

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.N. nr. 5318/21.11.2019.

Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programul școlar în vigoare pentru clasa a VIII-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Referință științifică: Lucrarea a fost definitivată prin contribuția și recomandările Comisiei științifice și metodice a publicațiilor Societății de Științe Matematice din România. Aceasta și-a dat avizul favorabil în ceea ce privește alcătuirea și conținutul matematic.

Redactare: Ramona Rossall
Tehnoredactare: Iuliana Ene
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
TUDOR, ION

Matematică : algebră, geometrie : modalități de lucru diferențiate, pregătire suplimentară prin planuri individualizate : caiet de lucru : [clasa] 8 / Ion Tudor. - Ed. a 7-a. - Pitești : Paralela 45, 2023-2 vol.

ISBN 978-973-47-3895-3

Partea 1. - 2023. - ISBN 978-973-47-3896-0

51

Copyright © Editura Paralela 45, 2023

Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate, iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.

www.edituraparelela45.ro

Ion TUDOR

matematică

algebră, geometrie

- Modalități de lucru diferențiate
- Pregătire suplimentară prin planuri individualizate

Caiet de lucru

Partea I

8

Ediția a VII-a

Editura Paralela 45

Teste de evaluare inițială

Testul 1

Se acordă 1 punct din oficiu.

Partea I – Scrieți litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

(0,5p) 1. Stabiliți care dintre următoarele propoziții este adevărată:

- A. $-\sqrt{25} \in \mathbb{N}$; B. $-\sqrt{25} \in \mathbb{Z}$; C. $-\sqrt{25} \notin \mathbb{Q}$; D. $-\sqrt{25} \in \mathbb{I}$.

(0,5p) 2. Opusul numărului rațional $\frac{8}{5}$ este numărul rațional:

- A. $-\frac{8}{5}$; B. $\frac{5}{8}$; C. $\frac{8}{5}$; D. $-\frac{5}{8}$.

(0,5p) 3. Media aritmetică a numerelor naturale 3 și 6 este egală cu:

- A. 5; B. 2,5; C. 4,5; D. 7.

(0,5p) 4. Soluția ecuației $x^2 = 8$, $x \in \mathbb{R}$, este:

- A. $\{-2, 4\}$; B. $\{-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3}\}$; C. $\{-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\}$; D. $\{-4, 2\}$.

(0,5p) 5. Dintre numerele raționale pozitive 0,(32), 0,33, 0,3(2) și 0,32, cel mai mare este:

- A. 0,3(2); B. 0,32; C. 0,33; D. 0,(32).

(0,5p) 6. Rezultatul calculului $(2\sqrt{5}) : \sqrt{10} - \sqrt{2}$ este egal cu:

- A. 0; B. $\sqrt{2}$; C. $\sqrt{5}$; D. 3.

(0,5p) 7. În triunghiul ABC notăm cu M și N mijloacele laturilor AB , respectiv AC . Dacă $MN = 7$ cm, atunci BC este egală cu:

- A. 21 cm; B. 3,5 cm; C. 5,5 cm; D. 14 cm.

(0,5p) 8. Într-o urnă sunt 6 bile albe și 9 bile negre. Extrăgând o bilă, probabilitatea ca aceasta să fie albă este egală cu:

- A. $\frac{1}{6}$; B. $\frac{2}{5}$; C. $\frac{3}{4}$; D. $\frac{1}{9}$.

(0,5p) 9. Distanța dintre punctele $A(3; 0)$ și $B(1; 2\sqrt{3})$ exprimată în centimetri este:

- A. $\sqrt{2}$ cm; B. 6 cm; C. 4 cm; D. $\sqrt{3}$ cm.

Partea a II-a – La următoarele probleme se cer rezolvări complete.

(0,8p) 1. Rezolvați sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 3x - y = 10 \end{cases}$, unde x și y sunt numere reale.

2. Se consideră numărul real $x = \left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \right) : 2, (6) - \sqrt{\frac{2}{3}}$.

(0,7p) a) Arătați că $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$. (0,8p) b) Calculați $m_a(x; x^{-1})$.

ALGEBRĂ

Capitolul I

INTERVALE DE NUMERE REALE. INECUAȚII ÎN \mathbb{R}

Lecția 1. Mulțimi definite printr-o proprietate a elementelor



Citesc și rețin

În clasa a VI-a, la capitolul „Mulțimi. Mulțimea numerelor naturale” am învățat că o mulțime poate fi definită printr-o proprietate a elementelor acesteia.

Exemplu: $A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n < 5\}$. Citim „Mulțimea A este formată din numerele naturale nenule n cu proprietatea $n < 5$ ”.



Cum se aplică?

1. Enumerați elementele mulțimii $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 35 \vdots x\}$ și precizați cardinalul acesteia.

Soluție:

Divizorii întregi ai lui 35 sunt $\pm 1, \pm 5, \pm 7, \pm 35$, prin urmare $A = \{-35, -7, -5, -1, 1, 5, 7, 35\}$ și $\text{card } A = 8$.

2. Scrieți mulțimea $P = \{2, 3, 5, 7\}$, folosind o proprietate a elementelor acesteia.

Soluție:

Observăm că elementele mulțimii P sunt numerele naturale prime de o cifră, prin urmare mulțimea P se scrie $P = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ este număr prim de o cifră}\}$.

3. Se consideră mulțimile $E = \{n \in \mathbb{N} \mid 2^n < 5^2\}$ și $F = \{a \mid \overline{6a2} \vdots 3\}$. Efectuați:

- a) $E \cup F$; b) $E \cap F$; c) $E \setminus F$; d) $F \setminus E$.

Soluție:

Mai întâi enumerăm elementele mulțimilor E și F . Elementele mulțimii E îndeplinesc condiția $2^n < 5^2$ sau $2^n < 25$, prin urmare $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Elementele mulțimii F îndeplinesc condiția $\overline{6a2} \vdots 3$, deci $3 \mid 6 + a + 2$ sau $3 \mid 8 + a$, de unde rezultă că $F = \{1, 4, 7\}$; a) $E \cup F = \{0, 1, 2, 3, 4, 7\}$; b) $E \cap F = \{1, 4\}$; c) $E \setminus F = \{0, 2, 3\}$; d) $F \setminus E = \{7\}$.



Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

- Enumerați elementele următoarelor mulțimi:
 a) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 4\} = \dots\dots\dots$; b) $B = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n < 7\} = \dots\dots\dots$;
 c) $C = \{n \in \mathbb{N} \mid 0 \leq n < 3\} = \dots\dots\dots$; d) $D = \{n \in \mathbb{N} \mid 2 \leq n \leq 5\} = \dots\dots\dots$
- Enumerați elementele următoarelor mulțimi și precizați cardinalul acestora:
 a) $A = \{x \mid x \text{ este literă a cuvântului „geometria”}\} = \dots\dots\dots$;
 b) $B = \{y \mid y \text{ este cifră a numărului „701233048”}\} = \dots\dots\dots$
- Enumerați elementele următoarelor mulțimi și precizați cardinalul acestora:
 a) $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 2\} = \dots\dots\dots$;
 b) $F = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid |x| < 4\} = \dots\dots\dots$
- Enumerați elementele următoarelor mulțimi și precizați cardinalul acestora:
 a) $A = \left\{n \in \mathbb{N} \mid \frac{n}{5} \text{ este fracție subunitară}\right\} = \dots\dots\dots$;
 b) $B = \left\{n \in \mathbb{N}^* \mid \frac{5}{n} \text{ este fracție supraunitară}\right\} = \dots\dots\dots$
- Se consideră mulțimile $E = \{x \mid x \text{ este literă a cuvântului „tetraedru”}\}$ și $F = \{y \mid y \text{ este literă a cuvântului „cilindru”}\}$. Efectuați:
 a) $E \cup F$; b) $E \cap F$; c) $E \setminus F$; d) $F \setminus E$.

Exerciții și probleme de dificultate medie

- Efectuați $C \cup D$, $C \cap D$, $C \setminus D$ și $D \setminus C$ în următoarele cazuri:
 a) $C = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n \leq 5\}$ și $D = \{m \in \mathbb{Z} \mid |m| < 3\}$;
 b) $C = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 4\}$ și $D = \{m \in \mathbb{Z}^* \mid |m| \leq 3\}$.
- Știind că \mathcal{D}_n este mulțimea divizorilor naturali ai lui n , efectuați:
 a) $\mathcal{D}_6 \cup \mathcal{D}_9$; b) $\mathcal{D}_6 \cap \mathcal{D}_9$; c) $\mathcal{D}_6 \setminus \mathcal{D}_9$; d) $\mathcal{D}_9 \setminus \mathcal{D}_6$.
- Se consideră mulțimile $A = \{m \in \mathbb{N} \mid 1 \leq m < 4\}$ și $B = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n < 3\}$. Efectuați:
 a) $A \cup B$; b) $A \cap B$; c) $A \setminus B$; d) $B \setminus A$; e) $A \times B$; f) $B \times A$.

Exerciții și probleme de dificultate avansată

26. Determinați $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ și $B \setminus A$ în următoarele cazuri:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |4-x| < 5\}$ și $B = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{3x+8}{4x-1} \in \mathbb{Z}\right\}$;

b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |1-2x| < 7\}$ și $B = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{1-4x}{2x-3} \in \mathbb{Z}\right\}$.

27. Se consideră mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x^2 - 1| - |x - 1| + |x + 1| \leq 1\}$. Câte submulțimi are mulțimea $A \cap \mathbb{Z}$?



Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) 1. Efectuați $A \cup B$ și $A \cap B$ în următoarele cazuri:

a) $A = (-1; +\infty)$ și $B = [3; +\infty)$; b) $A = [-67; 23)$ și $B = (-71; 19]$.

(3p) 2. Se consideră intervalele de numere reale $E = (-\sqrt{5}; \sqrt{6})$, $F = [-\sqrt{3}; \sqrt{7}]$ și

mulțimile $G = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid x \in E \cup F\}$, $H = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \in E \cap F\}$. Efectuați:

a) $G \cup H$; b) $G \cap H$; c) $G \setminus H$; d) $H \setminus G$.

(3p) 3. Scrieți mulțimile $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 4\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 2\}$ sub formă de intervale de numere reale și efectuați: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ și $B \setminus A$.

Lecția 4. Inecuații de forma $ax + b > 0$ ($\geq, <, \leq$), $x, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$



Citesc și rețin

Definiție: O propoziție cu o variabilă de forma $ax + b > 0$ ($\geq, <, \leq$), $x, a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ (1) se numește **inecuație de gradul I cu o necunoscută**.

Definiție: Un număr $u \in \mathbb{R}$ se numește **soluție a inecuației** (1) dacă $au + b > 0$ (u verifică inecuația).

A **rezolva inecuația** (1) înseamnă a determina mulțimea de soluții:

$$S = \{u \in \mathbb{R} \mid au + b > 0\}.$$

Definiție: Două inecuații de gradul I cu o necunoscută se numesc **echivalente** dacă au aceeași mulțime de soluții.



Cum se aplică?

1. Rezolvați următoarele inecuații, unde $x \in \mathbb{R}$:

a) $10x + 3 < -11$;

b) $-2\sqrt{6}x \geq 4\sqrt{3}$.

Soluție:

a) $10x + 3 < -11 \Leftrightarrow 10x < -14 \Leftrightarrow x < \frac{-14}{10} \Leftrightarrow x < -\frac{7}{5} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{7}{5}\right)$;

b) $-2\sqrt{6} \geq 4\sqrt{3} \Leftrightarrow x \leq \frac{4\sqrt{3}}{-2\sqrt{6}} \Leftrightarrow x \leq -\frac{\sqrt{2} \cdot 2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \leq -\frac{2\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x \leq -\sqrt{2} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\sqrt{2}\right]$.

2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuațiile:

a) $5(2x - 3) \geq 7x$;

b) $0,8 - 0,6x > 2$.

Soluție:

a) $5(2x - 3) \geq 7x \Leftrightarrow 10x - 15 \geq 7x \Leftrightarrow 10x - 7x \geq 15 \Leftrightarrow 3x \geq 15 \Leftrightarrow x \geq \frac{15}{3} \Leftrightarrow x \geq 5 \Leftrightarrow x \in [5; +\infty)$;

b) $0,8 - 0,6x > 2 \Leftrightarrow -0,6x > 2 - 0,8 \Leftrightarrow -0,6x > 1,2 \Leftrightarrow -\frac{6^3}{9}x > \frac{12^{(2)}}{10} \Leftrightarrow -\frac{2}{3}x > \frac{6}{5} \Leftrightarrow x < \frac{6}{5} : \left(-\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow x < -\frac{6 \cdot 3}{5 \cdot 2} \Leftrightarrow x < -\frac{9}{5} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{9}{5}\right)$.

3. Determinați cel mai mic număr întreg care verifică inecuația:

$$9(x + \sqrt{7}) < 2\sqrt{7}(\sqrt{7}x - 3).$$

Soluție:

$9(x + \sqrt{7}) < 2\sqrt{7}(\sqrt{7}x - 3) \Leftrightarrow 9x + 9\sqrt{7} < 14x - 6\sqrt{7} \Leftrightarrow 9x - 14x < -6\sqrt{7} - 9\sqrt{7} \Leftrightarrow -5x < -15\sqrt{7} \Leftrightarrow x > (-15\sqrt{7}) : (-5) \Leftrightarrow x > 3\sqrt{7} \Leftrightarrow x \in (3\sqrt{7}; +\infty)$;
 $x > 3\sqrt{7}$ sau $x > \sqrt{63}$ și $x \in \mathbb{Z}$, deci $x = \sqrt{64} = 8$.



Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Stabiliți dacă numărul real l verifică inecuația:

a) $13x < 14$;

b) $5x - 1 \leq 4$;

c) $0,5x \geq 0,25$;

d) $27 - 13x > 14$;

e) $7\left(1 - \frac{x+1}{2}\right) \leq 0$;

f) $17 - 2\sqrt{3}x \geq 13$.

b)																			
----	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Capitolul II

CALCUL ALGEBRIC ÎN \mathbb{R}

Lecția 5. Numere reale reprezentate prin litere. Adunarea și scăderea numerelor reale reprezentate prin litere



Citesc și rețin

Numere reale reprezentate prin litere

Spunem despre o expresie de forma ax^n , unde $a, x \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}$, că este un număr real **reprezentat prin litere**.

Numărul real a se numește **coeficient**, iar x^n se numește **parte literală**. Partea literală este formată din una sau mai multe litere care înlocuiesc numere reale neprecizate.

Exemple: $\frac{1}{2}x^5$; $-3x^2$; $4\sqrt{5}xy^3$; $\frac{7}{\sqrt{3}}a^2bc^7$.

Definiție: Un ansamblu de numere reale reprezentate prin litere legate între ele prin operații aritmetice (adunarea, scăderea, înmulțirea, împărțirea, ridicarea la putere) se numește **expresie algebrică**.

Exemplu: $E(x) = (x^3 + 2x^3)^2 : (9x^4) - 5x$.

Definiție: Două sau mai multe numere reale reprezentate prin litere se numesc **termeni asemenea** dacă părțile lor literale sunt identice.

Exemple: $-4x^3$ și $\sqrt{6}x^3$; $2, (3)x^4y^3$ și $-\frac{1}{\sqrt{2}}x^4y^3$.

Definiție: O sumă de numere reale în care cel puțin un termen este număr real reprezentat prin litere se numește **sumă algebrică**.

Definiție: O sumă algebrică este scrisă sub **formă canonică** dacă nu conține termeni asemenea.

Exemplu: $x^2 - \sqrt{2}x + 3$.

Adunarea și scăderea numerelor reale reprezentate prin litere

Prin adunare și scădere, termenii asemenea se reduc. De aceea, operațiile de adunare și scădere a numerelor reale reprezentate prin litere se numesc operații de reducere a termenilor asemenea.

Reguli de calcul

- $ax^n + bx^n = (a+b)x^n$, $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$;
- $ax^n - bx^n = (a-b)x^n$, $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$;
- $a_1x^n + a_2x^n + a_3x^n + \dots + a_mx^n = (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_m)x^n$, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.



Cum se aplică?

1. Reduceți termenii asemenea:

a) $4x + 3x$;

b) $5x^2 - 2x^2$.

Soluție:

a) $4x + 3x = x(4 + 3) = 7x$;

b) $5x^2 - 2x^2 = x^2(5 - 2) = 3x^2$.

2. Reduceți termenii asemenea:

a) $31x - 29 - 27x + 16$;

b) $4x^3 - x - x^3 + 7x - 4x^3$.

Soluție:

a) $31x - 29 - 27x + 16 = x(31 - 27) - 29 + 16 = 4x - 13$;

b) $4x^3 - x - x^3 + 7x - 4x^3 = x^3(4 - 1 - 4) + x(-1 + 7) = -x^3 + 6x$.

3. Reduceți termenii asemenea:

a) $\frac{1}{4}a^3 - \frac{2}{5}a^2 + \frac{7}{4}a^3 + \frac{3}{2}a^2$;

b) $\frac{2}{\sqrt{3}}a^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}a + \frac{3}{2\sqrt{2}}a - \frac{8}{\sqrt{3}}a^2$.

Soluție:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{1}{4}a^3 - \frac{2}{5}a^2 + \frac{7}{4}a^3 + \frac{3}{2}a^2 &= a^3\left(\frac{1}{4} + \frac{7}{4}\right) + a^2\left(-\frac{2}{5} + \frac{3}{2}\right) = \frac{8}{4}a^3 + a^2\left(-\frac{4}{10} + \frac{15}{10}\right) = \\ &= 2a^3 + \frac{11}{10}a^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}2a^2 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}1a + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}3a - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}8a^2 &= \frac{2\sqrt{3}}{3}a^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}a + \frac{3\sqrt{2}}{4}a - \frac{8\sqrt{3}}{3}a^2 = \\ &= a^2\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{8\sqrt{3}}{3}\right) + a\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{4}\right) = -\frac{6\sqrt{3}}{3}a^2 + a\left(-\frac{2\sqrt{2}}{4} + \frac{3\sqrt{2}}{4}\right) = -2\sqrt{3}a^2 + \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{4}a. \end{aligned}$$



Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Pentru următoarele numere reale reprezentate prin litere numiți coeficienții și părțile lor literale:

a) $38x^5$;

b) $-\frac{7}{8}y^3$;

c) $\frac{11}{15}t^4$;

d) $-\sqrt{6}x^8$;

e) $-\frac{7}{5}xy^3$;

f) $-11a^2b^3$;

g) $3\sqrt{2}z^5t^2$;

h) $\frac{27}{31}z^4t$.

2. Completați spațiile punctate cu forma canonică a următoarelor sume algebrice:

a) $29 + 3x^2 - 8x = \dots\dots\dots$; b) $35x - 7 - 4x^2 = \dots\dots\dots$;

c) $4y + 2y^4 - 21 - \sqrt{2}y^3 = \dots\dots\dots$;

d) $-y^2 + \sqrt{5}y^3 - 16 - 9y^5 = \dots\dots\dots$

Lecția 8. Ridicarea la putere cu exponent natural a numerelor reale reprezentate prin litere



Citesc și rețin

Pentru ridicarea la putere cu exponent natural a unui număr real nenul reprezentat prin litere se utilizează următoarele reguli de calcul cu puteri.

Reguli de calcul

- $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$, $m, n \in \mathbb{N}$;
- $(ax^m)^n = a^n x^{m \cdot n}$, $a \in \mathbb{R}^*$, $m, n \in \mathbb{N}$.



Cum se aplică?

1. Efectuați:

- a) $(5x^2)^2$; b) $(-3x^5)^3$; c) $(-2x^3)^4$.

Soluție:

- a) $(5x^2)^2 = 5^2 x^{2 \cdot 2} = 25x^4$; b) $(-3x^5)^3 = (-3)^3 x^{5 \cdot 3} = -27x^{15}$;
c) $(-2x^3)^4 = (-2)^4 x^{3 \cdot 4} = +2^4 x^{12} = 16x^{12}$.

2. Efectuați ridicările la putere și reduceți termenii asemenea:

- a) $(-5x^6)^2 + (-3x^4)^3$; b) $(-\sqrt{7}x^3)^5 - (2\sqrt{7}x^5)^3$.

Soluție:

- a) $(-5x^6)^2 + (-3x^4)^3 = +5^2 x^{6 \cdot 2} + (-3^3 x^{4 \cdot 3}) = 25x^{12} + (-27x^{12}) = -2x^{12}$;
b) $(-\sqrt{7}x^3)^5 - (2\sqrt{7}x^5)^3 = -\sqrt{7}^5 x^{3 \cdot 5} - [+(2\sqrt{7})^3 x^{5 \cdot 3}] = -49\sqrt{7}x^{15} - 56\sqrt{7}x^{15} =$
 $= -105\sqrt{7}x^{15}$.

3. Se consideră expresia algebrică $E(x) = (2x^3 + 5)(5 - 2x^3) - 25$. Calculați $[E(x)]^3$.

Soluție:

$E(x) = (2x^3 + 5)(5 - 2x^3) - 25 = 10x^3 - 4x^6 + 25 - 10x^3 - 25 = -4x^6$, de unde rezultă că $[E(x)]^3 = (-4x^6)^3 = -64x^{18}$.



Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Efectuați:

- a) $(2x)^2 = \dots$; b) $(3x^2)^2 = \dots$; c) $(4x^3)^2 = \dots$;
d) $(-5x^4)^2 = \dots$; e) $(-3x^5)^2 = \dots$; f) $(-4x^3)^2 = \dots$.

2. Efectuați:

- a) $(4x^4)^3 = \dots$; b) $(5x^3)^3 = \dots$; c) $(3x^5)^3 = \dots$;
d) $(-4x^4)^3 = \dots$; e) $(-3x^2)^3 = \dots$; f) $(-2x^4)^3 = \dots$.

15. Dacă x, y și z sunt numere reale, verificați și memorați următoarele formule de calcul:

a) $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$;

b) $(x + y - z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2yz - 2zx$.

Exerciții și probleme de dificultate avansată

16. Verificați și memorați următoarele formule de calcul prescurtat, unde $x, y \in \mathbb{R}$:

a) $(x + y)^3 = x^3 + 3xy(x + y) + y^3$;

b) $(x - y)^3 = x^3 - 3xy(x - y) - y^3$.

17. Arătați că $x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)^3 - 3(x + y)(y + z)(z + x)$, unde $x, y, z \in \mathbb{R}$.



Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) 1. Efectuați:

a) $(10x^7)^2$;

b) $\left(-\frac{2}{3}x^5\right)^3$;

c) $(-\sqrt{7}x)^4$.

(3p) 2. Se consideră expresia algebrică $E(x) = (3x - 2x^2)(2x^3 + 3x^2) - 9x^3$. Calculați $[E(x)]^3$.

(3p) 3. Arătați că $(x - y - z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2yz - 2zx$, unde $x, y, z \in \mathbb{R}$.



Teste de evaluare sumativă

Testul 1

Se acordă 1 punct din oficiu.

(2p) 1. Se consideră sumele algebrice $A(x) = x^2 + 6x$ și $B(x) = 3x^2 - 7x + 4$.

Calculați:

a) $A(x) + B(x)$;

b) $B(x) - A(x)$.

(2p) 2. Efectuați:

a) $2x^3(3x^2 + 8x)$;

b) $(9x^4 - 6x) : (3x)$.

(1p) 3. Arătați că media geometrică a numerelor $5\sqrt{2} - 1$ și $5\sqrt{2} + 1$ este un număr natural.

(1p) 4. Se consideră expresia următoare: $E(x) = (\sqrt{3}x^3)^4 - (\sqrt{11}x^6)^2 - (\sqrt{2}x^2)^6$. Calculați $E(x) : (-5x^7)$.

(1p) 5. Arătați că expresia $F(x) = 4(2x^3 + 5) - (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$ nu depinde de x , oricare ar fi numărul real x .

(2p) 6. Arătați că $n = \sqrt{5}(19\sqrt{5} - \sqrt{10}) - (\sqrt{2} + 2\sqrt{3})(3\sqrt{2} - 6\sqrt{3} - \sqrt{6} + 1)$ este număr natural cub perfect.

Fișă pentru portofoliul elevului

Numele și prenumele:

Clasa a VIII-a

Capitolul: Calcul algebric în \mathbb{R} (Lecțiile 5 – 8)

Se acordă 10 puncte din oficiu.

I. Dacă propoziția este adevărată, subliniați litera A, iar dacă propoziția este falsă, subliniați litera F.

(7p) 1. Numerele reale reprezentate prin litere $\sqrt{2}x^3$ și $\sqrt{3}x^2$ sunt termeni asemenea. A F

(7p) 2. Forma canonică a sumei algebrice $8 - x^3 + 7x$ este $-x^3 + 7x + 8$. A F

(7p) 3. Produsul numerelor reale reprezentate prin litere $\frac{3}{2}x$ și $\frac{2}{3}x^4$ este egal cu x^5 . A F

II. Completați spațiile punctate cu răspunsul corect.

(7p) 1. După reducerea termenilor asemenea, suma algebrică $4x^3 + 2x^2 - x^3 + 7x^2$ se scrie

(7p) 2. Câtul împărțirii $(10x^3 - 15x^2) : (5x^2)$ este egal cu

(7p) 3. Efectuând înmulțirea $\sqrt{6}(2\sqrt{2} + 3\sqrt{3})$ obținem

III. Încercuțiți litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

(8p) 1. Se consideră sumele algebrice $S_1(y) = y^2 - 4y - 8$ și $S_2(y) = 2y^3 + y^2 - 3y - 8$. Diferența $S_1(y) - S_2(y)$ este egală cu:

A. $-2y^3 + 4$; B. $-5y^2 + y$; C. $-2y^3 - y$; D. $y^3 - 4y^2$.

(8p) 2. Forma canonică a expresiei $E(x) = (5x - 2)(x^2 - 5x - 2) - 4$ este:

A. $5x^3 - 27x^2$; B. $3x^2 + 8x$; C. $-x^2 + 7x$; D. $4x^3 + 12x^2$.

(8p) 3. Rezultatul calculului $(x^2 - 2x^2 + 3x^2)^3 : (-2x)^2$ este egal cu:

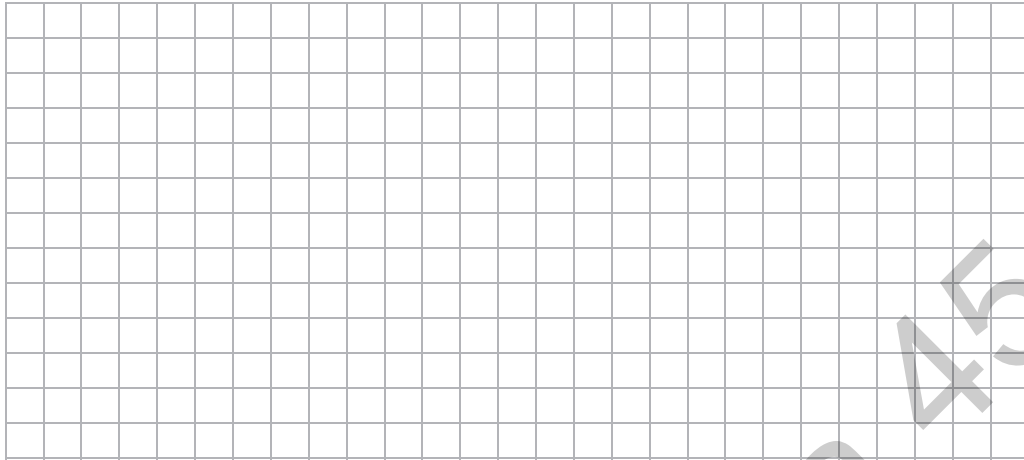
A. $4x^2$; B. $-4x$; C. $-2x$; D. $2x^4$.

La exercițiile IV. și V. scrieți pe fișă rezolvările complete.

IV. Se consideră numărul:

(8p)
$$n = 4(\sqrt{3} - \sqrt{7}) - \sqrt{21}(\sqrt{3} + \sqrt{7} - \sqrt{21}) - (\sqrt{3} + \sqrt{7})(\sqrt{21} - 10).$$

Arătați că $n \in \mathbb{N}$.



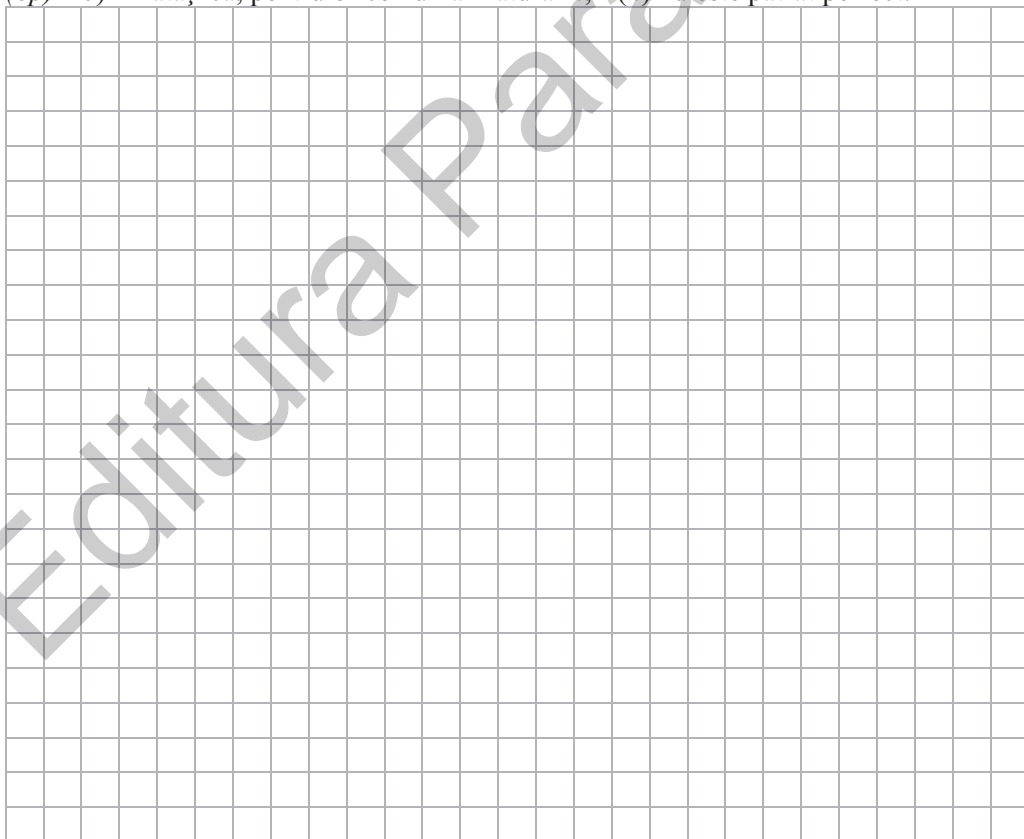
V. Se consideră expresia:

$$E(x) = (x^2 - x)(x^2 + 6x - 2) - (x - 3)(x^3 + 3x^2 + x - 1) - 6x,$$

unde $x \in \mathbb{R}$.

(8p) a) Arătați că $E(x) = 5x^3 - 3$, pentru orice număr $x \in \mathbb{R}$.

(8p) b) Arătați că, pentru orice număr natural n , $E(n)$ nu este pătrat perfect.



GEOMETRIE

Capitolul I

ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAȚIU

Lecția 1. Puncte, drepte, plane: convenții de notare, reprezentări, determinarea dreptei



Citesc și rețin

Elementele fundamentale ale geometriei în spațiu sunt: **punctul**, **dreapta**, **planul**.

Punctul este descris ca fiind urma lăsată de vârful unui creion ascuțit pe o coală de hârtie. Punctul se notează cu una dintre literele mari ale alfabetului: A, B, C, \dots .

Dreapta este descrisă ca fiind un fir de ață bine întins și nesfârșit la ambele capete. Dreapta se notează cu una dintre literele mici ale alfabetului: a, b, c, \dots .

Planul este descris ca fiind suprafața unei ape liniștite. Planul se notează cu una dintre literele grecești: α (alfa), β (beta), γ (gama), \dots .

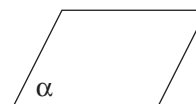
În continuare vom reprezenta, vom nota și vom citi un punct, o dreaptă și un plan.

\times
 A

Punctul A



Dreapta d



Planul α

Observație: Punctul, dreapta și planul sunt mulțimi de puncte.

Considerăm adevărate, de la început, următoarele **propoziții**:

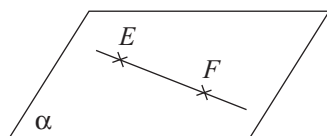
1. Prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una (două puncte distincte determină o dreaptă).



Dreapta determinată de punctele A și B se notează AB sau BA .

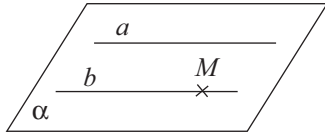
2. Dreapta d este inclusă în planul α dacă orice punct al dreptei d aparține planului α . Notăm $d \subset \alpha$.

3. Dacă două puncte distincte ale dreptei d aparțin planului α , atunci dreapta d este inclusă în planul α .



$$\left. \begin{array}{l} E \in \alpha \\ F \in \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow EF \subset \alpha$$

4. Într-un plan, printr-un punct exterior unei drepte se poate construi o paralelă și numai una la dreapta respectivă.



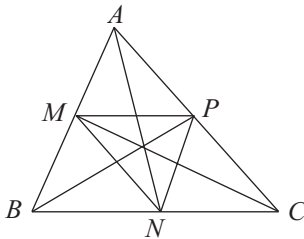
$$\left. \begin{array}{l} a \subset \alpha \\ M \in \alpha \\ b \parallel a \end{array} \right\} \Rightarrow b \subset \alpha$$



Cum se aplică?

1. Dacă punctele A, B și C sunt vârfurile unui triunghi, iar M, N și P sunt mijloacele laturilor AB, BC , respectiv CA , aflați numărul dreptelor determinate de cele șase puncte.

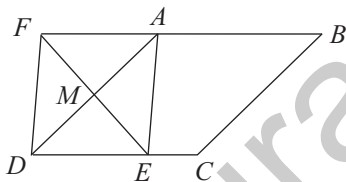
Soluție:



Cele 6 puncte determină 9 drepte: $AB, BC, CA, MN, NP, PM, AN, BP, CM$.

2. Se consideră paralelogramul $ABCD$ și punctul E situat pe latura CD . Dacă notăm cu M mijlocul laturii AD și cu F simetricul punctului E față de M , arătați că punctele F, A și B sunt coliniare.

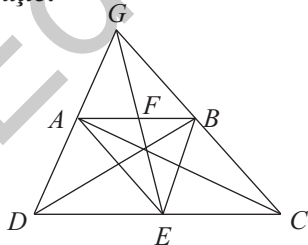
Soluție:



Deoarece $AM \equiv MD$ și $EM \equiv MF$, rezultă că patrulaterul $AEDF$ este paralelogram, deci $AF \parallel CD$, prin urmare dreptele AF și AB sunt identice, de unde rezultă că punctele F, A și B sunt coliniare.

3. În trapezul $ABCD$, notăm cu E și F mijloacele bazelor CD , respectiv AB . Dacă $AD \cap BC = \{G\}$, precizați numărul dreptelor determinate de punctele A, B, C, D, E, F și G .

Soluție:



Arătăm că punctele G, F și E sunt coliniare. Presupunem că $GF \cap CD = \{E_1\}$. Deoarece $AB \parallel CD$, aplicând teorema fundamentală a asemănării, rezultă că $\frac{GF}{GE_1} = \frac{AF}{DE_1}$

și $\frac{GF}{GE_1} = \frac{BF}{CE_1}$, deci $\frac{AF}{DE_1} = \frac{BF}{CE_1}$, de unde deducem că $DE_1 \equiv CE_1$, prin urmare $E_1 = E$, deci punctele G, F și E sunt coliniare. Punctele A, B, C, D, E, F și G determină 11 drepte: $AB, BC, CD, DA, AC, BD, EF, AE, BE, CF$ și DF .



Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. În planul α reprezentat în figura alăturată construieți punctele distincte E și F și dreapta determinată de acestea.



2. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții: Dreapta determinată de punctele E și F de la problema precedentă se notează:

a) EF ;

b) FE .

3. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

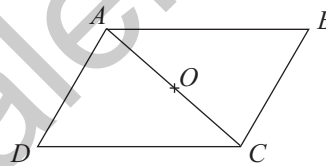
a) Printr-un punct trece o infinitate de drepte.

b) Prin două puncte distincte trece o singură dreaptă.

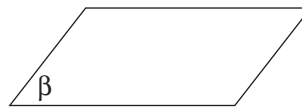
4. În paralelogramul $ABCD$ reprezentat în figura alăturată am notat cu O mijlocul diagonalei AC . Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) Dreptele BO și DO sunt distincte.

b) Dreptele BO și DO sunt identice.



5. În planul β reprezentat în figura alăturată desenați punctele distincte și necoliniare A , B și C și dreptele determinate de acestea.



Exerciții și probleme de dificultate medie

6. Desenați triunghiul DEF și punctul G situat pe latura EF . Precizați numărul dreptelor determinate de punctele D , E , F și G .

7. Desenați triunghiul MNP și punctul Q situat în interiorul acestuia. Precizați numărul dreptelor determinate de punctele M , N , P și Q .

8. Dacă punctele A , B și C , respectiv B , C și D sunt coliniare, arătați că A , B , C și D sunt patru puncte coliniare.

9. Dacă punctele A , B , C și D sunt vârfurile unui patrulater convex, stabiliți numărul dreptelor determinate de acestea.

10. Se consideră triunghiul MNP și punctele E și F situate pe laturile MN , respectiv NP . Numiți dreptele determinate de punctele M , N , P , E și F .

11. În paralelogramul $ABCD$, notăm cu M mijlocul laturii CD și cu N simetricul punctului A față de M . Stabiliți numărul dreptelor determinate de punctele A , B , C , D și N .

12. Într-un plan se consideră cinci puncte, oricare trei dintre acestea fiind necoliniare. Stabiliți numărul dreptelor determinate de cele cinci puncte.

Lecția 3. Tetraedrul și piramida



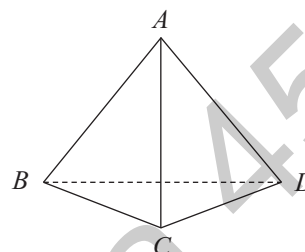
Citesc și rețin

Definiție: Corpul geometric determinat de patru puncte necoplanare se numește **tetraedru**.

Punctele A, B, C și D se numesc **vârfurile** tetraedrului.

Segmentele AB, AC, AD, BC, CD și DB se numesc **muchiile** tetraedrului.

Triunghiurile ABC, ACD, ADB și BCD se numesc **fețele** tetraedrului.



Definiție: Tetraedrul care are toate muchiile congruente se numește **tetraedru regulat**.

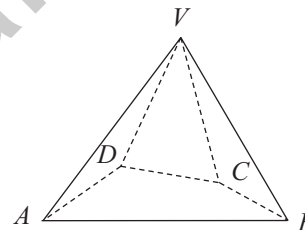
Definiție: Corpul geometric determinat de vârfurile unui poligon convex, numit bază, și de un punct nesituat în planul acestuia, numit vârf, se numește **piramidă**.

Observație: După numărul de laturi ale bazei, piramidele se numesc: triunghiulare, patrulatere, pentagonale, hexagonale etc.

Punctul V este **vârful** piramidei, iar patrulaterul $ABCD$ este **baza** piramidei patrulatere din figura alăturată.

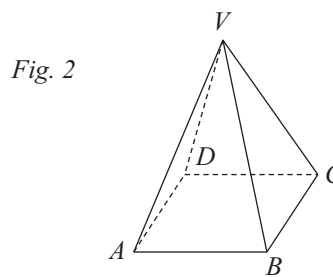
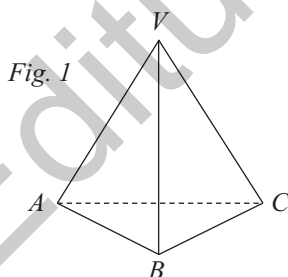
Segmentele VA, VB, VC și VD se numesc **muchiile laterale** ale piramidei.

Triunghiurile VAB, VBC, VCD și VDA se numesc **fețele laterale** ale piramidei.



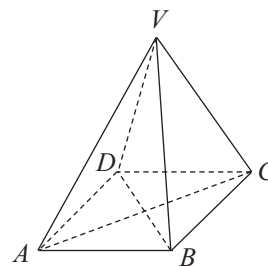
Definiție: O piramidă care are baza **poligon regulat** și muchiile laterale congruente se numește **piramidă regulată**.

În figura 1 este reprezentată piramida triunghiulară regulată $VABC$, iar în figura 2 este reprezentată piramida patrulateră regulată $VABCD$.



Definiție: Secțiunea diagonală a unei piramide patrulatere regulate este secțiunea realizată cu planul determinat de vârful piramidei și o diagonală a bazei.

Triunghiurile isoscele și congruente VAC și VBD reprezintă secțiunile diagonale ale piramidei patrulatere regulate $VABCD$ din figura alăturată.



Desfășurarea în plan a unei piramide

În figura 3 este reprezentată desfășurarea în plan a suprafeței unei piramide triunghiulare regulate $VABC$, iar în figura 4 este reprezentată desfășurarea în plan a suprafeței unei piramide patrulatere regulate $VABCD$.

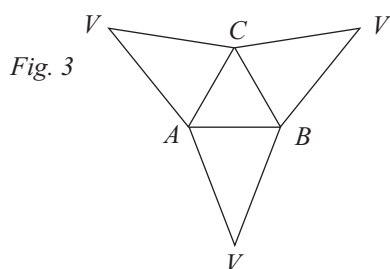


Fig. 3

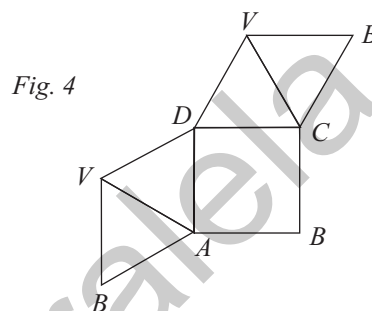


Fig. 4

Observație: Desfășurarea în plan a suprafeței unei piramide nu este unică.

Notații utilizate:

l – lungimea muchiei bazei, m – lungimea muchiei laterale, R – raza cercului circumscris bazei, \mathcal{P}_b – perimetrul bazei, \mathcal{A}_b – aria bazei, \mathcal{P}_f – perimetrul feței laterale, \mathcal{A}_f – aria feței laterale, \mathcal{P}_d – perimetrul secțiunii diagonale, \mathcal{A}_d – aria secțiunii diagonale.

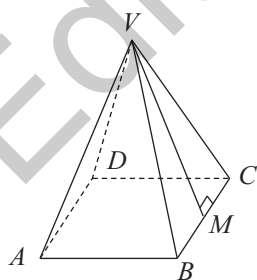


Cum se aplică?

1. O piramidă patrulateră regulată $VABCD$ cu vârful în V are aria bazei egală cu 64 cm^2 și muchia laterală de 5 cm . Aflați:

- a) l ; b) \mathcal{P}_b ; c) \mathcal{P}_f ; d) \mathcal{A}_f .

Soluție:



a) Deoarece $ABCD$ este pătrat, rezultă că $\mathcal{A}_b = l^2$, așadar $l^2 = 64 \text{ cm}^2$, deci $l = \sqrt{64} \text{ cm}$ și obținem $l = 8 \text{ cm}$;

b) $\mathcal{P}_b = 4l = 4 \cdot 8 \text{ cm} = 32 \text{ cm}$;

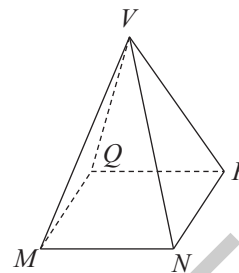
c) $\mathcal{P}_{VAB} = VA + AB + VB = 18 \text{ cm}$;

d) Construim $VM \perp BC$, $M \in BC$, deci $BM = CM = 4 \text{ cm}$. În $\triangle VMC$ cu $\sphericalangle M = 90^\circ$ aplicăm teorema lui Pitagora: $VC^2 = VM^2 + MC^2$, de unde obținem $VM = 3 \text{ cm}$.

$$\mathcal{A}_f = \frac{BC \cdot VM}{2} = 12 \text{ cm}^2.$$

3. În figura alăturată este reprezentată piramida patrulateră regulată $VMNPQ$ cu vârful în V . Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect.

- A. Patrulaterul $MNPQ$ este romb.
 B. Patrulaterul $MNPQ$ este pătrat.



4. În figura de la problema 3 este reprezentată piramida patrulateră regulată $VMNPQ$ cu vârful în V . Completați tabelul:

Muchiile bazei	
Muchiile laterale	
Fetele laterale	

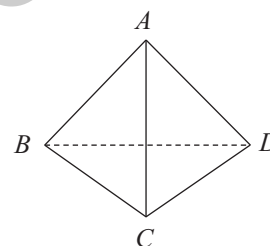
5. În figura de la problema 3 este reprezentată piramida patrulateră regulată $VMNPQ$ cu vârful în V . Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a) $MN \equiv NP \equiv PQ \equiv QM$; b) $VM \equiv VN \equiv VP \equiv VQ$.

6. Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției: „Dacă o piramidă triunghiulară regulată are muchia bazei egală cu muchia laterală, atunci piramida este un tetraedru regulat.”

7. În figura alăturată este reprezentat tetraedrul regulat $ABCD$. Știind că suma lungimilor muchiilor tetraedrului este egală cu 12 cm, calculați:

- a) $\mathcal{P}_{ABC} = \dots\dots\dots$;
 b) $\mathcal{A}_{BCD} = \dots\dots\dots$



Exerciții și probleme de dificultate medie

8. Piramida triunghiulară regulată $VABC$ cu vârful în V are muchia bazei de 6 cm și muchia laterală de 5 cm. Aflați:

- a) \mathcal{P}_b ; b) \mathcal{A}_b ; c) \mathcal{P}_f ; d) \mathcal{A}_f .

9. Piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu vârful în V are muchia bazei de 10 cm și muchia laterală de 13 cm. Aflați:

- a) \mathcal{P}_b ; b) \mathcal{A}_b ; c) \mathcal{P}_f ; d) \mathcal{A}_f .

10. Piramida triunghiulară regulată $VABC$ cu vârful în V are perimetrul bazei egal cu 48 cm și perimetrul unei fețe laterale egal cu 36 cm. Aflați:

- a) l ; b) m ; c) \mathcal{A}_b ; d) \mathcal{A}_f .

11. Piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu vârful în V are aria bazei egală cu 324 cm^2 și perimetrul unei fețe laterale egal cu 48 cm. Aflați:

- a) l ; b) BD ; c) m ; d) \mathcal{A}_f .

12. Piramida triunghiulară regulată $VABC$ cu vârful în V are aria bazei egală cu $4\sqrt{3} \text{ cm}^2$ și aria unei fețe laterale egală cu 8 cm^2 . Aflați:

- a) l ; b) \mathcal{P}_b ; c) m ; d) \mathcal{P}_f .

Exerciții și probleme de dificultate avansată

- 21.** Se consideră trunchiul de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$, în care notăm cu T mijlocul CC' . Dacă muchia bazei mici, muchia laterală și muchia bazei mari au lungimile egale cu a , $2a$, respectiv $3a$, arătați că $\mathcal{P}_{AC'B} = \mathcal{P}_{ATB}$.
- 22.** Se consideră trunchiul de piramidă triunghiulară $ABCA'B'C'$, care are muchiile laterale congruente. Dacă notăm cu D și E proiecțiile punctelor A' și B' pe muchiile bazei mari, AC , respectiv BC , arătați că $DE = \frac{AB + A'B'}{2}$.



Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

- (3p) **1.** Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are muchia bazei mari de 8 cm, muchia bazei mici de 2 cm și muchia laterală de 5 cm. Calculați:
a) \mathcal{P}_B ; b) \mathcal{A}_b ; c) a_l ; d) \mathcal{A}_f .
- (3p) **2.** Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are muchia bazei mari de $8\sqrt{2}$ cm, muchia bazei mici de $4\sqrt{2}$ cm și înălțimea de $2\sqrt{2}$ cm. Calculați:
a) \mathcal{A}_a ; b) m ; c) a_l .
- (3p) **3.** Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ are muchia bazei mari de $8\sqrt{3}$ cm, apotema de 6 cm și înălțimea de $3\sqrt{3}$ cm. Notăm cu O centrul bazei mari. Calculați:
a) l ; b) h ; c) a_l ; d) $d(O, A'A)$.

Lecția 16. Trunchiul de con circular drept



Citesc și rețin

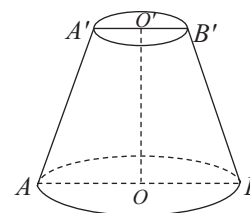
Definiție: Secționând un con circular drept cu un plan paralel cu planul bazei și înlăturând conul mic care s-a format, se obține un corp geometric numit **trunchi de con circular drept**.

Discurile mărginite de cercurile $\mathcal{A}(O, R)$ și $\mathcal{A}(O', r)$ se numesc **baza mare**, respectiv **baza mică** a trunchiului de con circular drept.

Segmente congruente $A'A, B'B, \dots$ se numesc **generatoarele** trunchiului de con circular drept.

Definiție: Segmentul cu extremitățile în punctele de intersecție dintre planele bazelor unui trunchi de con circular drept și o perpendiculară comună a acestora se numește **înălțimea** trunchiului de con circular drept.

Observație: Segmentul determinat de centrele celor două baze ale unui trunchi de con circular drept este înălțimea acestuia.

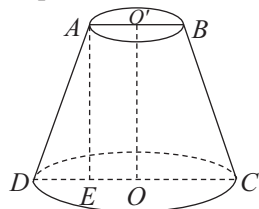


Definiție: Secțiunea axială a unui trunchi de con circular drept este secțiunea realizată cu un plan care conține înălțimea determinată de centrele celor două baze ale trunchiului de con.

Secțiunea axială a trunchiului de con din figura de mai sus este trapezul isoscel $A'ABB'$.

Notații utilizate:

R – raza bazei mari a trunchiului de con, r – raza bazei mici a trunchiului de con, g – lungimea generatoarei trunchiului de con, i – lungimea înălțimii trunchiului de con, G – lungimea generatoarei conului din care provine trunchiul de con, h – lungimea înălțimii conului din care provine trunchiul de con, \mathcal{A}_B – aria bazei mari a trunchiului de con, \mathcal{A}_b – aria bazei mici a trunchiului de con, \mathcal{P}_a – perimetrul secțiunii axiale a trunchiului de con, \mathcal{A}_a – aria secțiunii axiale a trunchiului de con, u – măsura unghiului la centru corespunzător sectorului de disc obținut prin desfășurarea conului circular drept din care provine trunchiul de con.



Într-un trunchi de con circular drept, aplicând teorema lui Pitagora și ținând seama de notațiile făcute, obținem:

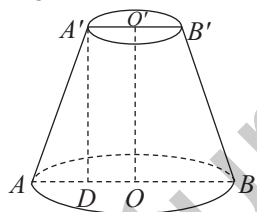
- în $\triangle AED$: $g^2 = i^2 + (R - r)^2$.



Cum se aplică?

1. Un trunchi de con circular drept are $R = 7$ cm, $g = 13$ cm și $i = 12$ cm. Calculați perimetrul secțiunii axiale.

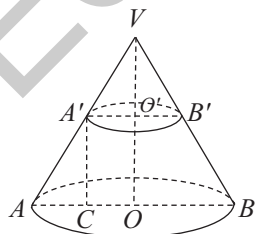
Soluție:



În trunchiul de con circular drept din figura alăturată, trapezul isoscel $ABB'A'$ este o secțiune axială. Construim $A'D \perp AB$, $D \in AB$. În $\triangle A'DA$ cu $\sphericalangle D = 90^\circ$ aplicăm teorema lui Pitagora: $g^2 = i^2 + (R - r)^2$, deci $13^2 = 12^2 + (7 - r)^2$ sau $(7 - r)^2 = 25$, de unde rezultă că $7 - r = 5$ și obținem $r = 2$ cm; $\mathcal{P}_a = 2(R + r + g) = 2(7 + 2 + 13)$ cm = 44 cm.

2. Un trunchi de con circular drept are $R = 5$ cm, $r = 2$ cm și $g = 3\sqrt{5}$ cm. Calculați înălțimea conului circular drept din care provine trunchiul de con.

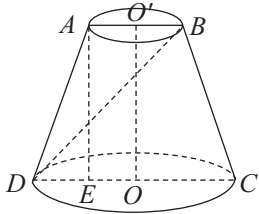
Soluție:



În trunchiul de con circular drept din figura alăturată, trapezul isoscel $ABB'A'$ este o secțiune axială. Construim $A'C \perp AB$, $C \in AB$. În $\triangle AA'C$ cu $\sphericalangle C = 90^\circ$ aplicăm teorema lui Pitagora: $g^2 = i^2 + (R - r)^2$, de unde obținem $i = 6$ cm. Dacă notăm cu V vârful conului din care provine trunchiul de con și aplicăm teorema conurilor asemenea, rezultă că: $\frac{VO'}{VO} = \frac{O'A'}{OA}$, deci $\frac{2}{5} = \frac{h-6}{h}$, de unde rezultă că $2h = 5h - 30$ sau $3h = 30$ și obținem $h = 10$ cm.

3. Trapezul isoscel $ABCD$, cu $AB \parallel CD$ și $AB < CD$, este secțiunea axială a unui trunchi de con circular drept. Știind că semidreapta DB este bisectoarea unghiului ADC , $R = 11$ cm, $g = 10$ cm, calculați înălțimea trunchiului de con.

Soluție:



Deoarece $AB \parallel CD$, rezultă că $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CDB$, dar $\sphericalangle CDB \equiv \sphericalangle ADB$, deci $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle ADB$, prin urmare $AB \equiv AD$ sau $2r = g$ și obținem $r = 5$ cm. Construim $AE \perp CD$, $E \in (CD)$. În $\triangle AED$ cu $\sphericalangle E = 90^\circ$ aplicăm teorema lui Pitagora: $g^2 = i^2 + (R - r)^2$, deci $10^2 = i^2 + 6^2$ și după efectuarea calculelor obținem $i = 8$ cm.

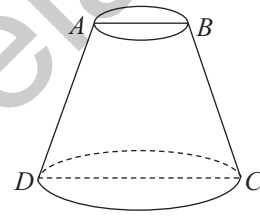


Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Completați spațiul punctat cu răspunsul corect. Secțiunea axială a trunchiului de con circular drept reprezentat în figura alăturată este

2. Calculați perimetrul secțiunii axiale a trunchiului de con circular drept reprezentat în figura de la problema precedentă, știind că:



- a) $R = 5$ cm, $r = 3$ cm și $g = 7$ cm; b) $R = 6$ cm, $r = 3$ cm și $g = 9$ cm.

b)	
----	--

3. Calculați aria secțiunii axiale a unui trunchi de con circular drept, în următoarele cazuri:

- a) $R = 7$ cm, $r = 4$ cm și $i = 8$ cm; b) $R = 6$ cm, $r = 3$ cm și $i = 7$ cm.

b)	
----	--

Modele de teste pentru evaluarea cunoștințelor

(Capitolele: Intervale de numere reale. Inecuații în \mathbb{R} , Calcul algebric în \mathbb{R} , Elemente ale geometriei în spațiu)

Testul 1

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Subiectul I. Încercuți litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

- (7p) 1. Numărul întreg -4 aparține intervalului:
A. $(-4; 1)$; B. $[-3; 4)$; C. $[-4; 1]$; D. $(-4; 3)$.
- (7p) 2. Rezultatul calculului $(-9x^5) : (3x) + (2x^2)^2$ este egal cu:
A. $3x^3$; B. $-x^2$; C. $2x^5$; D. $-x^4$.
- (7p) 3. Dacă descompunem în factori suma algebrică $x^2 - 49$, obținem:
A. $7(x^2 - 7)$; B. $(x - 7)(x + 7)$; C. $(x - 4)(x + 9)$; D. $x(x - 49)$.
- (7p) 4. Se consideră prisma triunghiulară regulată $DEFD'E'F'$. Planele $(D'DE)$ și $(F'FE)$ sunt:
A. identice; B. secante; C. paralele.
- (7p) 5. Perimetrul secțiunii axiale a unui cilindru circular drept cu $R = 3$ cm și $G = 8$ cm este egal cu:
A. 28 cm; B. 18 cm; C. 24 cm; D. 32 cm.
- (7p) 6. Rezultatul calculului $3x(x + 2) - (x - 2)(3x + 1)$ este egal cu:
A. $x^2 - 4x$; B. $11x + 2$; C. $13x - 1$; D. $x^2 + 4x$.

Subiectul al II-lea. La următoarele probleme se cer rezolvările complete.

- (8p) 1. Se consideră intervalele de numere reale $E = (-2; \sqrt{3})$ și $F = [-\sqrt{3}; 2]$. Determinați intervalele $E \cup F$ și $E \cap F$.
- (8p) 2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $\frac{1}{4} - \frac{7x}{10} \geq \frac{4x}{5}$.
- (8p) 3. Se consideră expresia $E(x) = 5(x + 1)^2 - (2x - 3)^2 + (1 - x)(x + 1) - 22x$, $x \in \mathbb{R}$.
Arătați că expresia $E(x)$ nu depinde de x , pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
- (8p) 4. Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$ cu $AB = 2$ cm, $AD = 3$ cm și $AA' = 4$ cm. Calculați aria patrulaterului $ABC'D'$.
5. Se consideră tetraedrul regulat $ABCD$ cu muchia de 24 cm și punctul E situat pe muchia AD , astfel încât $AD = 4AE$. Notăm cu F simetricul punctului E față de A , iar cu M și N proiecțiile punctului F pe muchiile BD , respectiv CD . $AB \cap FM = \{Q\}$ și $AC \cap FN = \{P\}$.
- (8p) a) Aflați măsura unghiului dintre dreptele PQ și CD .
- (8p) b) Calculați perimetrul patrulaterului $MNPQ$.

Modele de teste pentru Evaluarea Națională

Notă (pentru testele 1 – 3): Se acordă 10 puncte din oficiu.

Timpul de lucru efectiv este de 2 ore.

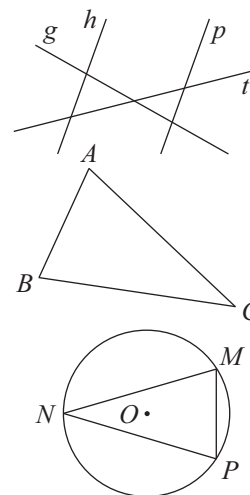
Testul 1

Subiectul I. Încercuți litera corespunzătoare răspunsului corect.

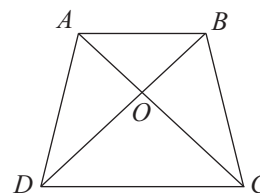
- (5p) 1. Numărul de 10 ori mai mare decât 0,123 este egal cu:
a) 1230; b) 1,23; c) 12,3; d) 123,0.
- (5p) 2. Cel mai mare divizor comun al numerelor 36 și 60 este egal cu:
a) 24; b) 9; c) 6; d) 12.
- (5p) 3. Într-o mare situată la altitudinea de -21m a fost scufundată la adâncimea de 17m o cameră de luat vederi. Altitudinea camerei de luat vederi este egală cu:
a) -5m ; b) -24m ; c) -38m ; d) -7m .
- (5p) 4. Dintre următoarele seturi de numere, cel scris în ordine crescătoare este:
a) $4\sqrt{5}, 5\sqrt{3}, 6\sqrt{2}$; b) $4\sqrt{5}, 6\sqrt{2}, 5\sqrt{3}$;
c) $6\sqrt{2}, 5\sqrt{3}, 4\sqrt{5}$; d) $5\sqrt{3}, 6\sqrt{2}, 4\sqrt{5}$.
- (5p) 5. În tabelul alăturat sunt prezentate notele unui elev din clasa a VIII-a la Educație fizică. Media elevului la Educație fizică a fost:
- | | | | |
|-----------------|---|---|----|
| Nota | 6 | 9 | 10 |
| Numărul de note | 1 | 3 | 1 |
- a) 6; b) 7; c) 8; d) 9.
- (5p) 6. Radu afirmă că „suma a două numere naturale impare este un număr natural impar”. Afirmatia lui Radu este:
a) adevărată; b) falsă.

Subiectul al II-lea. Încercuți litera corespunzătoare răspunsului corect.

- (5p) 1. În figura alăturată sunt reprezentate dreptele g, h, p și t . Dintre cele patru drepte, cele paralele sunt:
a) g și h ; b) h și p ;
c) p și t ; d) t și g .
- (5p) 2. În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC . Dacă $AB < BC < CA$, atunci:
a) $\sphericalangle C < \sphericalangle A < \sphericalangle B$; b) $\sphericalangle A < \sphericalangle B < \sphericalangle C$;
c) $\sphericalangle B < \sphericalangle C < \sphericalangle A$; d) $\sphericalangle C < \sphericalangle B < \sphericalangle A$.
- (5p) 3. Pe cercul de centru O și rază R din figura alăturată sunt reprezentate punctele M, N și P . Dacă $R = 3\sqrt{7}\text{ cm}$ și măsura unghiului MNP este egală cu 30° , atunci lungimea coardei MP este de:
a) $7\sqrt{3}\text{ cm}$; b) 3 cm ;
c) 7 cm ; d) $3\sqrt{7}\text{ cm}$.

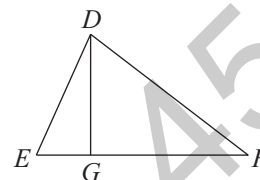


(5p) 4. În figura alăturată este reprezentat trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ și $AC \cap BD = \{O\}$. Dacă $\mathcal{P}_{AOD} = 23$ cm și $\mathcal{P}_{BCD} = 41$ cm, atunci lungimea bazei mari CD este egală cu:



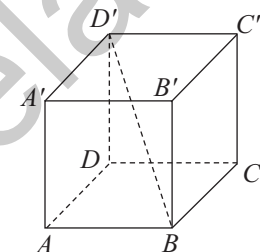
- a) 10 cm; b) 18 cm;
c) 15 cm; d) 12 cm.

(5p) 5. Triunghiul DEF dreptunghic în D din figura alăturată reprezintă traseul unui autobuz, iar punctele D , E , G și F sunt stațiile în care acesta oprește. Dacă $DG \perp EF$, $\operatorname{tg}(\sphericalangle E) = \sqrt{3}$ și $DG = 6$ km, atunci distanța dintre stațiile E și F este egală cu:



- a) $6\sqrt{3}$ km; b) $7\sqrt{3}$ km;
c) $8\sqrt{3}$ km; d) $9\sqrt{3}$ km.

(5p) 6. În figura alăturată este reprezentat un cub notat $ABCD A' B' C' D'$. Dacă muchia lui este de $5\sqrt{2}$ cm, atunci lungimea proiecției diagonalei BD' pe planul $(B'BC)$ este egală cu:



- a) 15 cm; b) $10\sqrt{2}$ cm;
c) $12\sqrt{2}$ cm; d) 10 cm.

Subiectul al III-lea. Scrieți rezolvările complete.

1. Se consideră intervalele de numere reale $A = (-4; 1]$ și $B = (-3; 3)$.

- (3p) a) Calculați suma numerelor întregi din intervalul $A \cup B$.
(2p) b) Determinați cardinalul mulțimii $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \in A \cap B\}$.

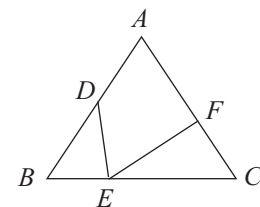
2. Vârstele a trei frați sunt direct proporționale cu numerele 6, 7 și 9, iar diferența de vârstă dintre cel mai mare și cel mai mic dintre frați este de 6 ani.

- (3p) a) Aflați vârsta fratelui mai mare și vârsta fratelui mai mic.
(2p) b) Calculați diferența de vârstă dintre fratele mijlociu și fratele mai mic.

3. Se consideră expresia $E(x) = (x - 2)^2 - (x - 1)^2 + (x - 2)(x + 2) + 3x$, $x \in \mathbb{R}$.

- (2p) a) Arătați că $E(x) = x^2 + x - 1$, pentru orice număr real x .
(3p) b) Arătați că pentru orice $n \in \mathbb{Z}$, $E(n)$ este număr întreg impar.

4. Triunghiul echilateral ABC din figura alăturată reprezintă schematic un zmeu din carton, pe care un elev a construit segmentele DE și EF . Se știe că $DB = 4$ cm, $BE = 2$ cm, $EC = 6$ cm și $\triangle DBE \sim \triangle ECF$.



- (2p) a) Calculați lungimea segmentului CF .
(3p) b) Determinați măsura unghiului DEF .

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

TESTE DE EVALUARE ÎNȚIALĂ

Testul 1

Partea I

Nr. item	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Rezultate	B	A	C	C	C	A	D	B	C

Partea a II-a

1. $S = \{(3; -1)\}$. 2. a) $x = \frac{\sqrt{6}}{6}$; b) $x^{-1} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$; $m_d(x; x^{-1}) = \frac{7\sqrt{6}}{12}$. 3. a) $\mathcal{P}_{ABC} = 24$ cm;
b) $r = \frac{AB + AC - BC}{2} = 2$ cm; c) $\mathcal{A}_d = 4\pi$ cm².

Testul 2

Partea I

Nr. item	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Rezultate	C	B	B	D	C	C	B	A	B

Partea a II-a

1. $x = -\frac{5}{4}$. 2. a) $A \times B = \{(-1; -2), (-1; 2), (3; -2), (3; 2)\}$; b) $\mathcal{A} = 16$ u². 3. a) $AE = 6$ cm, $AF = 5$ cm; b) $\mathcal{A}_{ABCD} = 60$ cm²; c) $\mathcal{A}_{AEF} = 7,5$ cm².

Testul 3

Partea I

Nr. item	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Rezultate	D	B	D	B	A	C	B	C	D

Partea a II-a

1. $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{9+27} = 6$. 2. a) $y = \sqrt{6}$; b) $x = 6\sqrt{6}$; $m_g(x; y) = 6$.
3. a) $\mathcal{A}_{ABCD} = 64$ cm²; b) $BE = 6$ cm și, aplicând teorema lui Pitagora în $\triangle BCE$, obținem $CE = 10$ cm, deci $\mathcal{P}_{EBC} = 24$ cm; c) Construim $DF \perp CE$. $\triangle EBC \sim \triangle CFD$ și obținem $DF = 6,4$ cm.

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I – INTERVALE DE NUMERE REALE. INECUAȚII ÎN \mathbb{R}

Lecția 1. Mulțimi definite printr-o proprietate a elementelor

1. a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$; b) $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; c) $C = \{0, 1, 2\}$; d) $D = \{2, 3, 4, 5\}$. 2. a) $A = \{g, e, o, m, t, r, i, a\}$, card $A = 8$; b) $B = \{7, 0, 1, 2, 3, 4, 8\}$, card $B = 7$. 3. a) $E = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, card $E = 5$; b) $F = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$, card $F = 6$. 4. a) $A = \left\{\frac{0}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right\}$, card $A = 5$;
b) $B = \left\{\frac{5}{1}, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}\right\}$, card $B = 4$. 5. $E = \{t, e, r, a, d, u\}$, $F = \{c, i, l, n, d, r, u\}$; a) $E \cup F = \{t, e, r, a, d, u, c, i, l, n\}$; b) $E \cap F = \{r, d, u\}$; c) $E \setminus F = \{t, e, a\}$; d) $F \setminus E = \{c, i, l, n\}$. 6. a) $C \cup D = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; $C \cap D = \{1, 2\}$; $C \setminus D = \{3, 4, 5\}$; $D \setminus C = \{-2, -1, 0\}$; b) $C \cup D =$

$\in \left[\frac{4}{5}; +\infty \right)$. **21.** a) $x = 3$; b) $x = -6$; c) $x = 4$; d) $x = -4$. **22.** a) $x = 3$; b) $x = -6$; c) $x = -4$; d) $x = -3$.

23. a) $x \in (-3; +\infty)$; b) $x \in (-\infty; 5)$; c) $x \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$; d) $x \in \left(\frac{6}{5}; +\infty\right)$. **24.** i) a) $x \in (-2\sqrt{2}; 4\sqrt{2})$; b) $x \in [-\sqrt{3}; 3\sqrt{3}]$; c) $x \in (-\sqrt{5}; 3\sqrt{5})$; d) $x \in [\sqrt{6}; 3\sqrt{6}]$; e) $x \in (2\sqrt{2}; 4\sqrt{2})$; f) $x \in [\sqrt{3}; 3\sqrt{3}]$; ii) a) $x \in \left(-\frac{1}{12}; \frac{19}{12}\right)$; b) $x \in \left(-\frac{23}{12}; \frac{41}{12}\right)$; c) $x \in \left[-\frac{14}{9}; \frac{10}{9}\right]$; d) $x \in (-8\sqrt{2}; -4\sqrt{2})$; e) $x \in [3\sqrt{3}; 9\sqrt{3}]$; f) $x \in (8\sqrt{7}; 16\sqrt{7})$. **25.** a) $x = -3$; b) $x = -2$. **26.** $x \in (-\infty; 4 + 2\sqrt{5})$; $4 + 2\sqrt{5} > 4 + 2\sqrt{4} = 8$, deci $x = 8$. **27.** a) $x \in (2; 4)$; b) $x \in [-3; -1]$.

Ce notă merit? Test de evaluare stadială

1. a) $x \in (-\infty; 1)$; b) $x \in (-4; +\infty)$; c) $x \in (-\infty; 2\sqrt{5}]$. **2.** a) $x \in (-\infty; 12)$; b) $x \in (-\infty; -5]$. **3.** $x = -2$.

Teste de evaluare sumativă

Testul 1. 5. a) $E \cup F = [-5; \sqrt{5})$; b) $E \cap F = (-2\sqrt{6}; 2)$; c) $E \setminus F = [-5; -2\sqrt{6}] \cup [2; \sqrt{5})$; d) $F \setminus E = \emptyset$. **6.** $A = [-2; 3]$, deci $\text{card}(A \cap B) = 3$. **Testul 2. 5.** Observăm că $c > 4$ și $u(c^3) = c$, prin urmare $c \in \{5, 6, 9\}$; $A = \{125, 216, 729\}$; $n = 2^{\text{card} A} = 8$ submulțimi. **6.** $E = [-2; +\infty)$ și $F = (-\infty, 3)$; $E \cup F = \mathbb{R}$; $E \cap F = [-2; 3)$; $E \setminus F = [3; +\infty)$; $F \setminus E = (-\infty; -2)$. **Testul 3. 5.** $x \in \left[-\frac{9}{5}; +\infty\right)$, deci cel mai mic număr întreg care verifică inecuația este -1 . **6.** $A = (-\sqrt{3}; +\infty)$ și $B = \{-2, -1, 0, 1\}$, deci $\text{card}(A \cap B) = 3$.

Fișă pentru portofoliul elevului

I. 1. F. 2. F. 3. A. II. 1. [-3; 0]. 2. 0. 3. $(-\infty; -1]$. III. 1. C. -5. 2. A. 6. 3. D. $(-\infty; -12]$. IV. $E \cup F = \left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{4}\right]$; $E \cap F = (-\sqrt{2}; \sqrt{3}]$; $E \setminus F = \left(\sqrt{3}; \frac{7}{4}\right)$; $F \setminus E = \left[-\frac{3}{2}; -\sqrt{2}\right]$. V. a) $A = [32; 98]$; b) $b = \frac{9a-3}{a+9}$, de unde rezultă că $a \in \{3, 5\}$, prin urmare $B = \{32, 53\}$, deci $B \subset A$.

CAPITOLUL II – CALCUL ALGEBRIC ÎN \mathbb{R}

Lecția 5. Numere reale reprezentate prin litere. Adunarea și scăderea numerelor reale reprezentate prin litere

1. a) Coeficientul este 38, iar partea literală este x^5 ; b) Coeficientul este $-\frac{7}{8}$, iar partea literală este y^3 ; c), d), e), f), g), h) Analog. **2.** a) $3x^2 - 8x + 29$; b) $-4x^2 + 35x - 7$; c) $2y^4 - \sqrt{2}y^3 + 4y - 21$; d) $-9y^5 + \sqrt{5}y^3 - y^2 - 16$. **3.** a) $-3x^5$; b) $11x^2$; c) $4z^3$; d) $-21z$; e) $9y^4$; f) $-\frac{1}{4}y$; g) $\sqrt{2}t$; h) $\frac{7}{3}t^5$. **4.** a) $7x$; b) $5x$; c) $3x$; d) $11x^2$; e) $11x^2$; f) $2x^2$; g) $-8x^2$; h) $28x^2$; i) $6x^3$. **5.** a) $9a$; b) $5a$; c) $-23a^2$; d) $2a^2$; e) $3a^3$; f) $4a^3$. **6.** a) $2x + 1$; b) $-6x - 4$; c) $-9x + 7$; d) $10x - 9$; e) $-6x + 2$; f) $-2x + 6$; g) $-4x^2 - 4x$; h) $-14x^2 - 3x$; i) $16x^2 + 6x$. **7.** a) $5x^2 - 6x$; b) $4x^2 - x$; c) $25x^3 - 8x$; d) $-21x^3 + 6x$; e) $-12x^4 + x^2$; f) $-12x^4 + 4x^2$. **8.** a) $-3y^3 - 10y$; b) $-8y^4 - 3y$; c) $3y^5 - 6y$; d) $-8y^3 + 4y$; e) $-4y^4 - 3y^2$; f) $-23y^5 - 3y^3$. **9.** a) $5x^2 + 2x - 6$; b) $-4x^2 - 2x - 5$; c) $-3x^2 + 5x + 13$; d) $-11x^2 - 6x + 2$; e) $-9x^2 -$

c) $\frac{x+2}{7x^3}$. 18. a) $\frac{3x-2}{4x^2-x^3}$; b) $\frac{2x^2-7x}{3}$; c) $\frac{3-5x}{3x^4+x^3}$. 19. a) $\frac{x-2}{x+2}$; b) $\frac{x-1}{x+2}$; c) $\frac{x-3}{x-5}$;
d) $\frac{x+3}{x+5}$. 20. a) $\frac{x-3}{4x}$; b) $\frac{3x^2}{x+1}$; c) $\frac{x-2}{2x^3}$.

Ce notă merit? Test de evaluare stadială

1. a) $\frac{2x-3}{2x^2+x}$; b) $\frac{2}{x^2}$. 2. a) $\frac{x-2}{x+2}$; b) $\frac{x^2-x}{x+3}$. 3. a) $\frac{x+1}{5x-x^2}$; b) $\frac{x+3}{4x}$.

Teste de evaluare sumativă

Testul 1. 5. $\frac{21x^2+3x}{6x^4-6x^2}$, $\frac{x^2-2x+1}{6x^4-6x^2}$. 6. $\frac{x+1}{x}$. **Testul 2.** 5. $\frac{4x^3+8x^2}{x^4+3x^3-4x^2-12x}$,
 $\frac{x^2-9}{x^4+3x^3-4x^2-12x}$. 6. $\frac{4x+5}{6x^2-3x}$. **Testul 3.** 5. $\frac{2x^2}{x-3}$. 6. $\frac{3x^3-12x^2+12x}{(x-1)(x-2)^2(x+2)}$,
 $\frac{x^3-2x^2-x+2}{(x-1)(x-2)^2(x+2)}$, $\frac{4x^2+4x-8}{(x-1)(x-2)^2(x+2)}$.

Fișă pentru portofoliul elevului

I. 1. A. 2. A. 3. F. II. 1. $\frac{2x}{3}$. 2. $6x^2$. 3. $\frac{x^2-1}{x^2+2x+1}$. III. 1. B. $\mathbb{R} \setminus \{-6, 0\}$. 2. C. $\frac{x^2+2x-3}{x^3-2x^2+x}$.
3. D. $\frac{x-1}{4x^2}$. IV. $\frac{3x^2-12x+12}{3x^2(x-2)(x-1)(x+2)}$, $\frac{x^3-x}{3x^2(x-2)(x-1)(x+2)}$. V. a) $E(x) = \frac{3}{x+2}$; b) $F(x) =$
 $= \frac{x-3}{x(x+1)}$; $E(x) = \frac{3x^2+3x}{x(x+1)(x+2)}$, $F(x) = \frac{x^2-x-6}{x(x+1)(x+2)}$.

GEOMETRIE

CAPITOLUL I – ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAȚIU

Lecția 1. Puncte, drepte, plane: convenții de notare, reprezentări, determinarea dreptei

2. a) A; b) A. 3. a) A; b) A. 4. a) F; b) A. 6. 4 drepte. 7. 6 drepte. 8. Observăm că $A \in BC$ și $D \in BC$, deci A, B, C, D sunt coliniare. 9. 6 drepte. 10. MN, NP, PM, MF, PE, EF . 11. 8 drepte. 12. 10 drepte. 13. a) O dreaptă, când cele 5 puncte sunt coliniare; b) 10 drepte, când oricare 3 dintre cele 5 puncte sunt necoliniare. 14. Se arată că $EC \parallel BD$ și $FC \parallel BD$, deci E, C și F sunt coliniare. 15. 8 drepte. 16. Se arată că $\sphericalangle EAF = 180^\circ$, deci E, A și F sunt coliniare; 11 drepte.
17. $\frac{n(n-1)}{2}$ drepte.

Ce notă merit? Test de evaluare stadială

1. Observăm că $Q \notin MN$, deci M, N, Q sunt necoliniare. 2. a) O dreaptă, când cele 4 puncte sunt coliniare; b) 6 drepte, când oricare 3 dintre cele 4 puncte sunt necoliniare. 3. Se arată că $EC \parallel BD$ și $FC \parallel BD$, deci E, C și F sunt coliniare.

Lecția 2. Determinarea planului. Relații între puncte, drepte și plane

1. a) Planul determinat de punctele D, E și F ; b) Planul determinat de dreptele g și h ; d) Planul determinat de dreapta a și punctul M . 2. a) (MNP) ; b) $(g; T)$; c) $(d; g)$; d) $(c; d)$. 3. F. 4. B. $T \notin g$. 5. a) A; b) F; c) A; d) A. 6. $a \cap b = \{D\}$; există punctele $E \in a$ și $F \in b$, diferite de D , prin urmare planul (DEF) include dreptele a și b , deci acestea determină planul (DEF) . 7. $a \parallel b$; există punctele $A, B \in a$ și $C, D \in b$, astfel încât $AC \cap BD = \{E\}$, prin urmare planul $(AC; BD)$ include dreptele a și b , deci acestea determină planul $(AC; BD)$. 8. 4 plane. 9. 7 plane. 10. $AC \cap BD = \{O\}$, deci $BO \equiv DO$. Punctul G este centrul de greutate în $\triangle TAC$, prin urmare $TG \cap BD = \{O\}$, așadar punctele T, G, B și D sunt coplanare. 11. $CE \parallel BD$ și $CF \parallel BD$, deci punctele E, C și F sunt coliniare, prin urmare punctele T, E, C și F sunt coplanare. 12. a) Un plan, când punctele M, N, P, Q și T sunt coliniare; b) 11 plane, când oricare 3 dintre punctele M, N, P, Q și T sunt necoliniare. 13. $AN \cap BP \cap CM = \{G\}$, deci cele 3 plane au în comun dreapta DG . 14. Dacă notăm cu O centrul hexagonului, atunci $AD \cap BE \cap CF = \{O\}$, deci cele 3 plane au în comun dreapta GO . 15. $AC \cap BD = \{O\}$; $\triangle AMO \sim \triangle CNO$, de unde rezultă că $\sphericalangle AOM \equiv \sphericalangle CON$, deci punctele M, O și N sunt coliniare, prin urmare planele (PAC) , (PMN) și (PBD) au în comun dreapta PO . 16. $\frac{(n-1)n}{2} = 10^p$ sau $(n-1)n = 2^{p+1} \cdot 5^p$, egalitate care este adevărată pentru $p = 1$, prin urmare $n = 5$. 17. $AC \cap BD = \{T\}$; $AD \perp TB$ și $BC \perp TA$, deci punctul E este ortocentrul $\triangle TAB$, prin urmare $TE \perp AB$, așadar punctele T, E și F sunt coliniare, deci dreptele AC și BD rămân concurente după îndoirea semidiscului, iar punctele A, B, C și D rămân coplanare.

Ce notă merit? Test de evaluare stadială

1. (DEF) , (NED) , (NFD) , (NEF) și (NEM) . 2. a) Un plan, când punctele A, B, C și D sunt coliniare; b) 7 plane, când oricare 3 dintre punctele A, B, C și D sunt necoliniare. 3. $PE \parallel NQ$ și $PF \parallel NQ$, deci punctele E, P și F sunt coliniare, prin urmare punctele A, E, P și F sunt coplanare.

Lecția 3. Tetraedrul și piramida

1. C. $\triangle DEF$. 2. a) F; b) A; c) A; d) A. 3. B. $MNPQ$ este pătrat. 4. Muchiile bazei: MN, NP, PQ, QM . Muchiile laterale: VM, VN, VP, VQ . Fețele laterale: $\triangle VMN, \triangle VNP, \triangle VPQ, \triangle VQM$. 5. a) A; b) A. 6. A. 7. a) $\mathcal{P}_{ABC} = 6 \text{ cm}$; b) $\mathcal{A}_{BCD} = \sqrt{3} \text{ cm}^2$. 8. a) $\mathcal{P}_{ABC} = 18 \text{ cm}$; b) $\mathcal{A}_{ABC} = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$; c) $\mathcal{P}_{VAB} = 16 \text{ cm}$; d) $\mathcal{A}_{VAB} = 12 \text{ cm}^2$. 9. a) $\mathcal{P}_{ABCD} = 40 \text{ cm}$; b) $\mathcal{A}_{ABCD} = 100 \text{ cm}^2$; c) $\mathcal{P}_{VAB} = 36 \text{ cm}$; d) $\mathcal{A}_{VAB} = 60 \text{ cm}^2$. 10. a) $AB = 16 \text{ cm}$; b) $VA = 10 \text{ cm}$; c) $\mathcal{A}_{ABC} = 64\sqrt{3} \text{ cm}^2$; d) $\mathcal{A}_{VAB} = 48 \text{ cm}^2$. 11. a) $AB = 18 \text{ cm}$; b) $BD = 18\sqrt{2} \text{ cm}$; c) $VA = 15 \text{ cm}$; d) $\mathcal{A}_{VAB} = 108 \text{ cm}^2$. 12. a) $AB = 4 \text{ cm}$; b) $\mathcal{P}_{ABC} = 12 \text{ cm}$; c) $VA = 2\sqrt{5} \text{ cm}$; d) $\mathcal{P}_{VAB} = 4(1 + \sqrt{5}) \text{ cm}$. 13. a) $AB = 4\sqrt{2} \text{ cm}$; b) $\mathcal{P}_{ABCD} = 16\sqrt{2} \text{ cm}$; c) $\mathcal{A}_{ABCD} = 32 \text{ cm}^2$; d) $\mathcal{P}_{VAB} = 12\sqrt{2} \text{ cm}$. 14. a) $\mathcal{P}_d = 12 \text{ cm}$; b) $\mathcal{P}_b = 8\sqrt{2} \text{ cm}$; c) $\mathcal{A}_b = 8 \text{ cm}^2$; d) $\mathcal{P}_f = 2(4 + \sqrt{2}) \text{ cm}$; e) $\mathcal{A}_f = 2\sqrt{7} \text{ cm}^2$. 15. a) $\sphericalangle BVC = 60^\circ$; b) $\sphericalangle VAC = 60^\circ$. 16. Se consideră tetraedrul regulat $ABCD$. Secționând după muchiile AB, AC și AD , observăm că $\sphericalangle ABD + \sphericalangle DBC + \sphericalangle CAB = 180^\circ$, deci triunghiul este echilateral. 17. $MN \parallel VB \parallel PQ$, deci M, N, P și Q sunt coplanare; $MNPQ$ este paralelogram și $\mathcal{P}_{MNPQ} = 13 \text{ cm}$. 18. a) Desfășurând în plan suprafața laterală a piramidei $VABC$, observăm că lungimea celui mai scurt drum este egală cu lungimea segmentului MN . Din $\triangle MVN$ rezultă că $MN = 4 \text{ dm}$; b) $VMBN$ este pătrat, deci $VT \equiv BT$. 19. Considerăm piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu vârful în V . $AC \cap BD = \{O\}$. $\mathcal{A}_{ADC} = \mathcal{A}_{AVC}$, deci $DO \equiv VO$, prin urmare $\triangle AOD \equiv \triangle AOV$, adică $AD \equiv AV$. 20. Desfășurând în plan suprafața tetraedrului $ABCD$, observăm că $\sphericalangle BAM = 90^\circ$, deci lungimea celui mai scurt drum este $BA = 3 \text{ m}$. 21. a) $VM = MN = VN = \frac{l}{2}$; b) $\mathcal{A}_{VAB} + \mathcal{A}_{VBC} + \mathcal{A}_{VCA} = 3 \frac{m^2}{2}$; $l = m\sqrt{2}$,

MODELE DE TESTE PENTRU EVALUAREA CUNOȘTIȚELOR

Testul 1. I. 1. C. $[-4; 1]$. **2. D.** $-x^4$. **3. B.** $(x-7)(x+7)$. **4. B.** secante. **5. A.** 28 cm. **6. B.** $11x+2$.

II. 1. $E \cup F = (-2; 2]$, $E \cap F = [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$. **2.** $x \in \left[-\infty; \frac{1}{6}\right]$. **3.** $E(x) = 5(x^2 + 2x + 1) - (4x^2 - 12x + 9) + 1 - x^2 - 22x = 5x^2 + 10x + 5 - 4x^2 + 12x - 9 + 1 - x^2 - 22x = -3$. **4.** $\mathcal{A}_{ABC'D'} = AB \cdot BC' = 10 \text{ cm}^2$. **5. a)** $AF = AP = AQ = 6 \text{ cm}$, deci $PQ \parallel BC$, prin urmare $\sphericalangle(PQ, CD) = \sphericalangle BCD = 60^\circ$; **b)** $PQ \parallel (BCD)$, deci $PQ \parallel MN$, prin urmare $MNPQ$ este trapez isoscel; $\mathcal{P}_{MNPQ} = 3(7 + 6\sqrt{3}) \text{ cm}$.

Testul 2. I. 1. D. -7 . **2. B.** $-x^3$. **3. C.** $3x^2(2x-3)$. **4. C.** necoplanare. **5. A.** 19 cm. **6. D.** $-x^2+6$.

II. 1. $E \cup F = \left[-\frac{3}{4}; \frac{5}{2}\right]$, $E \cap F = \left[-\frac{2}{3}; \frac{5}{6}\right]$. **2.** $x \in [-\sqrt{10}; +\infty)$. **3.** $E(x) = (x+2)(x^2-2x+1) + x(4-x^2) - 7x = x^3 - 2x^2 + x + 2x^2 - 4x + 2 + 4x - x^3 - 7x = -6x + 2$; $E(n) = 2(1-3n) : 2$. **4.** $h = 4 \text{ cm}$. **5. a)** $\sphericalangle(B'C, O'D) = \sphericalangle A'DO' = 30^\circ$; **b)** Construim $BE \perp O'D$. Din egalitatea $\mathcal{A}_{B'DO'} = \mathcal{A}_{B'BO'} + \mathcal{A}_{O'BD}$ rezultă că $BE = 4\sqrt{3} \text{ cm}$.

Testul 3. I. 1. A. 0. **2. D.** $-3x$. **3. B.** $x^2 + 2x + 1$. **4. C.** $(C'CD)$. **5. D.** 15 cm. **6. B.** $2x-3$.

II. 1. $E \cup F = [-4; 5]$, $E \cap F = (-2; 5)$. **2.** $x \in (-\infty; -2\sqrt{2}]$; $x = -3$. **3.** Notăm $x^2 - x = a$; $E(x) = a(a-5) + 6 = a^2 - 5a + 6 = (a-2)(a-3) = (x^2-x-2)(x^2-x-3) = (x-2)(x+1)(x^2-x-3)$. $E(a) = (a-2)(a+1)(a^2-a-3)$. Observăm că: pentru $a = 3k+2$, $a-2 : 3$, pentru $a = 3k+1$, $a^2-a-3 : 3$, pentru $a = 3k$, $a^2-a-3 : 3$, prin urmare $E(a) : 3$, pentru orice $a \in \mathbb{Z}$. **4.** $R = 6 \text{ cm}$, $G = 9 \text{ cm}$, $h = 3\sqrt{5} \text{ cm}$. **5. a)** $AC \cap BD = \{O\}$; $\sphericalangle(AB, VM) = \sphericalangle VMO = 60^\circ$; **b)** $l = a_p = 8 \text{ cm}$, $h = 4\sqrt{3} \text{ cm}$, $\mathcal{A}_d = 16\sqrt{6} \text{ cm}^2$.

MODELE DE TESTE PENTRU EVALUAREA NAȚIONALĂ

Testul 1

Subiectul I

1. b) 1,23 (5p). **2. d)** 12 (5p). **3. c)** -38 m (5p). **4. c)** $6\sqrt{2}, 5\sqrt{3}, 4\sqrt{5}$ (5p). **5. d)** 9 (5p). **6. b)** falsă (5p).

Subiectul al II-lea

1. b) h și p (5p). **2. a)** $\sphericalangle C < \sphericalangle A < \sphericalangle B$ (5p). **3. d)** $3\sqrt{7} \text{ cm}$ (5p). **4. b)** 18 cm (5p). **5. c)** $8\sqrt{3} \text{ cm}$ (5p). **6. d)** 10 cm (5p).

Subiectul al III-lea

1. a) -3 (3p); **b)** card $E = 4$ (2p). **2. a)** $\frac{a}{6} = \frac{b}{7} = \frac{c}{9} = k$, $a = 6k$, $b = 7k$, $c = 9k$, $c - a = 6 \Rightarrow 3k = 6 \Rightarrow k = 2$, deci $c = 18$ ani și $a = 12$ ani (3p); **b)** $b = 14$ ani; $b - a = 2$ ani (2p). **3. a)** $E(x) = x^2 - 4x + 4 - x^2 + 2x - 1 + x^2 - 4 + 3x = x^2 + x - 1$ (2p); **b)** $E(n) = n^2 + n - 1$; deoarece n^2 și n au aceeași paritate, rezultă că $n^2 + n$ este par, deci $n^2 + n - 1$ este număr impar (3p). **4. a)** $\frac{DB}{EC} = \frac{BE}{CF}$, de unde obținem $CF = 3 \text{ cm}$ (2p); **b)** $\sphericalangle BDE \equiv \sphericalangle CEF$; $\sphericalangle BED + \sphericalangle CEF = 120^\circ$, deci $\sphericalangle DEF = 60^\circ$ (3p). **5. a)** $BD^2 = AB^2 + AD^2$, de unde obținem $BD = 25 \text{ cm}$; $d(A, BD) = AE = \frac{AB \cdot AD}{BD} = 12 \text{ cm}$ (2p); **b)** $AE = CF = 12 \text{ cm}$ și $AE \parallel CF$, deci $AECF$ este paralelogram; $EF = BD - DE - BF = 7 \text{ cm}$;

Cuprins

TESTE DE EVALUARE INIȚIALĂ	5
----------------------------------	---

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I. INTERVALE DE NUMERE REALE. INECUAȚII ÎN \mathbb{R}

Lecția 1. Mulțimi definite printr-o proprietate a elementelor	8
Lecția 2. Intervale numerice și reprezentarea lor pe axa numerelor	11
Lecția 3. Operații cu intervale de numere reale	15
Lecția 4. Inecuații de forma $ax + b > 0$ ($\geq, <, \leq$), $x, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$	19
Teste de evaluare sumativă	25
Fișă pentru portofoliul elevului	27

CAPITOLUL II. CALCUL ALGEBRIC ÎN \mathbb{R}

Lecția 5. Numere reale reprezentate prin litere. Adunarea și scăderea numerelor reale reprezentate prin litere	29
Lecția 6. Înmulțirea numerelor reale reprezentate prin litere	34
Lecția 7. Împărțirea numerelor reale reprezentate prin litere	38
Lecția 8. Ridicarea la putere cu exponent natural a numerelor reale reprezentate prin litere	42
Teste de evaluare sumativă	44
Fișă pentru portofoliul elevului	46
Lecția 9. Formule de calcul prescurtat	48
Lecția 10. Descompunerea în factori	54
Teste de evaluare sumativă	58
Fișă pentru portofoliul elevului	59
Probleme din realitatea cotidiană	61
Lecția 11. Frații algebrice	63
Lecția 12. Amplificarea fracțiilor algebrice	66
Lecția 13. Simplificarea fracțiilor algebrice	70
Teste de evaluare sumativă	74
Fișă pentru portofoliul elevului	75

GEOMETRIE

CAPITOLUL I. ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAȚIU

Lecția 1. Puncte, drepte, plane: convenții de notare, reprezentări, determinarea dreptei	77
Lecția 2. Determinarea planului. Relații între puncte, drepte și plane	80
Lecția 3. Tetraedrul și piramida	84
Lecția 4. Prisma	89
Lecția 5. Cilindrul circular drept. Conul circular drept	95
Teste de evaluare sumativă	101
Fișă pentru portofoliul elevului	102
Lecția 6. Pozițiile relative a două drepte în spațiu. Drepte paralele	104
Lecția 7. Unghiul a două drepte în spațiu	107
Lecția 8. Pozițiile relative ale unei drepte față de un plan. Dreaptă paralelă cu un plan	112
Lecția 9. Dreaptă perpendiculară pe un plan. Distanța de la un punct la un plan	116
Lecția 10. Înălțimea piramidei. Apotema piramidei	121
Lecția 11. Înălțimea conului circular drept	126

<i>Teste de evaluare sumativă</i>	130
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	132
Lecția 12. Pozițiile relative a două plane. Plane paralele	134
Lecția 13. Distanța dintre două plane paralele. Înălțimea prisme. Înălțimea cilindrului circular drept	138
Lecția 14. Secțiuni paralele cu baza în corpurile geometrice studiate.....	143
Lecția 15. Trunchiul de piramidă regulată	147
Lecția 16. Trunchiul de con circular drept	152
<i>Teste de evaluare sumativă</i>	157
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	159
<i>Probleme din realitatea cotidiană</i>	161
MODELE DE TESTE PENTRU EVALUAREA CUNOȘTINȚELOR	165
MODELE DE TESTE PENTRU EVALUAREA NAȚIONALĂ	168
INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI	176