6

Maria Zaharia

Caiet de vacanță

MATEMATICĂ

Suport teoretic, exerciții
și probleme aplicative

Ediția a V-a

Editura Paralela 45

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.C. nr. 5318/21.11.2019.

Redactare: Alina Costache
Corectură: Andreea Roșca
Tehnoredactare: Mariana Dumitru
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
ZAHARIA, MARIA
Caiet de vacanță : matematică : clasa a VI-a : suport teoretic, exerciții și probleme aplicative / Maria Zaharia. – Ed. a 5-a. –
Pitești : Paralela 45, 2025
ISBN 978-973-47-4258-5
51

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I
MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

I.1 Mulțimi

1. a) Mulțimea este .... bine determinate și distincte numite ....

b) Mulțimile se notează cu .... , cu sau fără indici: A, B, C, ... , A_1, A_2, A_3, ...

c) Elementele unei mulțimi se notează cu .... : a, b, ...

d) Mulțimea care nu are nici un element se numește .... și se notează cu simbolul ....

2. a) Dacă A este o mulțime și x este un element al ei, atunci notăm .... și citim ....

b) O mulțime se numește numerică dacă ....

3. Orice mulțime poate fi dată în trei moduri:

a) **explicit**, prin .... ;

b) **implicit**, ... ;

c) **cu ajutorul unor diagrame Venn–Euler** ....

4. Mulțimea numerelor naturale mai mici decât 5 reprezentată:

a) explicit este $M =$ ....

b) printr-o proprietate caracteristică este $M =$ ....

c) cu ajutorul diagramei Venn–Euler este:

5. O mulțime A se numește:

a) **mulțime finită** dacă .... , de exemplu: mulțimea divizorilor numărului 6 este D_6 ....

b) **mulțime infinită** .... , de exemplu: mulțimea multiplilor unui număr natural este .... $M_6 =$ ....

6. Numărul de elementele ale unei mulțimi A se notează cu .... și card D_6 = ...

7. a) **Două mulțimi A și B sunt egale** dacă .... și notăm .... în caz contrar spunem că .... și notăm ....

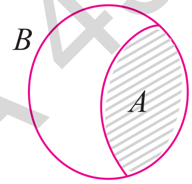
b) Mulțimile $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}^* \text{ și } x \leq 4\}$ și $B = \{1, 2, 3, 4\}$ sunt .... și notăm ....

c) Mulțimile $M = \{1, 2, 3\}$ și $N = \{a, b, c\}$ sunt .... și notăm .... , însă au același număr de elemente, mai precis card M = ... = ...

8. a) **O mulțime A** este **submulțime a mulțimii B** dacă ....

Se notează $A \subseteq B$ și se citește „ .... ”.

b) Dacă cel puțin un element al mulțimii A nu este element al mulțimii B, atunci .... și notăm ....



$A \subset B$

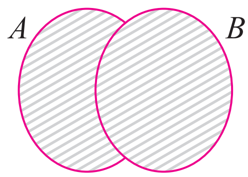
9. a) Mulțimea vidă este submulțime .... și notăm ....

b) Orice mulțime este inclusă în ea însăși, adică ....

c) Mulțimea vidă și mulțimea însăși sunt .... , restul submulțimilor sunt submulțimi ....

10. a) **Reuniunea a două mulțimi A și B** este .... și scriem $A \cup B$ = ...

b) Dacă $A = \{1, 3, 5\}$ și $B = \{3, 5, 7\}$, atunci $A \cup B$ = ...

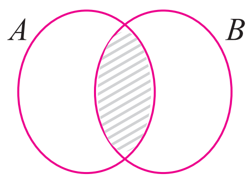


$A \cup B$

11. a) **Intersecția a două mulțimi A și B** este .... și scriem $A \cap B$ = ...

b) Dacă $A = \{2, 3, 5\}$ și $B = \{3, 5, 7\}$, atunci $A \cap B$ = ...

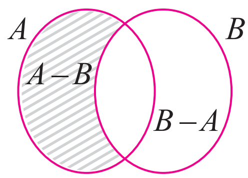
c) Dacă $A \cap B = \varnothing$, atunci A și B se numesc ....



$A \cap B$

12. a) **Diferența mulțimilor A și B** este .... și scriem $A - B$ = ...

b) Dacă $A = \{2, 3, 5\}$ și $B = \{3, 5, 7\}$, atunci $A - B$ = ... și $B - A$ = ...



$A - B \neq B - A$

13. a) Într-o mulțime fiecare element apare ....

b) Analizând diagramele de mai jos, avem reprezentată o mulțime în figura ....

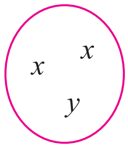


fig. 1

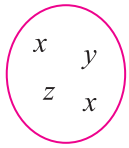


fig. 2

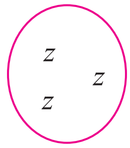


fig. 3

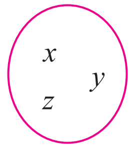


fig. 4

14. a) Submulțimile mulțimii $M = \{a, b, c\}$ sunt ....

....

b) Numărul de submulțimi ale unei mulțimi A este ....

15. Se consideră mulțimile $A = \{0, 1, 2, 3\}$ și $B = \{x^2 \mid x \in A\}$. Scrieți elementele mulțimilor:

$B =$ .... ; $A \cup B =$ .... ;

$A \setminus B =$ .... ; $A \cap B =$ ....

16. Completați spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate.

a) Într-o mulțime nu contează ordinea .... , mulțimile $A = \{a, b, c\}$ și $B = \{b, a, c\}$ sunt .... pentru că sunt formate din ....

b) Mulțimea literelor din care este format cuvântul „element” este $C =$ ....

c) Mulțimea cifrelor este o mulțime .... în timp ce mulțimea numerelor naturale este o mulțime ....

17. Se dă mulțimea $M = \{x \in \mathbb{N}^*, x \leq 3\}$.

a) Scrieți mulțimea M prin enumerarea elementelor, $M =$ ....

b) Submulțimile improprii ale mulțimii M sunt ....

c) Submulțimile proprii ale mulțimii M sunt ....

18. Determinați a, știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

a) $\{1, a, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$; b) $\{1, a, 3\} \subseteq \{1, 3, 4, 5\}$.

....

19. a) Determinați perechile (x, y) știind că $\{2, x, 4\} \subseteq \{1, 2, y, 3\}$.

b) Determinați perechile (x, y) știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

i) $\{2, 3, 4\} \subset \{3, x, y, 4\}$; ii) $\{3, x, y, 4\} \subseteq \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Soluție: ....

....

20. a) Elementele mulțimii $\{x \in \mathbb{N} \mid x$ este restul împărțirii oricărui număr natural la $5\}$ sunt: ....

....

b) Între elementul a și mulțimea $M = \{a, b, c\}$ există relația de ....
și notăm ....

c) Între mulțimile $A = \{1, 2\}$ și $B = \{0, 1, 2, 3\}$ există relația de .... ;
notăm .... și spunem că ....

21. Se consideră mulțimea $M = \left\{\overline{xy} \in \mathbb{N} \mid \overline{xy} \vdots 23\right\}$.

a) Elementele mulțimii M sunt ....

b) Submulțimile lui M formate din câte două elemente sunt ....

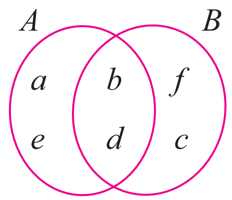
c) Submulțimile lui M formate din câte trei elemente sunt ....

22. Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate.

a) $A \cup B = \{x \mid x \in A$ .... $x \in B\}$;   c) $A \setminus B = \{x \mid x \in A$ .... $x \notin B\}$;

b) $A \cap B = \{x \mid x \in A$ .... $x \in B\}$;   d) $B \setminus A = \{x \mid x \in B$ .... $x \notin A\}$.

23. Analizați, cu atenție, diagrama și specificați dacă propozițiile ce urmează sunt adevărate sau false:



$a \in A \cap B$ .... ; $b \notin A \cap B$ .... ; $\{b, d\} = A \cap B$ .... ;

$d \notin A \cap B$ .... ; $e \in A \setminus B$ .... ; $\{a, c\} \subset A \cup B$ ....

24. Se consideră două mulțimi oarecare A și B.

a) Dacă $A \cap B = A \cup B$, atunci ....

b) Dacă $A \subseteq B$ și $B \subseteq A$, atunci ....

25. Scrieți informația corectă care completează spațiile punctate:

a) Cel mai mare divizor propriu al mulțimii $\mathcal{D}_{48}$ este ....

b) Cardinalul mulțimii $\mathcal{D}_{48}$ este ....

c) Cel mai mic element al mulțimii $\mathcal{M}_6 \cap \mathcal{M}_8$ este ....

d) Din mulțimea $\mathcal{M}_8$, elementele de forma $\overline{ab}$ sunt ....

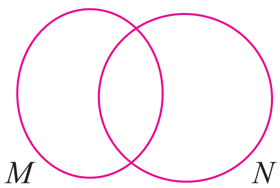
26. Dacă $A = \{0, 1, 2, 4\}$ și $B = \{0, 2, 5, 6\}$, atunci:

$A \cup B =$ .... ; $A \cap B =$ .... ;

$A \setminus B =$ .... ; $B \setminus A =$ ....

27. Determinați mulțimile M și N, știind că $M \cup N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $M \cap N = \{2, 3, 4\}$ și $N \setminus M = \{5\}$.

Soluție: ....
....
....
....
....



28. Se consideră mulțimea $M = \{1, 2, 3\}$. Scrieți două mulțimi A și B care să îndeplinească condițiile:

a) $A \cup B = M \Rightarrow A =$ .... ; $B =$ ....

b) $A \cap B = M \Rightarrow A =$ .... ; $B =$ ....

c) $A \setminus B = M \Rightarrow A =$ .... ; $B =$ ....

29. Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x^2 \leq 25\}$ și $B = \{z \in \mathbb{N} \mid z^3 \leq 27\}$. Scrieți informația corectă care completează spațiile punctate:

$A =$ .... ; $B =$ .... ;

$A \cap B =$ .... ; $A \cup B =$ .... ;

$A \setminus B =$ .... ; $B \setminus A =$ ....

30. Se consideră mulțimile $A = \{a \in \mathbb{N} \mid a = n^2 + n, n \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{b \in \mathbb{N} \mid b = 2n + 1, n \in \mathbb{N}\}$.

a) Pentru $n \leq 5$, scrieți mulțimile A, B, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

....

....

....

b) Arătați că cele două mulțimi sunt disjuncte.

31. a) Fie A mulțimea **divizorilor improprii** ai numărului 12. $A =$ ....

b) Fie B mulțimea **divizorilor proprii** ai numărului 12. $B =$ ....

c) Verificați dacă A și B sunt mulțimi disjuncte, $A \cap B =$ .... , adică mulțimile A și B sunt ....

I.2 Descompunerea numerelor naturale în produs de numere prime. Determinarea celui mai mare divizor comun și celui mai mic multiplu comun. Proprietăți ale divizibilității în mulțimea numerelor naturale

1. a) Un număr natural n se numește **prim** dacă ....

b) Scrieți numerele prime mai mici decât 50 ....

c) Un număr natural n se numește **compus** dacă ....

....

> ***Orice număr natural nenul, diferit de 1, care nu este prim poate fi scris ca un produs de numere naturale prime.***

2. a) **Descompunerea în factori primi** a unui număr natural înseamnă ....

....

b) Descompuneți în factori primi următoarele numere naturale: 14 400, 15 600, 5 775.

Rezolvare:

14 400	$2^2 \cdot 5^2$
144	2
72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$14\,400 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

15 600	

$15\,600 =$

5 775	

$5\,775 =$

Singurul număr prim și par este 2.

3. a) Scrieți ca sumă de numere prime numerele naturale: 7; 12; 26; 34.

$7 = 2 + 5$; $12 =$ .... ; $26 =$ .... ; $34 =$ ....

b) Suma a două numere prime este 99. Numerele sunt ....

c) Produsul dintre un număr natural prim și un număr impar este 4866. Calculați numerele.

....

4. Determinați numerele prime a, b și c, diferite două câte două, știind că:

a) $3a + 4b + 2c = 48$.

Rezolvare: $4b$, $2c$ și 48 sunt numere pare și cum $3a + 4b + 2c = 48 \Rightarrow 3a$ este număr par $\Rightarrow a$ este număr par și cum a este număr prim $\Rightarrow a = 2 \Rightarrow 3 \cdot 2 + 4b + 2c = 48 \Rightarrow 4b + 2c = 48 - 6 \Rightarrow 4b + 2c = 42 \mid : 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2b + c = 21$. Cum $2b$ este număr par și 21 este număr impar $\Rightarrow c$ este număr impar și prim și avem:

$c = 3 \Rightarrow 2b = 18 \Rightarrow b = 9$ (nu este număr prim);

$c = 5 \Rightarrow 2b = 16 \Rightarrow b = 8$ (nu este număr prim);

$c = 7 \Rightarrow 2b = 14 \Rightarrow b = 7$;

$c = 11 \Rightarrow 2b = 10 \Rightarrow b = 5$;

$c = 13 \Rightarrow 2b = 8 \Rightarrow b = 4$ (nu este număr prim);

$c = 17 \Rightarrow 2b = 4 \Rightarrow b = 2$.

Cum numerele trebuie să fie diferite două câte două, rezultă că $a = 2$, $b = 5$ și $c = 11$ sunt numerele căutate.

b) $a + 2b + 4c = 36$

....

....

....

....

....

5. Determinați cifrele distincte a și b, astfel încât $\overline{ab}$ și $\overline{ba}$ să fie numere prime.

....

....

....

6. Determinați numerele naturale de forma $\overline{ab}$, știind că suma dintre $\overline{ab}$ și $\overline{ba}$ este pătrat perfect.

....

....

....

7. Dacă $\overline{abc}$ este număr prim, calculați câți divizori are numărul $\overline{abcabc}$.

....

....

....

8. a) Care este cel mai mic număr de trei cifre care are exact trei divizori?

....

b) Care este cel mai mare număr de două cifre care are exact patru divizori?

....

9. a) Cel mai mare divizor comun al numerelor naturale *a* și *b* se prescurtează .... și se notează cu ....

b) Pentru a calcula c.m.m.d.c. se procedează astfel:

– se descompun ....

– se iau factorii ....

....

10. a) Cel mai mic multiplu comun al numerelor naturale *a* și *b* se prescurtează .... și se notează cu ....

b) Pentru a calcula c.m.m.m.c. se procedează astfel:

– se descompun ....

– se iau factorii ....

....

11. Calculați cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun al numerelor:

a) 840 și 672

$$\begin{array}{r|l} 840 & 2 \cdot 5 \\ 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 672 & 2 \\ 336 & 2 \\ 168 & 2 \\ 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$840 = 2^3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7;$
$672 = 2^5 \cdot 3 \cdot 7;$
$[840; 672] = 2^5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7 = 3360;$
$(840; 672) = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 = 168.$

b) 675 și 864

675		864	

675 = ...

864 = ...

[675; 864] = ...

(675; 864) = ...

Pentru $a, b \in \mathbb{N}$, avem $(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b$.

12. Verificați această proprietate pentru:

a) $a = 192$ și $b = 144$

192		144	

192 = ... ; 144 = ...

(192; 144) = ... [192; 144] = ...

(192; 144) · [192; 144] = ...
192 · 144 = ... $\Big\}\Rightarrow$ (192; 144) · [192; 144] =

= .... = 192 · 144

b) $a = 450$ și $b = 224$.

450		224	

450 = ... ; 224 = ...

(450; 224) = ... [450; 224] = ...

(450; 224) · [450; 224] = ...
450 · 224 = ... $\Big\}\Rightarrow$ ....

Două sau mai multe numere naturale care au cel mai mare divizor comun egal cu 1 se numesc *numere prime între ele*.

13. Scrieți perechile de numere prime între ele care se pot forma cu numerele: 9, 2, 4 și 14.

$2 = 2$; $9 = 3^2$; $4 = 2^2$; $14 = 2 \cdot 7$;

$(2, 9) = 1 \Rightarrow$ 2 și 9 sunt prime între ele;

$(2, 4) = 2 \Rightarrow$ 2 și 4 nu sunt prime între ele;

(2, 14) = ... ; (9, 14) = ... ;

(9, 4) = ... ; (4, 14) = ...

Deci, perechile de numere prime între ele sunt (2, 9); ....

14. Aflați cifra x astfel încât:

a) $\left(\overline{31x},\ 2\right) = 1 \Rightarrow x$ nu trebuie să fie cifră pară $\Rightarrow x \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$;

b) $\left(\overline{1x},\ 3\right) = 1 \Rightarrow$ .... ;

c) $\left(\overline{1x5},\ 2\right) = 1, \Rightarrow$ .... ;

d) $\left(\overline{53x},\ 5\right) = 1 \Rightarrow$ ....

15. În mulțimea numerelor naturale, divizibilitatea are următoarele proprietăți:

a) **Reflexivitate**, ...

b) **Antisimetrie**, ...

c) **Tranzitivitate**, ...

d) Dacă $a \mid b$ și $a \mid c$, atunci $a \mid$ .... , ...

e) Dacă $a \mid b \cdot c$ și $(a, b) = 1$, atunci $a \mid$ ....

16. a) Determinați toate numerele naturale de forma $\overline{2xy}$ divizibile cu 15.

b) Determinați toate numerele naturale de forma $\overline{3x1y}$ divizibile cu 6.

Rezolvare: a) $15 \mid \overline{2xy} \Leftrightarrow 5 \mid \overline{2xy}$; $3 \mid \overline{2xy}$ și $(5, 3) = 1$. Dar $5 \mid \overline{2xy} \Leftrightarrow y \in \{0, 5\} \Leftrightarrow \overline{2xy} \in \{\overline{2x0}, \overline{2x5}\}$. Cum $3 \mid \overline{2x0} \Leftrightarrow 3 \mid (2 + x + 0) \Leftrightarrow 3 \mid (2 + x) \Leftrightarrow x \in \{1, 4, 7\} \Leftrightarrow \overline{2x0} \in \{210, 240, 270\}$. Cum $3 \mid \overline{2x5} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3 \mid (2 + x + 5) \Leftrightarrow 3 \mid (7 + x) \Leftrightarrow x \in \{2, 5, 8\} \Leftrightarrow \overline{2x5} \in \{225, 255, 285\}$. Numerele căutate sunt: 210, 225, 240, 255, 270, 285.

b) $6 \mid \overline{3x1y} \Leftrightarrow$ ....

....

....

....

Numerele căutate sunt: ....

17. a) Determinați numerele naturale a și b, știind că cel mai mare divizor comun al lor este 7 și suma lor este 35.

Rezolvare: Cum $(a, b) = 7 \Rightarrow a = 7x$, $b = 7y$, unde $(x, y) = 1$. Dar $a + b = 35 \Rightarrow 7x + 7y = 35 \mid : 7 \Rightarrow$ $x + y = 5$, adică:

x	1	4	2	3
y	4	1	3	2
$a = 7x$	7	28	14	21
$b = 7x$	28	7	21	14

Numerele căutate sunt: $a = 7$, $b = 28$ sau $a = 28$, $b = 7$ sau $a = 14$, $b = 21$ sau $a = 21$, $b = 14$.

b) Determinați numerele naturale a și b, știind că $(a, b) = 5$ și $a + b = 25$.

Rezolvare: Cum $(a, b) = 5 \Rightarrow a =$ ..... , $b =$ ..... , unde $(x, y) = 1$. Dar $a + b = 25 \Rightarrow$ .... , adică:

x	
y	
$a = 5x$	
$b = 5x$	

Numerele căutate sunt: ....

c) Determinați numerele naturale a și b, știind că $(a, b) = 12$ și $a \cdot b = 2160$.

Rezolvare: Cum $(a, b) = 12 \Rightarrow a =$ ...... , $b =$ ..... , unde $(x, y) = 1$. Dar $a \cdot b = 2160 \Rightarrow$ .... , adică:

x	
y	
$a = 12x$	
$b = 12x$	

Numerele căutate sunt: ....

Prin scrierea $x - 1 \in \mathcal{D}_{15}$ înțelegem $x - 1 \in \{1, 3, 5, 15\} \Rightarrow x \in \{2, 4, 6, 16\}$.

18. a) Determinați $x \in \mathbb{N}$, astfel încât $2x + 1 \in \mathcal{D}_{11}$.

....

b) Determinați $x \in \mathbb{N}$, astfel încât $x + 1$ să fie divizor propriu al lui 6.

....

19. a) Arătați că numerele de forma $15^{n+1} + 3 \cdot 15^n + 3^{n+2} \cdot 5^n$ sunt divizibile cu 27, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

Rezolvare: $15^{n+1} + 3 \cdot 15^n + 3^{n+2} \cdot 5^n = 3^{n+1} \cdot 5^{n+1} + 3 \cdot 3^n \cdot 5^n + 3^{n+2} \cdot 5^n = 3^{n+1} \cdot 5^{n+1} + 3^{n+1} \cdot 5^n + 3^{n+2} \cdot 5^n =$ $= 3^{n+1} \cdot 5^n \cdot (5 + 1 + 3) = 3^{n+1} \cdot 5^n \cdot 9 = 3^n \cdot 5^n \cdot 3 \cdot 9 = 27 \cdot 3^n \cdot 5^n = 27 \cdot (3 \cdot 5)^n = 27 \cdot 15^n$. Cum $27 \cdot 15^n \,\vdots\, 27 \Rightarrow$ numerele de forma $15^{n+1} + 3 \cdot 15^n + 3^{n+2} \cdot 5^n$ sunt divizibile cu 27.

b) Arătați că numerele de forma $72 \cdot 12^n + 3^{n+3} \cdot 4^{n+2}$ sunt divizibile cu 63, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

....

....

....

20. Determinați cel mai mare număr natural nenul care împărțit la 7 dă câtul egal cu restul.

Rezolvare: Fie a numărul căutat. Din teorema împărțirii cu rest, D = Î · C + R, R < Î, obținem $a = 7 \cdot \text{C} + \text{R}$, $\text{R} < 7 \Rightarrow \text{R} \in \{1, 2, \ldots, 6\}$.

Cel mai mare număr natural se obține pentru R = ... și a = ...

21. Împărțind numerele 131, 284, 197 la același număr natural nenul se obțin resturile 7, 5 și 11 și câturile nenule. Aflați împărțitorul.

Rezolvare: Din teorema împărțirii cu rest, D = Î · C + R, R < Î, avem: $131 = \text{Î} \cdot \text{C}_1 + 7$, $7 < \text{Î} \Rightarrow$ $\Rightarrow 131 - 7 = \text{Î} \cdot \text{C}_1$; $284 = \text{Î} \cdot \text{C}_2 + 5$, $5 < \text{Î} \Rightarrow 284 - 5 = \text{Î} \cdot \text{C}_2$; $197 = \text{Î} \cdot \text{C}_3 + 11$, $11 < \text{Î} \Rightarrow 197 - 11 =$ $= \text{Î} \cdot \text{C}_3 \Rightarrow 124 = \text{Î} \cdot \text{C}_1$, $279 = \text{Î} \cdot \text{C}_2$ și $186 = \text{Î} \cdot \text{C}_3$.

124 | 279 | 186 |

124 = ... ; 279 = ... ; 186 = ...

Î = (124, 279, 186) = ...

Cum Î > 11 ⇒ Î = ...

22. Aflați cel mai mic număr natural care împărțit pe rând la 6, 15 și 24 dă resturile 4, 13 și, respectiv, 22.

Rezolvare: Fie a numărul căutat. Din teorema împărțirii cu rest, D = Î · C + R, R < Î, avem:

$a = 6 \cdot \text{C}_1 + 4 \mid +2 \Rightarrow a + 2 =$ .... ;

$a = 15 \cdot \text{C}_2 + 13 \mid +2 \Rightarrow a + 2 =$ .... ;

$a = 24 \cdot \text{C}_3 + 22 \mid +2 \Rightarrow a + 2 =$ .... $\Rightarrow a + 2 = [6, 15, 24] =$ .... $\Rightarrow$

$\Rightarrow a =$ ....

Numărul căutat este: ....

CAPITOLUL IV
MULȚIMEA NUMERELOR RAȚIONALE

IV.1 Număr rațional. Reprezentarea pe axa numerelor. Opusul și modulul unui număr rațional. Compararea și ordonarea numerelor raționale

1. a) Fracțiile $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \ldots, \frac{n}{2 \cdot n}$ formează un șir de fracții .... Ele reprezintă jumătate dintr-un întreg sau .... % dintr-un întreg.

b) Toate aceste fracții reprezintă un număr ....

c) Oricare dintre aceste fracții poate fi considerată un reprezentant al ....

d) Dacă se dă o fracție $\frac{a}{b}$ cu $b \neq 0$, atunci mulțimea tuturor fracțiilor .... cu fracția dată se numește .... de reprezentant $\frac{a}{b}$.

2. a) **Numărul rațional** poate fi definit și ca o pereche de numere întregi m și n, $n \neq 0$, scrisă sub forma ....

b) Mulțimea numerelor raționale se notează cu .... și $\mathbb{Q} = \{$...$\}$.

c) Două numere raționale reprezentate de fracțiile $\frac{m}{n}$ și $\frac{p}{q}$ sunt **egale**, dacă fracțiile $\frac{m}{n}$ și $\frac{p}{q}$ sunt .... , adică $\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow$ ....

d) Numerele raționale $-\frac{m}{n}$, $\frac{-m}{n}$ și $\frac{m}{-n}$ sunt ....

3. a) Orice număr rațional se poate scrie sub forma $\frac{m}{n}$ sau .... , unde m și n sunt numere naturale și n diferit de zero.

b) Orice fracție ordinară de forma $\frac{m}{n}$, unde m și n sunt numere întregi, iar n este diferit de zero, poate fi transformată prin împărțirea numărătorului la numitor într-o fracție .... finită sau ....

4. Scrieți sub formă de fracție zecimală următoarele numere raționale:

a) $\frac{2}{5} =$ .... ; b) $-\frac{7}{10} =$ .... ; c) $\frac{5}{6} =$ ....

5. Scrieți sub formă de fracție ireductibilă următoarele numere raționale:

a) $1{,}26 =$ .... ; b) $-0{,}25 =$ .... ;

c) $0{,}(23) =$ .... ; d) $2{,}1(3) =$ ....

6. a) Orice număr natural este .... și orice număr întreg este ....

b) Un număr rațional $\frac{a}{b}$ $(a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0)$ este număr natural dacă .... și un număr rațional $\frac{a}{b}$ $(a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0)$ este întreg dacă ....

c) Relațiile de incluziune între $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sunt ....

7. Se consideră mulțimea $M = \left\{-4; \frac{2}{3}; 1; 0; \frac{1}{2}; \frac{7}{3}; -\frac{22}{11}\right\}$. Scrieți elementele mulțimilor:

$A = \{x \in M \mid x \in \mathbb{N}\} =$ ....

$B = \{x \in M \mid x \in \mathbb{Z}\} =$ ....

$C = \{x \in M \mid x \in \mathbb{Q}\} =$ ....

8. Completați spațiile punctate cu unul dintre simbolurile $\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$, astfel încât să se obțină propoziții adevărate:

a) $\frac{1}{3}$ ... $\mathbb{Q}$; b) $-\frac{4}{2}$ ... $\mathbb{Z}$; c) -3 ... $\mathbb{Q}$; d) $-\frac{7}{2}$ ... $\mathbb{Z}$;

e) $\frac{21}{3}$ ... $\mathbb{N}$; f) $-\frac{49}{7}$ ... $\mathbb{N}$; g) $\mathbb{Q}$ ... $\mathbb{Z}$; h) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Q}$ ... $\mathbb{Z}$.

9. a) **Opusul numărului rațional *x*** este .... **și opusul numărului rațional $-x$** este ....

b) Două numere raționale se numesc **opuse** dacă ele sunt abscisele a două puncte distincte ....

10. Scrieți opusul fiecăruia dintre numerele:

a) $0,1$; .... ; b) $-1,2(3)$; .... ; c) $2,5$; .... ;

d) $\frac{1}{4}$; .... ; e) $\frac{-2}{5}$; .... ; f) $\frac{3}{-7}$; ....

11. a) **Modulul** sau **valoarea absolută** a numărului x este un număr rațional notat cu .... și reprezintă distanța de la ....

b) Modulul numărului x notat cu .... se definește astfel:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0, & \text{dacă } \ldots\ldots\ldots\ldots \\ -x, & \text{dacă } \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}.$$

c) Modulul are următoarele proprietăți:

$|x| = 0 \Leftrightarrow$ .... și $|x|$ ... $|-x|$;

$|x|$ ... 0, oricare ar fi $x \in \mathbb{Q}$;

$|x \cdot y| =$ .... , oricare ar fi $x, y \in \mathbb{Q}$;

$\left|\dfrac{x}{y}\right| =$ .... , oricare ar fi $x, y \in \mathbb{Q}, y \neq 0$.

12. Reprezentați pe o axă a numerelor următoarele numere raționale:

a) $-\dfrac{3}{2}$; -2; $1{,}5$; $-\dfrac{1}{4}$; 2; $-\dfrac{5}{2}$; $2{,}5$; 1; -1.

0

b) $-\dfrac{4}{3}$; 0; $\dfrac{2}{3}$; $-0{,}(3)$; $1{,}(3)$; $\dfrac{10}{5}$; $-0{,}(6)$; $\dfrac{1}{3}$; 1.

0

13. Completați tabelul:

a	1		–2,1		1,2			–2	
–a		0,1		–3		–1,1	0,2		1,(3)
| ***a*** |									

14. Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate:

a) $\left|-\dfrac{1}{2}\right| =$ .... ; b) $\left|+\dfrac{2}{3}\right| =$ .... ; c) $-|-0{,}5| =$ .... ; d) $|2{,}(3)| =$ ....

15. Scrieți fără modul:

a) $\left|\dfrac{x}{-1}\right|, x < 0$; b) $\left|\dfrac{x}{-1}\right|, x > 0$; c) $\left|\dfrac{3}{x}\right|, x < 0$; d) $\left|\dfrac{3}{x}\right|, x > 0$;

e) $|x - 5|, x < 0$; f) $|-x + 1|, x < 0$; g) $\dfrac{x}{|x|}, x < 0$; h) $\dfrac{-|x|}{x}, x > 0$.

16. a) Dacă $|x| = \dfrac{1}{2}$, atunci $x =$ .... sau $x =$ ....

b) Dacă $|x| = 5{,}(3)$, atunci $x =$ .... sau $x =$ ....

c) Dacă $|x| = 0$, atunci ....

d) Dacă $|x| = 0{,}1(3)$, atunci ....

17. a) Fie x și y două numere raționale. Numărul x este mai mic decât numărul y dacă pe axa numerelor punctul care are coordonata x este situat .... celui care are coordonata .... și scriem $x < y$ sau ....

b) Dacă x și y sunt două numere raționale pozitive, atunci $x < y \Leftrightarrow$ ....

c) Dacă x și y sunt două numere raționale negative, atunci $x < y \Leftrightarrow$ ....

d) Dacă x este număr rațional negativ și y este număr rațional pozitiv, atunci ....

18. Ordonați crescător numerele:

a) $-1{,}2;\ 2,(3);\ 0{,}6;\ -\frac{4}{3};\ 0,(6)$ ....

b) $5{,}3;\ -5{,}13;\ 5,(3);\ -5{,}1(3);\ 5{,}31$ ....

19. Dacă $A = \left\{ x \in \mathbb{N} \,\middle|\, -1 \leq \frac{x}{2} \leq \frac{7}{3} \right\}$, atunci card $A =$ ..... .

20. Încadrați fiecare dintre următoarele numere raționale între două numere întregi consecutive:

a) ... $< 3{,}5 <$ ... ; b) ... $< 0{,}2(3) <$ ... ; c) ... $< -2\frac{1}{5} <$ ... .

21. Completați cu simbolurile „<” sau „>”.

a) $-3{,}1(5)$ $\square$ $-3,(15)$; b) $-2,(3)$ $\square$ $-2{,}3(4)$; c) $\frac{2}{5}$ $\square$ $\frac{5}{6}$;

d) $1{,}27$ $\square$ $1,(27)$; e) $-4{,}1(02)$ $\square$ $-4{,}102$; f) $-\frac{2}{3}$ $\square$ $-\frac{3}{4}$.

22. Prin relația de ordine $x \leq y$ înțelegem .... sau .... și are următoarele proprietăți:

a) este **reflexivă**, adică .... ;

b) este **tranzitivă**, adică .... ;

c) este **simetrică**, adică ....

23. Comparați numerele:

a) $0{,}2$ ... $\frac{1}{4}$ pentru că .... ;

b) $-0{,}6$ ... $-\frac{6}{9}$ pentru că .... ;

c) $-\frac{3}{4}$ ... $-\frac{4}{5}$ pentru că .... ;

d) $\frac{4}{3}$ ... $|-1,(3)|$ pentru că ....

24. Ordonați crescător numerele raționale: $0{,}5;\ -2;\ 1;\ -1,(3);\ 2\frac{1}{5};\ -\frac{11}{3};\ \frac{19}{7};\ 2{,}8$.

....

....

25. Ordonați descrescător numerele raționale: $\frac{29}{3};\ -0,(6);\ 1\frac{2}{3};\ -2{,}5;\ \frac{4}{5};\ -\frac{4}{3};\ 5;\ -4$.

....

....

26. Completați cu A sau F dacă propozițiile sunt adevărate sau false.

a) $2,(6) < 2,659$ ... ; b) $-4,3 < -4,25$ ... ; c) $-\frac{5}{3} < -\frac{8}{3}$ ... ;

d) $-\frac{5}{6} < -\frac{1}{2}$ ... ; e) $-\frac{7}{3} < \frac{1}{2}$ ... ; f) $5,2 < |-5,25|$ ... .

27. În scrierea $2\frac{1}{5}$ știm că 2 este **partea întreagă** a numărului rațional $2\frac{1}{5}=\frac{11}{5}$, iar $\frac{1}{5}$ este **partea fracționară** a numărului și notăm: $\left[2\frac{1}{5}\right]=2$ și $\left\{2\frac{1}{5}\right\}=\frac{1}{5}$. Scrieți partea întreagă și partea fracționară a numerelor:

a) $\frac{13}{4}$; b) $\frac{23}{2}$; c) $\frac{12}{5}$.

Rezolvare: a) $\frac{13}{4}=3\frac{1}{4} \Rightarrow \left[3\frac{1}{4}\right]=3$ și $\left\{3\frac{1}{4}\right\}=\frac{1}{4}$.

b) $\frac{23}{2}=$ ....

c) $\frac{12}{5}=$ ....

28. a) **Partea întreagă a numărului rațional x**, notată .... , este ....

.... ,

adică: $[x]=n,\ n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n \le x < n+1$.

b) **Partea fracționară a numărului rațional x**, notată .... , este ....

.... ,

adică: $\{x\}=x-[x]$.

c) Dacă $x \in \mathbb{Z}$, atunci $[x]=$ .... și $\{x\}=$ .... și reciproc.

d) Pentru orice număr rațional x au loc relațiile: 0 ... $\{x\}$ ... 1 și $x=[x]$ ... $\{x\}$

29. Cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu numerele:

a) $\frac{11}{3}$; .... ; b) $-\frac{11}{3}$; ....

30. Se consideră numerele: $2,37$; $-2,37$; $\frac{1}{4}$ și $-\frac{1}{4}$. Completați spațiile punctate pentru a obține propoziții adevărate.

$[2,37]=$ .... ; $\{2,37\}=$ .... ; $[-2,37]=$ .... ; $\{-2,37\}=$ .... ;

$\left[\frac{1}{4}\right]=$ .... ; $\left\{\frac{1}{4}\right\}=$ .... ; $\left[-\frac{1}{4}\right]=$ .... ; $\left\{-\frac{1}{4}\right\}=$ ....

31. Oricare ar fi $x \in \mathbb{Q}$ și oricare ar fi un număr rațional pozitiv a avem:

a) $|x| < a \Leftrightarrow$ .... ; b) $|x| > a \Leftrightarrow$ ....

CAPITOLUL V
NOȚIUNI GEOMETRICE FUNDAMENTALE

V.1 Unghiuri. Unghiuri opuse la vârf. Congruența unghiurilor opuse la vârf

1. Completați spațiile punctate:

a) Două unghiuri proprii se numesc **unghiuri opuse la vârf** dacă ....
....

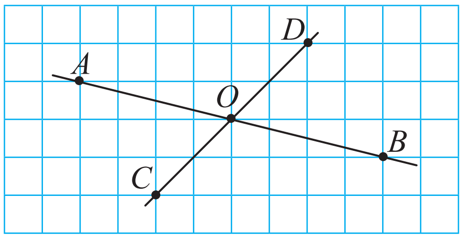
b) Unghiurile opuse la vârf sunt .... , adică au aceeași măsură.

2. Desenați două drepte MN și PQ concurente în punctul O.

a) Semidreptele OM și ON, respectiv OP și OQ sunt perechi de ....

b) Unghiurile MOP și NOQ, respectiv MOQ și NOP sunt unghiuri ....

3. În figura alăturată:



a) semidreptele OA și OB sunt semidrepte .... , înseamnă că $\sphericalangle AOB$ este .... , adică: $\sphericalangle AOD + \sphericalangle DOB =$ .... sau $\sphericalangle DOB = 180 -$ .... (1)

b) semidreptele OC și OD sunt semidrepte .... , înseamnă că $\sphericalangle COD$ este .... , adică: $\sphericalangle AOD + \sphericalangle AOC =$ .... sau $\sphericalangle AOC = 180 -$ .... (2)

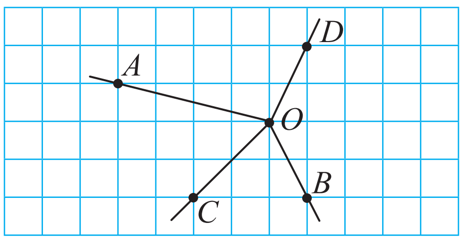
c) Din (1) și (2) se constată că unghiurile DOB și AOC sunt .... și notăm ....

4. a) Desenați două drepte MN și PQ concurente în punctul O, astfel încât măsura unghiului MOP să fie de 45°.

b) Măsurile unghiurilor MOQ, NOQ și PON sunt egale cu ....

c) Unghiurile opuse la vârf din figura obținută sunt ....
.... și ....

5. Observați figura alăturată și completați: Unghiurile AOD și BOC, respectiv AOC și BOD sunt perechi de unghiuri care .... deoarece semidreptele OA și OB, respectiv OC și OD nu sunt ....

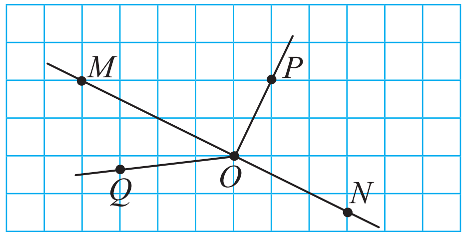


6. Analizați cu atenție figura alăturată și completați:

a) semidreptele OM și ON sunt .... ;

b) semidreptele OP și OQ .... semidrepte opuse;

c) unghiurile POM și QON, respectiv PON și QOM sunt unghiuri care .... la vârf și ale căror laturi .... o singură pereche de ....



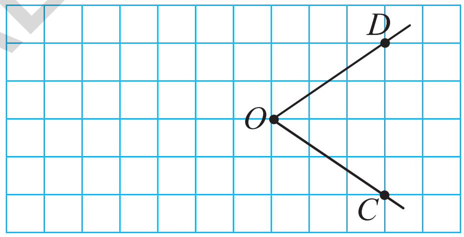
7. Calculați măsurile unghiurilor determinate de două drepte concurente, știind că unul dintre ele are măsura egală cu:

a) $60°$; b) $100°$; c) $80°$; d) $90°$.

8. Mihai dorește să măsoare unghiul COD din figura alăturată, dar, așa cum este desenat unghiul, gradațiile raportorului depășesc marginea caietului. Ce ar trebui să facă Mihai?

....

....



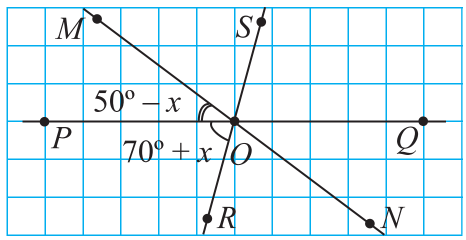
9. Analizați cu atenție figura alăturată.

a) Calculați măsura unghiului SOM.

b) Dacă măsura unghiului POR este dublul măsurii unghiului POM, calculați măsurile unghiurilor: RON, QON, QOS.

....

....



10. Se consideră două drepte a și b, concurente în punctul O. Calculați măsura fiecărui unghi cu vârful în punctul O, știind că:

a) suma măsurilor a două dintre unghiuri este egală cu $140°$;

b) suma măsurilor a trei dintre unghiuri este egală cu $225°$.

....

....

....

....

V.2 Unghiuri formate în jurul unui punct. Suma măsurilor unghiurilor în jurul unui punct

1. Numim **unghiuri în jurul unui punct *O*** .... care au proprietățile:

a) toate au .... , punctul O;

b) orice punct al planului care nu aparține niciuneia dintre laturile lor ....

Suma măsurilor unghiurilor în jurul unui punct este egală cu 360°.

2. Unghiurile AOB, COB și COA sunt unghiuri în jurul unui punct. Știind că măsura unghiului BOC este dublul măsurii unghiului AOB și cu $10°$ mai mică decât măsura unghiului AOC, calculați măsurile unghiurilor.

Soluție: Fie $\sphericalangle AOB = x° \Rightarrow \sphericalangle BOC =$ ....

și $\sphericalangle AOC =$ .... Dar suma măsurilor unghiurilor în jurul unui punct este egală cu .... ° $\Rightarrow$ ....

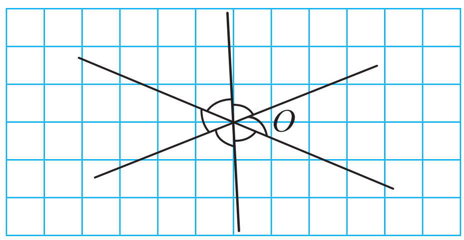
....

3. Aflați măsurile a cinci unghiuri în jurul unui punct, știind că acestea sunt exprimate prin numere naturale consecutive.

Soluție: Fie x, $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$ și $x + 4$ măsurile celor cinci unghiuri în jurul unui punct. Avem: $x + (x + 1) + (x + 2) +$ .... = ...

$\Rightarrow$ ....

4. Unghiurile marcate pe figura alăturată sunt congruente.



a) Notați figura.

b) Suma măsurilor unghiurilor marcate pe figură este egală cu .... °, deoarece unghiurile ....

c) Măsura fiecărui unghi din figură este egală cu ....

....

5. Calculați măsurile unghiurilor formate de două drepte concurente, știind că diferența măsurilor a două dintre ele este de 30°.

....

....

6. Se consideră patru drepte concurente într-un punct O. Patru dintre cele opt unghiuri care nu au puncte interioare comune au măsurile de $x°$, $x° - 10°$, $x° + 10°$, $3x°$.

a) Realizați un desen care să ilustreze situația.

b) Calculați măsurile unghiurilor.

c) Verificați dacă în jurul punctului O există unghiuri drepte. Numiți-le!

....

....

7. Calculați ce unghi descrie:

a) minutarul (limba mare) unui ceas în 20 de minute;

b) orarul (limba mică) unui ceas într-o oră.

....

....

....

8. În jurul unui punct O se consideră patru unghiuri care nu au puncte interioare comune, cu măsurile de $2x° + 20°$, $3x° - 20°$, $4x° - 10°$, $3x° + 10°$.

a) Calculați măsurile unghiurilor.

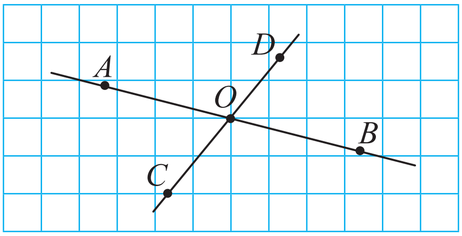
b) Realizați un desen care să ilustreze datele problemei.

c) În jurul punctului O există unghiuri obtuze? Numiți-le!

....

....

9. Analizați figura alăturată.



a) Unghiurile formate în jurul punctului O sunt: ....

....

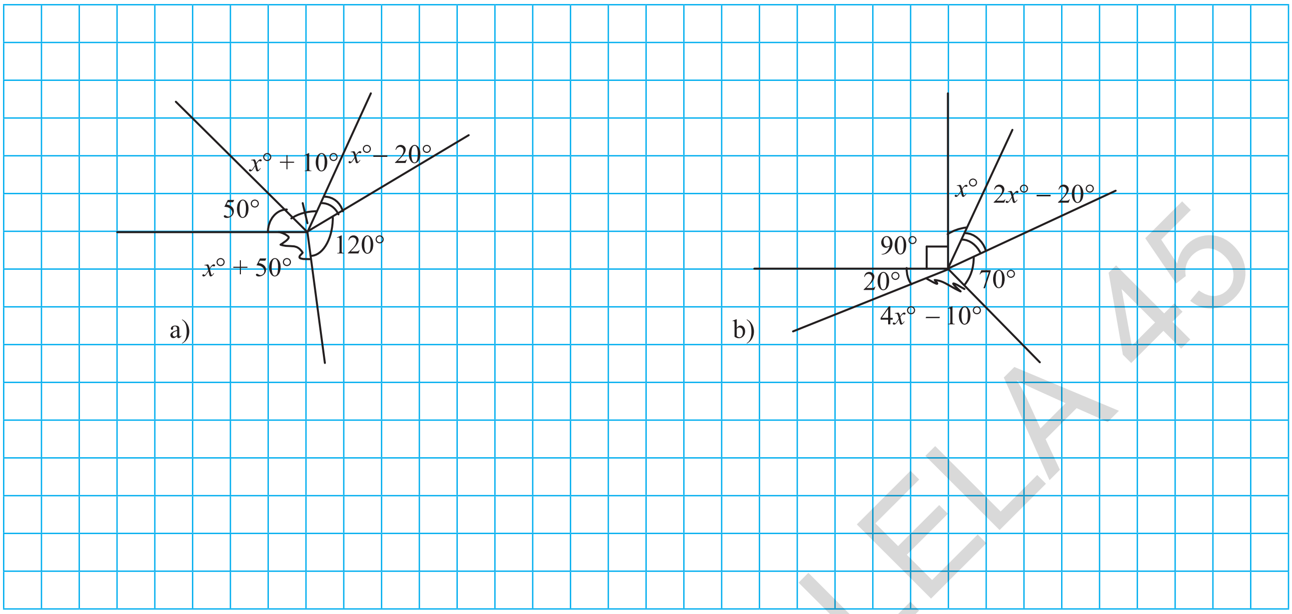
b) Unghiurile opuse la vârf din figura alăturată sunt: ....

....

c) Dacă măsura unghiului AOC este egală cu 50°, atunci măsurile celorlalte unghiuri din figură sunt egale cu: ....

....

10. Studiați cu atenție figurile de mai jos și calculați măsurile unghiurilor necunoscute.



V.3 Unghiuri suplementare. Unghiuri complementare

1. a) Două unghiuri se numesc **unghiuri suplementare** dacă ....

b) Fiecare dintre cele două unghiuri este .... celuilalt unghi.

c) Dacă două unghiuri suplementare sunt congruente, atunci fiecare are măsura egală cu .... , adică fiecare unghi este ....

d) Unghiurile care au același suplement sunt ....

e) Unghiurile congruente au suplementele ....

f) Suplementul unui unghi cu măsura de $x°$ este unghiul cu măsura de ....

2. a) Suplementul unghiului cu măsura de 60° este unghiul cu măsura de ....

b) Suplementul unghiului cu măsura de 130° este unghiul cu măsura de ....

c) Suplementul unghiului cu măsura de 70°37′ este unghiul cu măsura de ....

3. a) Două unghiuri se numesc **unghiuri complementare** dacă ....

b) Fiecare dintre cele două unghiuri este .... celuilalt unghi.

c) Dacă două unghiuri complementare sunt congruente, atunci fiecare are măsura egală cu ....
....

d) Unghiurile care au același complement sunt ....

e) Unghiurile congruente au complementele ....

f) Complementul unui unghi cu măsura de $x°$ este unghiul cu măsura de ....

4. a) Complementul unghiului cu măsura de 60° este unghiul cu măsura de ....

b) Complementul unghiului cu măsura de 17°45′ este unghiul cu măsura de ....

5. Calculați măsurile suplementelor unghiurilor cu măsura egală cu:
a) 74°; b) 117°; c) 54°29′; d) 128°57′.

....

....

6. Calculați măsurile complementelor unghiurilor cu măsura egală cu:
a) 29°; b) 67°; c) 35°14′; d) 76°47′.

....

....

7. Calculați suma măsurilor suplementului și complementului unghiului cu măsura de:
a) 47°; b) 59°31′.

....

....

8. a) Raportul măsurilor a două unghiuri complementare este $\frac{1}{5}$. Aflați măsurile celor două unghiuri.

b) Raportul măsurilor a două unghiuri suplementare este $\frac{1}{3}$. Aflați măsurile celor două unghiuri.

Soluție: a) Fie x măsura unghiului. Măsura complementului este .... și $\frac{x}{90° - x} = \frac{1}{5} \Rightarrow$ ....
...., adică măsura unghiului este egală cu ....° și măsura complementului este egală cu ....°.

b) ....

....

....

9. Calculați măsura unui unghi, știind că:
a) este o pătrime din complementul său;
b) este o treime din suplementul său;
c) este dublul complementului său;
d) este triplul suplementului său.

Soluţie: a) Fie x măsura unghiului. Măsura complementului este $4x$. Unghiurile sunt complementare, adică $x + 4x = 90° \Rightarrow$ .... Deci, măsura unghiului este de ....° și măsura complementului este de ....°.

....

....

....

....

....

....

....

10. a) Măsura unui unghi este cu 20° mai mare decât măsura complementului său. Aflați măsurile celor două unghiuri.

b) Măsura unui unghi este cu 40° mai mare decât măsura suplementului său. Aflați măsurile celor două unghiuri.

Soluţie: a) Fie x măsura unghiului. Măsura complementului său este $x - 20°$. Unghiurile sunt complementare, adică $x + x - 20° = 90° \Rightarrow$ .... Deci, măsura unghiului este de ....° și măsura complementului este de ....°.

b) ....

....

....

V.4 Unghiuri adiacente. Bisectoarea unui unghi. Construcția bisectoarei unui unghi

1. Completați propozițiile:

a) Două unghiuri se numesc **unghiuri adiacente** dacă au ....

....

b) Condiția „celelalte două laturi situate de o parte și de alta a laturii comune” poate fi înlocuită cu „...”.

c) Unghiurile improprii, adică unghiul nul și unghiul alungit, ... cu nici un alt unghi.

d) Dacă suma măsurilor a două unghiuri adiacente este egală cu 180°, atunci cele două unghiuri se numesc ....

TESTUL I

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timpul efectiv de lucru este de 50 de minute.
Se acordă 1 punct din oficiu.

I. Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate.

0,5p **1.** Elementele mulțimii $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leq 2x - 3 < 9\}$ sunt ....

0,5p **2.** Dacă un număr este divizibil cu două numere prime, atunci el este divizibil ....

0,5p **3.** Dacă $a - b = 7$ și $c = 3$, atunci $ac - bc$ este egal cu ....

0,5p **4.** Rezultatul calculului $3^2 - 2^3 + 2019^0 - 1^{2019}$ este egal cu ....

II. Dacă apreciați că afirmația este adevărată, încercuiți litera A. În caz contrar, încercuiți litera F.

0,5p **A / F 5.** Cel mai mare divizor comun al numerelor 60 și 126 este 60.

0,5p **A / F 6.** Cel mai mic multiplu comun al numerelor 60 și 126 este 1260.

0,5p **A / F 7.** Numărul $x = 2^{n+1} \cdot 3^n + 2^n \cdot 3^{n+1}$ este divizibil cu 5 oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

0,5p **A / F 8.** Dacă suma dintre un număr prim și unul impar este 71, atunci numărul prim este 69.

III. Încercuiți răspunsul corect. Numai una din cele patru variante de răspuns este corectă.

0,5p **9.** Numărul divizorilor numărului natural 1080 este egal cu:
A. 8; B. 16; C. 32; D. 27.

0,5p **10.** Cel mai mic număr natural care are exact 3 divizori este egal cu:
A. 6; B. 8; C. 2; D. 4.

0,5p **11.** Perechea de numere prime între ele este:
A. 4 și 9; B. 7 și 14; C. 12 și 32; D. 5 și 125.

0,5p **12.** Pentru a scrie toate numerele naturale mai mici ca 1000, se folosește cifra 7 de ...... ori:
A. 290; B. 280; C. 294; D. 300.

IV. Scrieți rezolvările complete.

13. Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid 2x - 1 < 5\}$ și $B = \{2, 3, 5\}$.

0,5p a) Scrieți elementele mulțimii A.

0,5p b) Scrieți submulțimile mulțimii B.

0,5p c) Calculați $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ și $B \setminus A$.

....

....

....

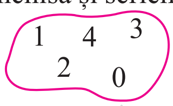
....

SOLUȚII

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I. MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

1.1. Mulțimi

1. a) o colecție de obiecte; elementele mulțimii; b) litere mari ale alfabetului; c) litere mici; d) mulțimea vidă; $\varnothing$. **2.** a) $x \in A$ și citim x aparține mulțimii A; b) elementele ei sunt numere. **3.** a) enumerarea elementelor; b) printr-o proprietate caracteristică; c) mulțimea este ilustrată desenând o curbă închisă și scriem în interiorul ei elementele corespunzătoare. **4.** a) $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$; b) $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\}$; c) 

5. a) are un număr finit de elemente. $\mathcal{D}_6 = \{1, 2, 3, 6\}$; b) are un număr infinit de elemente. $\mathcal{M}_6 = \{6 \cdot 0 = 0, 6 \cdot 1 = 6, 6 \cdot 2 = 12, ..., 6 \cdot n = 6n, ...\}$. **6.** card A; card $\mathcal{D}_6 = 4$.**7.** a) au aceleași elemente; $A = B$. Mulțimea A este diferită de mulțimea B și notăm $A \neq B$; b) egale, $A = B$; c) diferite, $M \neq N$, card M = card $N = 3$. **8.** a) orice element al mulțimii A este element al mulțimii B; A este inclus în B; b) A nu este o submulțime a lui B și notăm $A \nsubseteq B$. **9.** a) a oricărei mulțimi și $\varnothing \subset A$; b) $A \subseteq A$ oricare ar fi mulțimea A; c) submulțimi improprii; restul sunt submulțimi proprii. **10.** a) mulțimea formată din elementele care aparțin cel puțin uneia dintre mulțimile date; $A \cup B = \{x \mid x \in A$ sau $x \in B\}$; b) $A \cup B = \{1, 3, 5, 7\}$. **11.** a) mulțimea formată din elementele comune celor două mulțimi, adică $A \cap B = \{x \mid x \in A$ și $x \in B\}$; b) $A \cap B = \{3, 5\}$; c) mulțimi disjuncte, ele nu au elemente comune. **12.** a) mulțimea formată din elementele care aparțin mulțimii A și nu aparțin mulțimii B, $A \setminus B = \{x \mid x \in A$ și $x \notin B\}$; b) $A \setminus B = \{2\}$ și $B \setminus A = \{7\}$. **13.** a) o singură dată; b) fig. 4. **14.** a) $\varnothing$; $\{a\}$; $\{b\}$; $\{c\}$; $\{a, b\}$; $\{a, c\}$; $\{b, c\}$ și $\{a, b, c\}$; b) $2^{\text{card } A}$, unde card A este numărul de elemente ale mulțimii A. **15.** $B = \{0, 1, 4, 9,\}$; $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 9\}$; $A \setminus B = \{2, 3\}$, $A \cap B = \{0, 1\}$. **16.** a) elementelor; egale; aceleași elemente; b) $C = \{e, l, m, n, t\}$; c) finită; infinită. **17.** a) $M = \{1, 2, 3\}$; b) $\varnothing$ și $M = \{1, 2, 3\}$; c) $\{1\}$; $\{2\}$; $\{3\}$; $\{1, 2\}$; $\{1, 3\}$; $\{2, 3\}$. **18.** $a = 4$. **19.** a) (x, y) poate fi $\{1, 4\}$ sau $\{3, 4\}$; b) (x, y) poate fi $\{2, 5\}$; $\{2, 6\}$; $\{5, 2\}$; $\{6, 2\}$. **20.** a) 0, 1, 2, 3, 4; b) apartenență și $a \in M$; c) relația de incluziune, notăm $A \subseteq B$ și spunem că A este o submulțime a lui B. **21.** a) 23, 46, 69, 92; b) $\{23, 46\}$; $\{23, 69\}$; $\{23, 92\}$; $\{46, 69\}$; $\{46, 92\}$; $\{69, 92\}$; c) $\{23, 46, 69\}$; $\{23, 46, 92\}$; $\{23, 69, 92\}$; $\{46, 69, 92\}$. **22.** a) sau; b) și; c) și; d) și. **23.** F; F; A; F; A; A. **24.** a) $A = B$; b) $A = B$. **25.** a) 24; b) 10 deoarece $48 = 2^4 \cdot 3$ și numărul divizorilor este $(4 + 1) \cdot (1 + 1) = 10$; c) 24; d) 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88, 96. **26.** $A \cup B = \{0, 1, 2, 4, 5, 6\}$; $A \cap B = \{0, 2\}$; $A \setminus B = \{1, 4\}$; $B \setminus A = \{5, 6\}$. **27.** $M = \{1, 2, 3, 4\}$ și $N = \{2, 3, 4, 5\}$. **28.** De exemplu: a) $A = \{1, 2\}$ și $B = \{2, 3\}$; b) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ și $B = \{1, 2, 3, 5\}$; c) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ și $B = \{4\}$. **29.** $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{0, 1, 2, 3\}$; $A \cap B = \{1, 2, 3\}$; $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; $A \setminus B = \{4, 5\}$; $B \setminus A = \{0\}$. **30.** a) $A = \{0, 2, 6, 12, 20, 30\}$; $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$; $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 20, 30\}$; $A \cap B = \varnothing$, $A \setminus B = A$, $B \setminus A = B$; b) elementele mulțimii A sunt numere de forma $n \cdot (n + 1)$, adică produs de două numere consecutive care este totdeauna par, iar elementele mulțimii B sunt de forma $2n + 1$, adică totdeauna numere impare. **31.** a) $A = \{1, 12\}$; b) $B = \{2, 3, 4, 6\}$; c) $A \cap B = \varnothing$, A și B sunt mulțimi disjuncte.

1.2. Descompunerea numerelor naturale în produs de numere prime. Determinarea celui mai mare divizor comun și a celui mai mic multiplu comun. Proprietăți ale divizibilității în mulțimea nmerelor naturale

1. a) are exact doi divizori: pe 1 și pe el însuși; b) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47; c) dacă mai are și alți divizori în afară de 1 și de el însuși; dacă are și divizori proprii. **2.** a) scrierea numărului ca un produs de numere prime ; b) $15600 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 13$; $5775 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$. **3.** a) $12 = 5 + 7$; $26 = 7 + 19$; $34 = 3 + 31$; b) 2 și 97; c) 2 și 2433. **4.** $a = 2$, $b = 3$, $c = 7$ sau $a = 2$, $b = 7$, $c = 5$ sau $a = 2$, $b = 11$, $c = 3$. **5.** (a, b) pot fi: (1, 1); (1, 3); (1, 7); (3, 7); (7, 9); (3, 1); (7, 1); (7, 3); (9, 7). **6.** (a, b) poate fi: (2, 9); (9, 2); (3, 8); (8, 3); (4, 7); (7, 4); (5, 6); (6, 5). **7.** $\overline{abcabc} = 1001 \cdot \overline{abc} = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \overline{abc}$ are 16 divizori. **8.** a) $11^2 = 121$ și

Cuprins

ALGEBRĂ

GEOMETRIE