a \in \{0, 1\}$ ;  $x < \overline{1,a38} < \overline{1,2a8}$ , deci  $\overline{1,a38} = \frac{x+1,2a8}{2}$ , de unde obținem  $x \in \{0,868; 1,058\}$ . Test

de evaluare stadială: 1. a)  $3\sqrt{7}$ ; b) 2; c)  $4\sqrt{3} + 3$ . 2. a)  $5\sqrt{6}$ ; b)  $\frac{59}{120}$ . 3.  $2\sqrt{3}$ .

### Lecția 13. Media geometrică a două numere reale pozitive

1. B. 2. 4; 5; 6; 7. 3. 6; 9; 8; 10. 4. a) 14; b) 15; c) 12; d) 20. 5. a) 5; b) 7; c) 4; d) 3. 6. a)  $\frac{2\sqrt{2}}{5}$ ; b)  $\frac{3\sqrt{7}}{5}$ ; c)  $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ; d)  $\frac{7\sqrt{2}}{3}$ . 7. a)  $\frac{7\sqrt{3}}{6}$ ; b)  $\frac{5\sqrt{3}}{6}$ ; c)  $\frac{5\sqrt{6}}{12}$ ; d)  $\frac{13\sqrt{5}}{15}$ . 8. a) 10; b) 15; c) 56; d) 63. 9. a)  $x = 32\sqrt{3}$ ; b)  $x = 32\sqrt{2}$ ; c)  $x = 12\sqrt{6}$ ; d)  $x = 48\sqrt{3}$ . 10. a)  $10\sqrt{2}$ ; b)  $21\sqrt{3}$ ; c)  $20\sqrt{2}$ ; d)  $12\sqrt{7}$ . 11. a)  $2\sqrt{21}$ ; b)  $3\sqrt{10}$ ; c)  $5\sqrt{14}$ ; d)  $6\sqrt{14}$ . 12. a)  $6\sqrt{\sqrt{3}}$ ; b)  $10\sqrt{\sqrt{2}}$ . 13. a)  $25\sqrt{6}$ ; b)  $9\sqrt{5}$ ; c)  $18\sqrt{3}$ ; d)  $32\sqrt{7}$ ; e)  $24\sqrt{2}$ ; f)  $25\sqrt{7}$ . 14.  $x + x^{-1} = x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$ . 15. a)  $x + y \geq 2\sqrt{x \cdot y}$ ,  $y + z \geq 2\sqrt{y \cdot z}$  și  $z + x \geq 2\sqrt{z \cdot x}$ , prin urmare  $(x + y)(y + z)(z + x) \geq 8\sqrt{x^2 y^2 z^2} = 8xyz$ ; b)  $xy + 1 \geq 2\sqrt{xy}$ ,  $yz + 1 \geq 2\sqrt{yz}$  și  $zx + 1 \geq 2\sqrt{zx}$ , prin urmare  $(xy + 1)(yz + 1)(zx + 1) \geq 8xyz$ . 16. a)  $x = \sqrt{2}$ ,  $y = 2\sqrt{2}$ ;  $m_g = 2$ ; b)  $x = \sqrt{3}$ ,  $y = 3\sqrt{3}$ ;  $m_g = 3$ . 17. a)  $x = 4\sqrt{3}$ ,  $y = \frac{\sqrt{3}}{9}$ ;  $m_g = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ; b)  $x = 3\sqrt{2}$ ,  $y = \frac{\sqrt{2}}{4}$ ;  $m_g = \frac{\sqrt{6}}{2}$ . 18.  $x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy} \leq \frac{x(y+z)}{2} + \frac{y(z+x)}{2} + \frac{z(x+y)}{2} = \sqrt{x^2 y^2} + \sqrt{y^2 z^2} + \sqrt{z^2 x^2} \leq \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{y^2 + z^2}{2} + \frac{z^2 + x^2}{2} = x^2 + y^2 + z^2$ . 19.  $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) \geq 2 + 2 + 2 = 6$ . 20. Notând  $b + c = x$ ,  $c + a = y$ ,  $a + b = z$  obținem

$\in \{-804, 804\}$ . **Test de evaluare stadială:** 1. a)  $x \in \{-9, 9\}$ ; b)  $x \in \{-2\sqrt{6}, 2\sqrt{6}\}$ ; c)  $x \in \left\{-\frac{5\sqrt{2}}{6}, \frac{5\sqrt{2}}{6}\right\}$ . 2.  $x \in \{-3, 13\}$ . 3.  $x \in \{-5 \cdot 2^{13}, 5 \cdot 2^{13}\}$ .

### Teste de evaluare sumativă

**Testul 1.** 5.  $x = \frac{\sqrt{6}}{6}$ ,  $y = \sqrt{6}$ ;  $m_g = 1 \in \mathbb{N}$ . 6.  $n = 4$ . **Testul 2.** 5.  $y = 4\sqrt{5} - 3$ . 6.  $m_{ap} = 0,6$ .

**Testul 3.** 5.  $m_{ap} = \frac{5}{13}$ . 6.  $y = 4\sqrt{6}$ .

### Fișă pentru portofoliul elevului

I. 1. F. 2. A. 3. A. II. 1.  $2\sqrt{2}$ . 2.  $\emptyset$ . 3.  $\frac{1}{3}$ . III. 1. A. 2. C. 3. D. IV.  $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ,  $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;  $m_g = 1 \in \mathbb{N}$ .

V. a)  $n = 6$ ; b)  $x \in \left\{-\frac{3\sqrt{2}}{4}, \frac{3\sqrt{2}}{4}\right\}$ .

### Probleme din realitatea cotidiană

1.  $\mathcal{P} = 4 \cdot 15\sqrt{2}$  dam  $> 4 \cdot 15 \cdot 1,41$  dam = 84,6 dam  $> 84,5$  dam. 2.  $3,5$  m<sup>2</sup>. 3. 5850 kg. 4. 34 cărți. 5. 2,5 lei. 6. 8,75. 7.  $2\sqrt{34}$  dm =  $\sqrt{136}$  dm  $> 3\sqrt{15}$  dm =  $\sqrt{135}$  dm. 8.  $\mathcal{P} = 10\sqrt{5} \cdot 4$  m  $< 40 \cdot 2,237$  m = 89,48 m  $< 89,5$  m. 9. Luna a doua. 10.  $245\sqrt{3}$  km  $> 245 \cdot 1,73$  km = 423,85 km;  $423,85 : 60 = 7,06\dots$ , deci automobilul nu poate parcurge distanța respectivă în 7 ore. 11.  $\mathcal{A}_d = 30\sqrt{3}$  m<sup>2</sup>;  $\mathcal{A}_r = 30\sqrt{3}$  m<sup>2</sup>, deci  $\mathcal{A}_d = \mathcal{A}_r$ . 12. 25 ani. 13. 7. 14. Laura, Irina, Ioana, Maria sau Maria, Irina, Ioana, Laura. 15. 94 spectatori. 16.  $\mathcal{V}_c = 250\sqrt{2}$  dm<sup>3</sup>  $> 250 \cdot 1,41$  dm<sup>3</sup> = 352,5 dm<sup>3</sup> = 352,5 l. 17. Ștefan, Andrei și Mihai au aceeași vârstă. 18. Dan și Ion au aceeași vârstă. 19. 2 ani sau 3 ani sau 4 ani sau 6 ani. 20. Vali – 1 an, Ion – 3 ani, Nicu – 5 ani, Dan – 9 ani sau Vali – 2 ani, Ion – 4 ani, Nicu – 5 ani, Dan – 8 ani.

## GEOMETRIE

### CAPITOLUL I. PATRULATERUL

#### Lecția 1. Patrulaterul convex

1.  $MNPQ$ . 3. a) A; b) F; c) F; d) A. 4. a) F; b) F; c) A; d) A. 5. C. 360°. 6. A. 7. a)  $\sphericalangle D = 110^\circ$ ; b)  $\sphericalangle A = 85^\circ$ . 8. a)  $\mathcal{P}_{MNPQ} = 23$  cm; b)  $\mathcal{P}_{MNPQ} = 24$  cm. 9. F. 10. a)  $AD = 12$  cm; b)  $BC = 8,5$  cm. 11. a)  $\sphericalangle M = 36^\circ$ ,  $\sphericalangle N = 72^\circ$ ,  $\sphericalangle P = 108^\circ$ ,  $\sphericalangle Q = 144^\circ$ ; b)  $\sphericalangle M = 96^\circ$ ,  $\sphericalangle N = 24^\circ$ ,  $\sphericalangle P = 120^\circ$ ,  $\sphericalangle Q = 120^\circ$ . 12. Notăm cu  $x^\circ$ ,  $(x + 2)^\circ$ ,  $(x + 4)^\circ$  și  $(x + 6)^\circ$  măsurile celor 4 unghiuri;  $x^\circ + x^\circ + 2^\circ + x^\circ + 4^\circ + x^\circ + 6^\circ = 360^\circ$  sau  $4x^\circ + 12^\circ = 360^\circ$ , deci  $4x^\circ = 348^\circ$ , așadar  $x^\circ = 87^\circ$ , prin urmare unghiurile au măsurile de  $87^\circ$ ,  $89^\circ$ ,  $91^\circ$ ,  $93^\circ$ . 13. a)  $DE = EF = 30$  cm,  $FG = 10$  cm,  $GD = 20$  cm; b)  $EF = FG = 30$  cm,  $GD = 7,5$  cm,  $DE = 22,5$  cm. 14. a)  $\sphericalangle A = 51^\circ$ ,  $\sphericalangle B = 102^\circ$ ,  $\sphericalangle C = 101^\circ$ ,  $\sphericalangle D = 106^\circ$ ; b)  $\sphericalangle A = 81^\circ$ ,  $\sphericalangle B = 138^\circ$ ,  $\sphericalangle C = 95^\circ$ ,  $\sphericalangle D = 46^\circ$ . 15. a)  $AB = 19$  cm,  $BC = 38$  cm,  $CD = 32$  cm și  $DA = 11$  cm; b)  $AB = 30$  cm,  $BC = 45$  cm,  $CD = 10$  cm și  $DA = 15$  cm. 16. a)  $\sphericalangle D = 120^\circ$ ,  $\sphericalangle E = 72^\circ$ ,  $\sphericalangle F = 96^\circ$  și  $\sphericalangle G = 72^\circ$ ; b) a)  $\sphericalangle D = 30^\circ$ ,  $\sphericalangle E = 60^\circ$ ,  $\sphericalangle F = 120^\circ$  și  $\sphericalangle G = 150^\circ$ . 17. a)  $\sphericalangle M = 60^\circ$ ,  $\sphericalangle N = 70^\circ$ ,  $\sphericalangle P = 100^\circ$ ,  $\sphericalangle Q = 130^\circ$ ; b)  $\sphericalangle M = 64^\circ$ ,  $\sphericalangle N = 72^\circ$ ,  $\sphericalangle P = 104^\circ$ ,  $\sphericalangle Q = 120^\circ$ . 18. a)  $\sphericalangle D = 150^\circ$ ,  $\sphericalangle E = 120^\circ$ ,  $\sphericalangle F = 75^\circ$ ,  $\sphericalangle G = 15^\circ$ ; b)  $\sphericalangle D = 144^\circ$ ,  $\sphericalangle E = 108^\circ$ ,  $\sphericalangle F = 72^\circ$ ,  $\sphericalangle G = 36^\circ$ . 19.  $AC < AB + BC$  și  $AC < AD + DC$ , deci  $2AC < \mathcal{P}_{ABCD}$  și analog se arată că  $2BD < \mathcal{P}_{ABCD}$ , prin urmare  $2(AC + BD) < 2\mathcal{P}_{ABCD}$ , de unde rezultă că  $AC + BD < \mathcal{P}_{ABCD}$ . 20. a)  $\mathcal{P}_{ABD} + \mathcal{P}_{BCD} = \mathcal{P}_{ACD} + \mathcal{P}_{ABC}$ , sau  $2BD = 2AC$ , deci  $AC \equiv BD$ ; b)  $\mathcal{P}_{ABD} = \mathcal{P}_{ACD}$  și  $AC \equiv BD$ , prin urmare  $AB \equiv CD$ . **Test de evaluare stadială:** 1.  $\sphericalangle F = 85^\circ$ . 2.  $\sphericalangle M = 90^\circ$ . 3.  $AC = 9$  cm.

### Fișă pentru portofoliul elevului

**I.** 1. A. 2. A. 3. A. **II.** 1.  $81 \text{ cm}^2$ . 2.  $9 \text{ cm}$ . 3.  $27 \text{ cm}^2$ . **III.** 1. C. 2. D. 3. B. **IV.**  $\triangle TAB \equiv \triangle TDC$ , deci  $\sphericalangle TAB \equiv \sphericalangle TDC$  și  $\sphericalangle TBA \equiv \sphericalangle TCD$ , dar  $\sphericalangle TAD \equiv \sphericalangle TDA$  și  $\sphericalangle TBC \equiv \sphericalangle TCB$ , prin urmare  $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CDA$  și  $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DCB$ , deci  $\sphericalangle DAB + \sphericalangle ABC = 180^\circ$ , de unde rezultă că  $AD \parallel BC$ , așadar  $ABCD$  este trapez isoscel. **V.** a) Observăm că  $\sphericalangle ADB = \sphericalangle BDC = \sphericalangle ACD = 30^\circ$ , deci  $\sphericalangle DAC = 90^\circ$ , prin urmare  $CD = 2AD = 60 \text{ cm}$ ;  $\mathcal{P}_{ABCD} = 150 \text{ cm}$ ; b) În  $\triangle ADO$ ,  $DO = 2AO$ , deci  $CO = 2OA$ , prin urmare  $OC \equiv OE$  și analog se arată că  $OD \equiv OF$ , de unde rezultă că  $CDEF$  este dreptunghi. Din  $\triangle CDE$  obținem  $DE = \frac{CE}{2} = 34 \text{ cm}$ ;  $\mathcal{A}_{CDEF} = 2040 \text{ cm}^2$ .

### Probleme din realitatea cotidiană

1. 96 stâlpi. 2.  $\mathcal{A}_{DEFC} = 16,5 \text{ dm}^2$ . 3.  $\mathcal{P}_{DMCN} = 16 \text{ dm}$ . 4.  $16 \text{ m}$ . 5. Cantitățile sunt egale. 6.  $\mathcal{A}_{ABCD} = 44 \text{ m}^2$ . 7.  $12 \text{ m}^2$ . 8.  $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 120^\circ$  și  $\sphericalangle C = \sphericalangle D = 60^\circ$ . 9.  $800 \text{ m}^2$ . 10.  $5429 \text{ m}^2$ ,  $2492 \text{ m}^2$ . 11. a)  $d(A, \widehat{CD}) + d(B, \widehat{CD}) = 1,3 \text{ m}$ ; b)  $d(A, \widehat{CD}) = 1,3 \text{ m}$ . 12.  $\mathcal{A}_{AMCN} = 100 \text{ dam}^2$ . 13.  $\mathcal{A}_{EFGH} = 50\% \mathcal{A}_{ABCD}$ . 14.  $\mathcal{P}_{ABCD} = 9 \text{ m}$ . 15.  $EF = 8 \text{ m}$ . 16.  $\mathcal{A}_{ABCD} = 200 \text{ dam}^2$ . 17.  $54 \text{ m}^2$  de parchet. 18.  $\mathcal{A} = 490 \text{ m}^2$ . 19.  $108 \text{ m}$ . 20.  $BD = 2 \text{ km}$ ,  $DC = 4 \text{ km}$ .

## CAPITOLUL II. CERCUL

### Lecția 12. Unghi înscris în cerc

1. C. 2. a)  $\widehat{MN} = 54^\circ$ ; b)  $\sphericalangle MON = 48^\circ$ . 3. a)  $\widehat{EF} = 60^\circ$ ;  $\widehat{EDF} = 300^\circ$ ; b)  $\widehat{EF} = 72^\circ$ ;  $\widehat{EDF} = 288^\circ$ . 4. a) F; b) A. 5. a)  $\sphericalangle EDF = 20^\circ$ ; b)  $\sphericalangle EDF = 37^\circ$ ; c)  $\sphericalangle EDF = 48^\circ$ . 6. a)  $\widehat{EF} = 30^\circ$ ; b)  $\widehat{EF} = 52^\circ$ ; c)  $\widehat{EF} = 90^\circ$ . 7. a)  $\sphericalangle A = 77^\circ$ ,  $\sphericalangle B = 67^\circ$  și  $\sphericalangle C = 36^\circ$ ; b)  $\sphericalangle A = 30^\circ 30'$ ,  $\sphericalangle B = 85^\circ$  și  $\sphericalangle C = 64^\circ 30'$ . 8. a)  $\widehat{AB} = 170^\circ$ ,  $\widehat{BC} = 80^\circ$  și  $\widehat{CA} = 110^\circ$ ; b)  $\widehat{AB} = 146^\circ$ ,  $\widehat{BC} = 92^\circ$  și  $\widehat{CA} = 122^\circ$ . 9.  $\sphericalangle MPN = 90^\circ$ . 10.  $EF = 14\sqrt{5} \text{ cm}$ . 11. a)  $\sphericalangle A = 60^\circ$ ,  $\sphericalangle B = 70^\circ$  și  $\sphericalangle C = 50^\circ$ ; b)  $\sphericalangle A = 63^\circ$ ,  $\sphericalangle B = 72^\circ$  și  $\sphericalangle C = 45^\circ$ . 12. a)  $\widehat{AB} = 136^\circ$ ,  $\widehat{BC} = 96^\circ$  și  $\widehat{CA} = 128^\circ$ ; b)  $\widehat{AB} = 138^\circ$ ,  $\widehat{BC} = 102^\circ$  și  $\widehat{CA} = 120^\circ$ . 13. a)  $\sphericalangle A = 60^\circ$ ,  $\sphericalangle B = 48^\circ$  și  $\sphericalangle C = 72^\circ$ ; b)  $\sphericalangle A = 60^\circ$ ,  $\sphericalangle B = 45^\circ$  și  $\sphericalangle C = 75^\circ$ . 14. a) Cum  $\sphericalangle ACB = 45^\circ$ , rezultă că  $\sphericalangle AOB = 90^\circ$  și obținem  $R = 7 \text{ cm}$ ; b) Analog obținem  $R = 9 \text{ cm}$ . 15. a)  $EF = 6\sqrt{2} \text{ cm}$ ; b)  $EF = 5\sqrt{2} \text{ cm}$ . 16. Observăm că  $\triangle OAB$  este echilateral, deci  $\sphericalangle AOB = 60^\circ$ , prin urmare  $\sphericalangle ACB \in \{30^\circ; 150^\circ\}$ . 17. a) Cum  $\sphericalangle BAO = 23^\circ$ , rezultă că  $\sphericalangle AOB = 134^\circ$ , deci  $\sphericalangle ACB = 67^\circ$ . Analog obținem  $\sphericalangle BAC = 53^\circ$ , deci  $\sphericalangle ABC = 60^\circ$ ; b)  $\sphericalangle BAC = 53^\circ$ ,  $\sphericalangle ABC = 51^\circ$  și  $\sphericalangle BCA = 76^\circ$ . 18. Dacă  $E \in \widehat{BD}$ , atunci  $ABED$  și  $ADCF$  sunt inscriptibile, deci  $\sphericalangle EAB = \sphericalangle FAC = \sphericalangle BDE$ , așadar  $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle EAF$ . 19. Dacă notăm cu  $h$  înălțimea  $\triangle OEF$ , rezultă că  $h = \frac{R}{2}$ , prin urmare înălțimea se opune unui unghi cu măsura de  $30^\circ$ , deci  $\sphericalangle EOF \in \{30^\circ; 150^\circ\}$  și  $\sphericalangle EDF \in \{15^\circ; 75^\circ\}$ . 20. Patrulateralele  $AEFC$  și  $EBDF$  sunt inscriptibile;  $\sphericalangle BDF + \sphericalangle BEF = 180^\circ$ , deci  $\sphericalangle BDF \equiv \sphericalangle AEF$ ;  $\sphericalangle AEF + \sphericalangle ACF = 180^\circ$ , prin urmare  $\sphericalangle BDC + \sphericalangle ACD = 180^\circ$ , de unde rezultă că  $AC \parallel BD$ . 21. Construim  $DM \perp AB$ ,  $M \in AB$  și  $DN \perp AC$ ,  $N \in AC$  și observăm că  $\triangle DMB \equiv \triangle DNC$ , deci  $\sphericalangle DBA \equiv \sphericalangle DCA$ , prin urmare punctele  $A$ ,  $B$ ,  $C$  și  $D$  sunt conciclice. 22.  $BCEF$  este inscriptibil, deci  $\sphericalangle FBE \equiv \sphericalangle ECF$  (1). Din patrulateralele inscriptibile  $BDHF$  și  $CDHE$  rezultă  $\sphericalangle FBH \equiv \sphericalangle FDH$ , respectiv  $\sphericalangle ECH \equiv \sphericalangle EDH$  și folosind (1) obținem  $\sphericalangle FDH \equiv \sphericalangle EDH$ ; analog obținem  $\sphericalangle EFH \equiv \sphericalangle DFH$ , de unde rezultă concluzia. 23. Notăm cu  $D$  al doilea punct de intersecție al cercurilor circumscrise triunghiurilor  $AMP$  și  $CPN$  și observăm că  $\sphericalangle ABC + \sphericalangle MDN = 180^\circ$ , deci  $BMDN$  este inscriptibil, prin urmare cele trei cercuri au în comun punctul  $D$ . 24. Se arată că  $\sphericalangle APN = 90^\circ$ , deci  $APND$  este inscriptibil, prin urmare  $\sphericalangle APD \equiv \sphericalangle AND$  și  $\sphericalangle PAD \equiv \sphericalangle BNC$ , dar  $\sphericalangle AND \equiv \sphericalangle BNC$ , deci  $\sphericalangle APD \equiv \sphericalangle PAD$ , așadar  $DP = DA = l$ . 25. Dacă  $DE$  și  $DF$  sunt diametre în cercurile circumscrise triunghiurilor  $ABD$ , respectiv  $ACD$ , rezultă că punctele  $E$ ,  $A$  și  $F$  sunt coliniare.  $\sphericalangle E \equiv \sphericalangle B$  și  $\sphericalangle F \equiv \sphericalangle C$ , deci  $\sphericalangle E \equiv \sphericalangle F$ , prin urmare  $DE \equiv DF$ . 26. Considerăm punctul  $E \in AD$ , astfel încât  $DE \equiv DC$  și, deoarece  $\sphericalangle ADC = 60^\circ$ , rezultă că  $\triangle EDC$  este echilateral, deci  $EC \equiv DC$ , prin urmare  $\triangle AEC \equiv \triangle BDC$ , de unde rezultă că  $AE \equiv BD$ , deci  $AD = BD + CD$ . 27. Fie  $T$  punctul diametral opus punctului  $D$ .

## Cuprins

TESTE DE EVALUARE INIȚIALĂ .....	5
----------------------------------	---

### ALGEBRĂ

#### CAPITOLUL I. MULȚIMEA NUMERELOR REALE

Lecția 1. Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural. Estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional.....	8
Lecția 2. Scoaterea factorilor de sub radical. Introducerea factorilor sub radical .....	12
Lecția 3. Numere iraționale. Mulțimea numerelor reale .....	15
Lecția 4. Modulul unui număr real.....	18
Lecția 5. Compararea și ordonarea numerelor reale.....	22
Lecția 6. Reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor prin aproximări.....	26
Teste de evaluare sumativă .....	30
Fișă pentru portofoliul elevului.....	31
Lecția 7. Adunarea și scăderea numerelor reale.....	33
Lecția 8. Înmulțirea numerelor reale .....	37
Lecția 9. Puterea cu exponent număr întreg a numerelor reale .....	42
Lecția 10. Împărțirea numerelor reale .....	46
Lecția 11. Raționalizarea numitorului de forma $a\sqrt{b}$ ; $a, b \in \mathbb{Q}$ , $a \neq 0$ , $b > 0$ .....	51
Teste de evaluare sumativă .....	56
Fișă pentru portofoliul elevului.....	58
Lecția 12. Media aritmetică și media aritmetică ponderată a $n$ numere reale, $n \geq 2$ .....	60
Lecția 13. Media geometrică a două numere reale pozitive .....	64
Lecția 14. Ecuația de forma $x^2 = a$ , unde $a \in \mathbb{R}$ .....	67
Teste de evaluare sumativă .....	70
Fișă pentru portofoliul elevului.....	72
Probleme din realitatea cotidiană.....	74

### GEOMETRIE

#### CAPITOLUL I. PATRULATERUL

Lecția 1. Patrulaterul convex.....	76
Lecția 2. Paralelogramul .....	80
Lecția 3. Linia mijlocie în triunghi.....	84
Lecția 4. Centrul de greutate al triunghiului.....	88
Teste de evaluare sumativă .....	92
Fișă pentru portofoliul elevului.....	94
Lecția 5. Dreptunghiul .....	96
Lecția 6. Rombul .....	100
Lecția 7. Pătratul .....	104
Teste de evaluare sumativă .....	108
Fișă pentru portofoliul elevului.....	109
Lecția 8. Trapezul. Trapezul isoscel.....	111
Lecția 9. Linia mijlocie în trapez.....	115

Lecția 10. Perimetrul și aria triunghiului.....	119
Lecția 11. Perimetrul și aria patrulaterului .....	123
<i>Teste de evaluare sumativă</i> .....	130
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i> .....	132
<i>Probleme din realitatea cotidiană</i> .....	134

## **CAPITOLUL II. CERCUL**

Lecția 12. Unghi înscris în cerc.....	137
Lecția 13. Coarde și arce în cerc .....	143
Lecția 14. Tangente dintr-un punct exterior la un cerc.....	147
Lecția 15. Poligoane regulate înscrise într-un cerc.....	152
Lecția 16. Lungimea cercului și aria discului.....	156
<i>Teste de evaluare sumativă</i> .....	159
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i> .....	161
<i>Probleme din realitatea cotidiană</i> .....	162

<b>MODELE DE TESTE PENTRU EVALUAREA CUNOȘTIȚELOR</b> .....	165
--	-----

<b>INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI</b> .....	172
--------------------------------------	-----