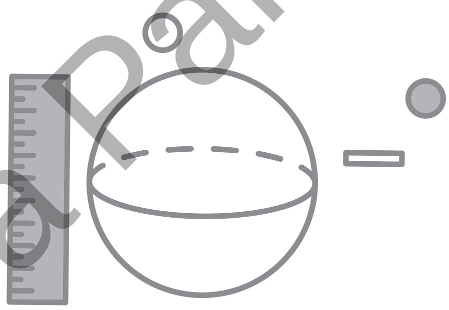

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.N. nr. 3022/08.01.2018.
Lucrarea este elaborată conform programei școlare în vigoare pentru bacalaureat.

Director de producție editorială: Ionuț Burcioiu

Redactare: Roxana Pietreanu
Tehnoredactare: Mioara Benza, Carmen Rădulescu
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
Bacalaureat 2026 : Matematică : M_științele naturii, M_tehnologic : teme recapitulative, 40 de teste după modelul M.E. (10 teste fără soluții) /
Mihai Monea, Steluța Monea, Ioan Șerdean, Adrian Zanoschi. –
Pitești : Paralela 45, 2025
ISBN 978-973-47-4327-8

I. Monea, Mihai
II. Monea, Steluța
III. Șerdean, Ioan
IV. Zanoschi, Adrian

51

COMENZI – CARTEA PRIN POȘTĂ

EDITURA PARALELA 45
Bulevardul Republicii, nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești,
jud. Argeș, cod 110177
Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918
Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492
E-mail: **comenzi@edituraparalela45.ro**
sau accesați **www.edituraparalela45.ro**

Tiparul executat la tipografia *Editurii Paralela 45*
E-mail: tipografie@edituraparalela45.ro

Mihai Monea
Steluța Monea
Ioan Șerdean
Adrian Zanoschi

Bacalaureat 2026

MATEMATICĂ

M_științele naturii
M_tehnologic

_Teme recapitulative
_40 de teste, după modelul M.E.
(10 teste fără soluții)

Editura Paralela 45

Teme recapitulative

Clasa a IX-a

1. Mulțimi și elemente de logică matematică

1.1. Noțiuni teoretice

1.1.1. Tipuri speciale de raționament

Metoda reducerii la absurd: Pentru a demonstra o implicație de tipul: *Dacă p (ipoteza) atunci q (concluzia)*, putem presupune concluzia p ca fiind falsă și apoi împreună cu ipoteza p construim un raționament care conduce la contradicție.
Metoda inducției matematice: Se aplică pentru propoziții de forma: *Demonstrați că, oricare ar fi* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, *are loc* $p(n)$, unde $p(n)$ reprezintă un enunț care depinde de variabila n. Se verifică valoarea de adevăr a propoziției obținute în cazul $n = n_0$, se presupune ca fiind adevărată propoziția obținută în cazul $n = k$ și se demonstrează valoarea de adevăr a propoziției obținute pentru $n = k + 1$.

1.1.2. Mulțimi și cardinale

Teoremă: Orice mulțime A cu n elemente, unde $n \in \mathbb{N}$, admite 2^n submulțimi.

Definiție: Pentru o mulțime finită A, numim **cardinalul** său și notăm Card (A) ca fiind numărul său de elemente.
Proprietăți: Sunt adevărate următoarele proprietăți:
P1. Card $(A \cup B)$ = Card (A) + Card (B) – Card $(A \cap B)$;
P2. Card $(A \times B)$ = Card $(A) \cdot$ Card (B).

1.1.3. Mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$

Definiție: Numim **modulul** unui număr real x și notăm $|x|$ ca fiind distanța de la originea axelor la poziția numărului pe axă.

Proprietățile modulului:

P1. $|x| \geq 0,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$; **P2.** $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; **P3.** $|x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y$;

P4. $|x| < c,\ c > 0 \Leftrightarrow x \in (-c;\ c)$; **P5.** $|x| > c,\ c > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;\ -c) \cup (c;\ \infty)$;

P6. $|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$; **P7.** $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|,\ \forall\ x, y \in \mathbb{R}$;

P8. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|},\ \forall\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}^*$; **P9.** $\big||x| - |y|\big| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|,\ \forall\ x,\ y \in \mathbb{R}$.

Definiție: Numim **parte întreagă** a numărului real x și notăm $[x]$ ca fiind cel mai mare număr întreg, mai mic sau egal cu x.

Proprietățile părții întregi: Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, au loc proprietățile:

P1. $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$; **P2.** $[x] = k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in [k,\ k+1)$.

Definiție: Numim **parte fracționară** a numărului real x și notăm $\{x\}$ ca fiind diferența dintre număr și partea sa întreagă.

Proprietățile părții fracționare: Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, au loc proprietățile:

P1. $\{x\} = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$; **P2.** $\{x\} \in [0,1)$.

1.2. Probleme de inițiere

I1. Determinați numărul de submulțimi ale mulțimii $A = \{a, b, c\}$.

I2. Determinați numărul de submulțimi nevide ale mulțimii $A = \{a, b, c, d\}$.

I3. Reuniunea a două mulțimi, cu câte 20 de elemente fiecare, are 31 de elemente. Determinați numărul de elemente comune ale celor două mulțimi.

I4. Demonstrați că $\left(\sqrt{3}+1\right)^2 + \left(\sqrt{3}-1\right)^2 \in \mathbb{N}$.

I5. Arătați că numărul $a = (-5) \cdot \left[0,(4) + 0,1(5)\right]$ este întreg.

I6. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ dacă avem egalitatea de intervale $[a - b;\ a + b] = [1;\ 7]$.

I7. Fie $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Determinați cardinalul mulțimii:
$B = \{x = (a-1)(a-2)(a-3) + 4 \mid a \in A\}$.

I8. Determinați intersecția mulțimilor $A = (1, 5)$ și $B = [3, 11]$.

I9. Determinați partea întreagă a numărului $b = 2,13 + 1,88$.

I10. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $|x - 2| = 5$.

1.3. Probleme de consolidare

C1. Fie mulțimea $A = \{a, b, c, d\}$. Determinați numărul de submulțimi ale lui A care îl conțin pe d.

C18. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $|1-2x| = |x+4|$.

C19. Demonstrați că $\left|2-\sqrt{5}\right|+\left|3-\sqrt{5}\right|$ este număr natural.

C20. Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația $|3x-2|=11$.

C21*. Calculați $\left[\frac{17}{5}\right]+\left\{\frac{11}{6}\right\}$, unde $[x]$ și $\{x\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real x.

C22*. Determinați partea întreagă a numărului $a=\sqrt{17}$.

C23*. Determinați partea fracționară a numărului $b=\sqrt{25}+\sqrt{26}$.

C24*. Se consideră numărul $A = \sqrt{(\sqrt{2}-3)^2}+\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$. Demonstrați că $A \in \mathbb{N}$.

C25*. Arătați că $A = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$ este număr natural.

C26*. Demonstrați că $\left[\sqrt{3}+\sqrt{25}\right]=\left[\sqrt{4}+\sqrt{19}\right]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

C27*. Demonstrați că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, are loc egalitatea:

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

C28*. Demonstrați că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, avem:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}.$$

C29*. Demonstrați că numărul $\sqrt{5}+\sqrt{7}$ este irațional.

C30*. Arătați că, pentru orice număr natural nenul n, fracția $\frac{2n-1}{2n+1}$ este ireductibilă.

1.4. TESTE DE VERIFICARE

Testul 1

1. Determinați elementele mulțimii $A \cap B$ dacă $A = (2003, 2015)$ și $B = (2014, 2016)$.

2. Calculați suma $|-3|+|-5|\cdot 2$.

3. Demonstrați că $\sqrt{4}+\sqrt{36}=\sqrt{64}$.

4. Câte submulțimi ale mulțimii $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ conțin doar numere impare?

5. Ordonați crescător numerele $a = \sqrt{4} - 4$, $b = \sqrt{9} - 9$ și $c = \sqrt{16} - 16$.

6. Demonstrați că numărul $A = \left(2+\sqrt{5}\right)^2 + \left(2-\sqrt{5}\right)^2$ este natural.

Testul 2*

1. Determinați cel mai mic număr întreg al mulțimii $A \cap B$, dacă $A = (2010, 2016)$ și $B = (2013, 2020)$.

2. Determinați partea întreagă a numărului $x = \sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{32}$.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\left|\left|2x-1\right|-3\right| = 5$.

4. Comparați numerele $a = 5\sqrt{3}$ și $b = 3\sqrt{7}$.

5. Fie numărul rațional $\frac{5}{4} = \overline{1,a_1a_2a_3...a_n...}$. Calculați suma $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{2014}$.

6. Demonstrați prin inducție matematică că egalitatea $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Testul 3

1. Rezultatul calculului următor $1,2^2 - 1,1 \cdot 1,3$ este:

A. 0,1; **B.** –0,1; **C.** 0,01; **D.** –0,01.

2. Partea întreagă a numărului $x = -\sqrt{13}$ este egală cu:

A. –3; **B.** –4; **C.** 3; **D.** 4.

3. Fie $A = (5; 11)$ și $B = [7; 12]$. Cel mai mare număr al mulțimii $A \cap B$ este:

A. 9; **B.** 12; **C.** 11; **D.** 10.

4. Numărul de elemente al mulțimii $A = \left\{x \in \mathbb{N} \,\middle|\, x = -\frac{3}{2n-1},\, n \in \mathbb{Z}\right\}$ este:

A. 2; **B.** 4; **C.** 0; **D.** 1.

5. Valoarea numărului natural a din relația $0,5 + 0,(3) + 1,1(6) = \frac{a}{2020}$ este:

A. 2020; **B.** 2; **C.** 1010; **D.** 4040.

6. Soluția ecuației $|2x - 1| = 7$ este inclusă în intervalul:

A. $(-4; 4)$; **B.** $(-3; 5)$; **C.** $(-4; 5)$; **D.** $(-3; 4)$.

6. Vectori în plan

6.1. NOȚIUNI TEORETICE

6.1.1. Generalități

Vectorul $\overline{AB}$ este caracterizat de $\begin{cases} \bullet \text{ direcția dreptei } AB \\ \bullet \text{ sensul de la } A \text{ la } B \\ \bullet \text{ modulul egal cu lungimea segmentului } [AB] \end{cases}$.

Doi vectori $\vec{u}$ și $\vec{v}$ au aceeași direcție dacă dreptele suport sunt paralele sau suprapuse. Spunem că vectorii sunt **coliniari** și notăm $\vec{u} \| \vec{v}$.

Doi vectori $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt **egali** dacă au aceeași direcție, același sens și același modul. Notăm $\vec{u} = \vec{v}$.

6.1.2. Adunarea vectorilor

Regula paralelogramului: Dacă $ABCD$ este paralelogram, atunci $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.
Regula triunghiului: Pentru orice puncte $A, B, C,$ avem $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
Proprietăți: Adunarea vectorilor este asociativă, comutativă, are element neutru vectorul nul $\vec{0}$ și simetrizabilă. Simetricul vectorului $\vec{u}$ se notează $-\vec{u}$ și se numește **vectorul opus**. În particular, $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.
Scăderea vectorilor: Avem $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + \left(-\vec{v}\right)$.

6.1.3. Înmulțirea vectorilor cu scalar

Definiție: Fiind dat numărul real α și vectorul $\vec{u}$, vectorul $\alpha\vec{u}$ are aceeași direcție cu $\vec{u}$, același sens dacă $\alpha > 0,$ respectiv sens opus dacă $\alpha < 0$ și modulul egal cu $|\alpha||\vec{u}|$.
Proprietăți: Înmulțirea vectorilor cu scalar este distributivă în raport cu adunarea vectorilor.
Teoremă: Vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt coliniari dacă și numai dacă există $\alpha \in \mathbb{R},$ astfel încât $\vec{u} = \alpha\vec{v}$.

6.1.4. Relații vectoriale fundamentale

V1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow ABDC$ este paralelogram.

V2. Punctul M este mijlocul segmentului $[AB]$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{PM} = \dfrac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}}{2}$, pentru orice punct P din planul triunghiului.

V3. Punctul $N \in [AB]$ pentru care $\frac{NA}{NB} = k \Leftrightarrow \overrightarrow{PN} = \frac{\overrightarrow{PA} + k\overrightarrow{PB}}{1+k}$, pentru orice punct P din planul triunghiului.

V4. Punctul G este centrul de greutate al triunghiului $ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{PG} = \frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}}{3}$, pentru orice P din planul triunghiului.

6.2. Probleme de inițiere

I1. Fie M mijlocul segmentului AB. Determinați valoarea numărului real x, pentru care $\overrightarrow{MA} + x\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$.

I2. Fie $ABCD$ un dreptunghi. Determinați modulul vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.

I3. Fie $ABCD$ un pătrat de latură 2. Determinați modulul vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

I4. Într-un plan se consideră punctele A, B, C și D. Demonstrați că:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}.$$

I5. Fie $ABCD$ un paralelogram. Demonstrați că $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$.

I6. Fie O intersecția diagonalelor paralelogramului $ABCD$. Demonstrați că:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}.$$

I7. Fie $ABCD$ un paralelogram și $x, y \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{CD} = \vec{0}$. Demonstrați că $x = y$.

I8. Fie $ABCD$ un dreptunghi în care $AB = 6$ și $AD = 8$. Determinați modulul vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

I9. Fie $ABCD$ un paralelogram. Determinați $x \in \mathbb{R}$, dacă $\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$.

I10. Fie dreptunghiul $ABCD$ și $M, N \in (AB)$, astfel încât $AM = MN = NB$. Determinați $x \in \mathbb{R}$, pentru care $\overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{CD}$.

6.3. Probleme de consolidare

C1. Într-un plan se consideră punctele M, N și P. Determinați modulul vectorului $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PM}$.

C2. Fie M, N, P mijloacele laturilor AB, BC și, respectiv, CA ale triunghiului ABC. Demonstrați că $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$.

C3. Fie M, N, P mijloacele laturilor AB, BC și, respectiv, CA ale triunghiului ABC. Demonstrați că $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{NP} = \vec{0}$.

C4. Fie M mijlocul laturii BC a triunghiului ABC. Determinați valoarea numărului x pentru care $\overrightarrow{GA} + x\overrightarrow{GM} = \vec{0}$, unde G este centrul de greutate al triunghiului.

C21*. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat. Demonstrați că $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\vec{0}$.

C22*. Fie $ABCD$ un paralelogram, iar O intersecția diagonalelor. Fie M și N mijloacele laturilor AB și, respectiv, CD. Arătați că $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\vec{0}$.

C23*. Fie hexagonul regulat $ABCDEF$ de centru O. Atunci:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\vec{0}.$$

C24*. Fie $ABCD$ un pătrat de latură 5. Determinați modulul vectorului $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$.

C25*. Fie triunghiul ABC, M mijlocul laturii BC, N mijlocul medianei AM, iar P un punct pe latura AC, astfel încât $PC = 2PA$. Demonstrați că punctele B, N și P sunt coliniare.

C26*. Fie $ABCD$ un romb cu $m(\sphericalangle A) = 60°$. Demonstrați că vectorii $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$ și $\overrightarrow{CD}$ au același modul.

C27*. Fie ABC un triunghi, M mijlocul laturii BC și P mijlocul laturii AC. Demonstrați că vectorii $\vec{u}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$ și $\vec{v}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MP}$ sunt coliniari.

C28*. Considerăm patrulaterul $MNPQ$ și S mijlocul laturii MN, iar T mijlocul laturii PQ. Demonstrați că $\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{NP}=2\overrightarrow{ST}$.

C29*. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat. Demonstrați că $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{ED}$.

C30*. Considerăm un pătrat $ABCD$ de centru O și latură $AB=6$. Calculați modulul vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AD}$.

6.4. Teste de verificare

Testul 1

1. Fie $ABCD$ un paralelogram și M mijlocul lui AB, iar N mijlocul lui CD. Demonstrați că $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CN}=\vec{0}$.

2. Fie M mijlocul segmentului $[AB]$ și punctul P mijlocul segmentului $[AM]$. Demonstrați că $\overrightarrow{PA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PB}=\vec{0}$.

3. Fie ABC un triunghi echilateral de latură $AB=6$. Fie M mijlocul laturii $[BC]$. Calculați modulul segmentului $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$.

4. În patrulaterul $ABCD$ notăm cu M, N, P și Q mijloacele laturilor AB, BC, CD și, respectiv, DA. Demonstrați că $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{DQ}=\vec{0}$.

5. În paralelogramul $ABCD$, vectorii $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}$ și $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}$ au module egale. Demonstrați că $ABCD$ este dreptunghi.

6. În plan considerăm punctele M, N, P, Q astfel încât $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{MQ}$. Demonstrați că punctele N și P coincid.

Clasa a X-a

1. Numere reale

1.1. Noțiuni teoretice

1.1.1. Radicali

Definiție: Numim **radical** de ordin $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, din numărul pozitiv a și notăm $\sqrt[n]{a}$ ca fiind acel număr pozitiv x unic cu proprietatea $x^n = a$.

Observație: Dacă $x \in \mathbb{N}$, atunci, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, dacă $\sqrt[n]{x} \notin \mathbb{N}$, atunci $\sqrt[n]{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Proprietățile radicalului: Următoarele relații sunt adevărate pentru orice a, $b \geq 0$ și $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq 2$.

P1. $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}$;

P2. $\dfrac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\dfrac{a}{b}}$, $b \neq 0$;

P3. $\sqrt[mn]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^p}$;

P4. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

Observație: Dacă n este impar, putem calcula $\sqrt[n]{x}$ și dacă $x < 0$. În aceste condiții $\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$.

Observație: Avem $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$, dar $\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} x, & n \text{ este impar} \\ |x|, & n \text{ este par} \end{cases}$.

1.1.2. Puteri cu exponent real

Observație: Noțiunea de ridicare la putere se poate generaliza astfel:

$x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$, $x \neq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$; $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$, $x \geq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$; $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$, $x \geq 0$, $m, n \in \mathbb{N}^*$.

Proprietățile ridicării la putere: Pentru orice $x, y > 0$ și orice p, $r \in \mathbb{R}$, au loc relațiile:

P1. $x^p x^q = x^{p+q}$;

P2. $\dfrac{x^p}{x^q} = x^{p-q}$;

P3. $\left(x^p\right)^q = x^{pq}$;

P4. $(xy)^p = x^p y^p$.

1.1.3. Logaritmi

Definiție. Fie $a, b > 0,\ a \neq 1$. Soluția (unică) a ecuației $a^x = b$ se numește **logaritm în baza *a* din *b*** și se notează cu $\log_a b$.

Proprietățile logaritmului: Logaritmul are următoarele proprietăți valabile pentru orice $a,\ b,\ x,\ y > 0,\ a,\ b \neq 1$:

P1. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$;

P2. $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$;

P3. $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x,\ \alpha \in \mathbb{R}$;

P4. $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$.

Observație: Dacă $a,\ b \in \mathbb{N}$ sunt numere prime diferite, atunci $\log_a b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

1.2. Probleme de inițiere

I1. Calculați $(-1)^5 + (-2)^4 + (-3)^3 + (-4)^2 + (-5)$.

I2. Calculați $(-1)^1 + (-1)^2 + \ldots + (-1)^{100}$.

I3. Calculați $8^{\frac{1}{3}} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}$.

I4. Calculați $\sqrt[3]{125} + \sqrt{16} + \sqrt[3]{-27}$.

I5. Calculați $\log_{11} 11 + \log_7 \dfrac{1}{7}$.

I6. Calculați $\log_3 81 + \log_5 25 - \lg 100000$.

I7. Ordonați crescător numerele $a = -\sqrt[3]{27}$, $b = \log_2 \dfrac{1}{16}$, $c = -2$.

I8. Demonstrați că $\log_4 64 + \sqrt[3]{1000} = \sqrt{16} + \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$.

I9. Demonstrați că $\log_{11} 121 < \sqrt[3]{27}$.

I10. Dacă $\log_2 3 = a$, demonstrați că $\log_2 6 = 1 + a$.

1.3. Probleme de consolidare

C1. Calculați $\sqrt{18} - \sqrt{32} - \sqrt{50} + \sqrt{72}$.

C2. Arătați că $2\sqrt{14} - \sqrt{\dfrac{7}{2}} - 5\sqrt{\dfrac{8}{7}} = \dfrac{1}{\sqrt{14}}$.

C3. Demonstrați că $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{250}$.

C4. Demonstrați egalitatea $\sqrt[3]{\sqrt{729}}-\sqrt{\sqrt[3]{64}}=1$.

C5. Dacă lg 3 = a, demonstrați că lg 90 = $2a + 1$.

C6. Demonstrați că $\log_2 12 + \log_2 14 - \log_2 21 = 3$.

C7. Arătați că numărul $a=\log_4 16+\log_3 9+\sqrt[3]{27}$ este natural.

C8. Demonstrați că $\lg\frac{2}{1}+\lg\frac{3}{2}+...+\lg\frac{10}{9}\in\mathbb{N}$.

C9. Demonstrați că $1331^{\frac{2}{3}}\in\mathbb{N}$.

C10. Comparați numerele $a = 2^{33}$ și $b = 3^{22}$.

C11. Comparați numerele $3\sqrt{2008}$ și $2008\sqrt{3}$.

C12. Calculați $b - a$, unde $a = \log_2 3$ și $b = \log_2 6$.

C13. Calculați lg 12 + lg 15 – lg 18.

C14. Demonstrați că $\log_4 9 = \log_8 27$.

C15. Demonstrați că $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 8 = 3$.

C16. Demonstrați că numărul $a=\log_9\sqrt{3}+\log_4\sqrt[3]{2}$ este rațional.

C17. Demonstrați că numărul $\log_2(5+\sqrt{7})+\log_2(5-\sqrt{7})-2\log_2 3$ este întreg.

C18. Demonstrați că $\log_{2\sqrt{2}}3\sqrt{3}=\log_2 3$.

C19. Comparați numerele $\log_5 2007$ și 4.

C20. Demonstrați că $\log_8 512+\sqrt[3]{512}>\sqrt{121}-\log_{11}121$.

C21*. Se consideră numerele $a=\sqrt{2-\sqrt{2}}$ și $b=\sqrt{2+\sqrt{2}}$. Arătați că $\frac{b}{a}-\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$.

C22*. Determinați $a, b\in\mathbb{Q}$, știind că $(1+\sqrt{2})^2=a+b\sqrt{2}$.

C23*. Arătați că $\frac{3}{2}<\log_2 3<2$.

C24*. Demonstrați că $\sqrt{3}+\sqrt{9}<\sqrt{5}+\sqrt{7}$.

C25*. Demonstrați că $\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$.

C26*. Demonstrați că $2\in(\log_3 4, \sqrt{5})$.

C27*. Demonstrați că $\log_3 5\cdot\log_5 9<\sqrt[3]{9}$.

C28*. Demonstrați că $100^{\lg 2}+\sqrt[3]{-27}>0$.

C29*. Dacă $\log_3 2 = a$, demonstrați că $\log_{12}18=\frac{a+2}{2a+1}$.

C30*. Demonstrați că $\log_3 7 > \log_7 3$.

1.4. TESTE DE VERIFICARE

Testul 1

1. Demonstrați că $\sqrt{49}+\sqrt[3]{-1000}+\left(\sqrt{3}\right)^2=0$.

2. Demonstrați că numărul $a=\dfrac{\sqrt{50}+\sqrt{18}}{\sqrt{32}-\sqrt{8}}$ este natural.

3. Demonstrați că $\lg 20+\lg 50=3$.

4. Demonstrați că $\log_3 5+\log_3 7<\log_3 72-\log_3 2$.

5. Ordonați crescător numerele $a=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-3}$, $b=\sqrt[3]{-125}$ și $c=\lg\dfrac{1}{1000}$.

6. Demonstrați că $\log_{\frac{2}{3}}\dfrac{3}{2}=\log_{\frac{3}{2}}\dfrac{2}{3}$.

Testul 2*

1. Demonstrați că $\sqrt[3]{-216}+\sqrt{144}=\log_3 729$.

2. Demonstrați că $\dfrac{1}{\log_3 2}+\dfrac{2}{\log_9 4}-\dfrac{3}{\log_{27} 8}=0$.

3. Demonstrați că numerele $a=10^{\lg 7}$ și $b=\sqrt[3]{343}$ sunt egale.

4. Arătați că numărul $a=\log_{25}100\cdot\log_{16}25-2\log_{16}5$ este rațional.

5. Demonstrați că $\log_{11}3\cdot\log_7 5=\log_7 3\cdot\log_{11}5$.

6. Demonstrați că $\sqrt{10}+\sqrt{12}<7$.

Testul 3

1. Cel mai mic număr natural n care verifică relația $\sqrt[3]{31}<n$ este:

A. 1; **B.** 2; **C.** 3; **D.** 4.

2. Fie $a=\log_3 63-\log_3 7$. Atunci:

A. $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$; **B.** $a\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$; **C.** $a\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$; **D.** $a\in\mathbb{N}$.

3. Valoarea numărului rațional x din egalitatea $2^x=4^{\frac{1}{3}}\cdot 8^{\frac{5}{9}}$ este:

A. $\dfrac{1}{3}$; **B.** $\dfrac{5}{3}$; **C.** $\dfrac{7}{3}$; **D.** $\dfrac{8}{3}$.

4. Dintre numerele $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\log_3 10$ și $\log_4 15$ este mai mare decât 2 numărul:

A. $\sqrt{2}$; **B.** $\sqrt[3]{3}$; **C.** $\log_3 10$; **D.** $\log_4 15$.

7. Probleme de sinteză din materia claselor IX–X

Varianta 1

1. Demonstrați că numărul $A = \log_5\left(9-\sqrt{6}\right)+\log_5\left(9+\sqrt{6}\right)-\log_5 3$ este natural.

2. Fie x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2 - mx + 2 = 0$. Determinați $m \in \mathbb{R}$, știind că $x = 9$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x+1}+5^{x+2}=150$.

4. Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi care are 45 de submulțimi cu două elemente.

5. În sistemul de coordonate xOy considerăm punctele $A(1, 3)$ și $B(5, a)$, $a \in \mathbb{R}$. Determinați a, știind că lungimea segmentului AB este 5.

6. Determinați lungimea laturii BC a triunghiului ABC, știind că $m(\sphericalangle A) = 30°$ și raza cercului circumscris $R = 10$ cm.

Varianta 2

1. Determinați numărul real x, știind că numerele $2x + 1$, $3x - 5$ și $2x - 5$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

2. Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x - 5$. Demonstrați că:

$$\frac{f\left(\sqrt{7}\right)-f\left(\sqrt{5}\right)}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} \in \mathbb{N}.$$

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2+x+2}=3x-1$.

4. După două scumpiri succesive de preț, una cu 10% și una cu 15%, un produs costă 253 de lei. Determinați prețul inițial al produsului.

5. Scrieți ecuația dreptei ce trece prin punctul $A(1,3)$ și este paralelă cu dreapta de ecuație $x + y - 2 = 0$.

6. Determinați raza cercului circumscris unui triunghi dreptunghic cu catetele 6 cm, respectiv 8 cm.

Varianta 3

1. Demonstrați că $\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}+\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \in \mathbb{Z}$.

2. Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$. Calculați $(f \circ f \circ f)(1)$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(x+1)+\lg(4x+1)=1$.

4. Considerăm mulțimea $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Determinați numărul tuturor numerelor pare de două cifre diferite care se pot forma cu elementele mulțimii A.

5. În sistemul de coordonate xOy, considerăm punctele $A(2, 1)$, $B(8, 3)$ și $C(0, 3)$. Determinați coordonatele punctului D, știind că $ABDC$ este paralelogram.

Clasa a XI-a

1. Matrice

1.1. Noțiuni teoretice

1.1.1. Generalități

Forma generală: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, unde $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ se numesc **coeficienți**.

Notăm cu $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ mulțimea matricelor cu m linii și n coloane și coeficienți în mulțimea K.

Dacă $m = n$, matricele se numesc **pătratice** și avem $\mathcal{M}_{n\times n}(K) \overset{\text{not}}{=} \mathcal{M}_n(K)$.

Cazuri particulare: $O_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ – **matricea nulă**, $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ – **matricea unitate**.

Fiind dată matricea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, **transpusa** sa este matricea

$${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times m}(K).$$

$$AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times p}(K),$$ unde $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$, pentru orice $i \in \{1, 2, ..., m\}$ și $j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Proprietățile înmulțirii matricelor: Operația de înmulțire a matricelor:
- este asociativă;
- în general **nu** este comutativă;
- operația de înmulțire a matricelor pătratice admite element neutru matricea unitate I_n;
- este distributivă în raport cu adunarea matricelor.

Puterile unei matrice pătratice:
Fiind dată o matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$, atunci $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{k}$ pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.

Propoziție: Sunt adevărate relațiile $A^kA^l = A^lA^k = A^{k+l}$ și $(A^k)^l = A^{kl}$ pentru orice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ și $k, l \in \mathbb{N}^*$.

1.1.3. Urma unei matrice pătratice

Dacă $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(K)$, atunci **urma** sa este $Tr(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$.

Proprietăți: Pentru orice $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ și $\alpha \in K$, avem:
T1. $Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$; **T2.** $Tr(\alpha A) = \alpha Tr(A)$; **T3.** $Tr(AB) = Tr(BA)$.

1.2. Probleme de inițiere

I1. Determinați valorile numerelor reale a, b, pentru care matricele:
$A = \begin{pmatrix} 2a+3 & 4 \\ 3b-5 & 7 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 16 & 7 \end{pmatrix}$ sunt egale.

I2. Calculați suma matricelor $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$.

I3. Fiind dată matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -5 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, determinați matricea $-3A$.

I4. Determinați produsul matricelor $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

I5. Considerăm matricea $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculați B^2.

I6. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. Demonstrați că $A^2 - 7A = 2I_2$.

I7. Pentru matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ demonstrați că $\mathrm{Tr}\,(A) = \mathrm{Tr}\,(B)$.

I8. Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Determinați $x \in \mathbb{R}$, pentru care $A^2 = xA$.

I9. Considerăm matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$. Demonstrați că $AB = BA$.

I10. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Determinați cel mai mic număr natural n, pentru care $A^n = O_2$.

1.3. Probleme de consolidare

C1. Demonstrați că, oricare ar fi numărul real a, matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 2a+5 \\ 3 & 3a+2 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ nu pot fi egale.

C2. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 6 & 18 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$. Demonstrați că:

$(2x + 2)A - (3x + 3)B = O_2$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

C3. Fie matricea $A_k = \begin{pmatrix} 2^k & 2k \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, unde $k \in \mathbb{N}$. Determinați suma elementelor matricei $B = A_1 + A_2 + ... + A_5$.

C4. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Demonstrați că $AB = O_2$.

C15. Fie matricea $X(a) = \begin{pmatrix} 1+3a & 3a \\ -2a & 1-2a \end{pmatrix}$. Demonstrați că $X(a)X(-1) = X(-1)X(a) = X(-1)$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

C16*. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Demonstrați că:

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = O_2.$$

C17*. Determinați numărul matricelor de forma $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ care verifică condițiile $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$, a, b, c, d distincte și $a+b+c+d = 10$.

C18*. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Determinați matricele $X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care verifică $\begin{cases} 2X+3Y = A \\ X+2Y = B \end{cases}$.

C19*. Demonstrați că $Tr(XY) = Tr(YX)$, pentru orice $X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

C20*. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$. Calculați A^{2014}.

1.4. TESTE DE VERIFICARE

Testul 1

1. Demonstrați că matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ verifică relația $A - 2B = O_2$.

2. Determinați valorile reale ale numerelor a, b, c, d pentru care matricea $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ verifică relația $2B + 6I_2 = O_2$.

3. Pentru orice $m \in \mathbb{R}$, definim matricea $X(m) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix}$. Demonstrați că:

$$X(3) \cdot X(7) = X(10).$$

4. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Fie $C = AB - BA$. Determinați $Tr(C)$.

8. Funcții continue

8.1. NOȚIUNI TEORETICE

8.1.1. Definiții

Fie $f: D \to \mathbb{R}$ și $\alpha \in D$ un punct de acumulare.

Definiție: Spunem că funcția f este **continuă** în punctul α dacă $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = f(\alpha)$.

Teoremă: Funcția f este continuă în punctul α dacă $\lim\limits_{x \nearrow \alpha} f(x) = \lim\limits_{x \searrow \alpha} f(x) = f(\alpha)$.

Dacă $\alpha \in D$ este un punct pentru care nu este verificată teorema anterioară, atunci vom spune că punctul α este **punct de discontinuitate**. Dacă limitele sunt finite, îl vom numi **discontinuitate de speța întâi**. În celelalte cazuri, se va numi **discontinuitate de speța a doua**.

Definiție: Spunem că funcția f este **continuă pe mulțimea** A dacă este continuă în orice punct al mulțimii A. Submulțimea maximă a domeniului de definiție în care funcția este continuă se numește **domeniu de continuitate**.

Teoremă: Funcțiile elementare sunt continue pe domeniul de definiție.

Teoremă: Suma, diferența, produsul, raportul și compunerea a două funcții continue este, de asemenea, o funcție continuă pe tot domeniul pe care se poate realiza operația respectivă.

8.1.2. Funcții continue pe interval

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval și $f: I \to \mathbb{R}$.

Teoremă (Lema intersecției): Fie f continuă și $a, b \in I$, $a < b$ cu $f(a) \cdot f(b) < 0$. Atunci există $c \in (a, b)$, astfel încât $f(c) = 0$.

Interpretare geometrică: Dacă graficul unei funcții f continue pe un interval conține cel puțin un punct situat sub axa Ox și cel puțin un punct situat deasupra axei Ox, atunci graficul funcției f intersectează axa Ox.

Consecință (semnul funcției): Fie f continuă pe I și $f(x) \neq 0$ pentru orice $x \in I$. Atunci f păstrează același semn pe I.

Consecință (imaginea funcției): Dacă f este continuă pe I, atunci imaginea funcției f este interval.

Consecință (imaginea unei funcții continue și monotone): Fie $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ continuă și monotonă. Atunci $\operatorname{Im} f = [f(a), f(b)]$.

8.2. Probleme de inițiere

I1. Demonstrați că $x = 1$ este punct de continuitate pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) =$
$$= \begin{cases} 3x-1, & x<1 \\ 2, & x=1 \\ -x+3, & x>1 \end{cases}.$$

I2. Demonstrați că $x = 2$ este punct de discontinuitate de speța întâi pentru funcția
$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x<2 \\ 5, & x=2 \\ 3x-1, & x>2 \end{cases}.$$

I3. Studiați continuitatea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2^x+2, & x<0 \\ 3, & x=0 \\ x^2+3, & x>0 \end{cases}$ în punctul $x = 0$.

I4. Demonstrați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} ax-3a, & x<3 \\ 0, & x=3 \\ x^2-9, & x>3 \end{cases}$ este continuă în $x = 3$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.

I5. Determinați semnul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^3 - 1$.

I6. Determinați semnul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 2^x + 1$.

I7. Demonstrați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 3x+4, & x<-1 \\ x^2, & x\geq -1 \end{cases}$ este continuă pe $\mathbb{R}$.

I8. Determinați numerele reale a și b pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) =$
$= \begin{cases} x+a, & x<5 \\ 2014, & x=5 \\ bx+2004, & x>5 \end{cases}$ este continuă în $x = 5$.

I9. Determinați toate valorile numărului real a, pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax+3, & x\leq 1 \\ \ln(x-1), & x>1 \end{cases}$ este discontinuă în punctul $x = 1$.

I10. Determinați mulțimea punctelor de discontinuitate ale funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) =$
$$= \begin{cases} 2^x, & x\in(-\infty, 1] \\ x^2+1, & x\in(1, 2) \\ \ln(3x-5), & x\in[2,\infty) \end{cases}.$$

11. Probleme de sinteză – analiză matematică

1. Fie funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x+\ln x$.

a) Demonstrați că graficul funcției nu admite asimptote la $+\infty$.
b) Demonstrați că funcția f este bijectivă.
c) Demonstrați că funcția f nu are puncte de inflexiune.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$.

a) Calculați derivata acestei funcții.
b) Determinați valorile extreme ale acestei funcții.
c) Determinați numerele reale a, b, c, pentru care $f(a)+f(b)+f(c)=\dfrac{3}{2}$.

3. Fie funcția $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$.

a) Determinați ecuația asimptotei la $+\infty$ la graficul funcției.
b) Calculați derivata funcției f.
c) Demonstrați că, pentru orice $x>1$, avem $f(x^2)+f(x^3)\geq 8$.

4. Fie funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

a) Calculați derivata funcției f.
b) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.
c) Demonstrați că $3^{\sqrt{5}}<5^{\sqrt{3}}$.

5. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x-x$.

a) Demonstrați că $x=0$ este punct de minim pentru funcția f.
b) Determinați imaginea funcției f.
c) Demonstrați că $e^{x^{2008}}+e^{x^{208}}\geq x^{2008}+x^{208}+2,$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

6. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(x+1)^2+(x-1)^2$.

a) Demonstrați că $f'(x)=4x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

c) Demonstrați că $f'(x)\leq e^{4x}-1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

7. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$.

a) Calculați derivata funcției f.
b) Determinați imaginea funcției f.

Clasa a XII-a

1. Legi de compoziție

1.1. NOȚIUNI TEORETICE

1.1.1. Legi de compoziție

Fie G o mulțime nevidă și o lege „$*$". Legea „$*$":
- este **lege de compoziție** pe G dacă $x * y \in G$ pentru orice $x, y \in G$ (se mai spune că mulțimea G este **parte stabilă** în raport cu legea „$*$");
- este **comutativă** dacă $x * y = y * x$ pentru orice $x, y \in G$;
- este **asociativă** dacă $x * (y * z) = (x * y) * z$ pentru orice $x, y, z \in G$;
- admite **element neutru** dacă există un element $u \in G$, astfel încât $x * u = u * x = x$ pentru orice $x \in G$;
- este **simetrizabilă** dacă pentru orice $x \in G$ există un element $x' \in G$, astfel încât $x * x' = x' * x = u$.

Observație: Elementul x' se numește **simetricul** lui x în raport cu legea de compoziție „$*$".

1.1.2. Mulțimea claselor de resturi

Fie mulțimea numerelor întregi $\mathbb{Z}$ și $n \in \mathbb{N}^*$ fixat. Pentru orice $r \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$, definim mulțimea $\hat{r} = \{z \in \mathbb{Z} \mid \text{restul împărţirii lui } z \text{ la } n \text{ este egal cu } r\}$.

Mulțimea $\mathbb{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, ..., \widehat{n-1}\}$ se numește mulțimea **claselor de resturi modulo *n***.

Definim operațiile:
- $\hat{x} + \hat{y} = \hat{z}$, unde z este restul împărțirii numărului $x + y$ la n;
- $\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{t}$, unde t este restul împărțirii numărului xy la n.

Proprietăți:
- adunarea din $\mathbb{Z}_n$ este lege de compoziție asociativă și comutativă;
- adunarea admite element neutru elementul $\hat{0}$;
- orice element $\hat{x} \in \mathbb{Z}_n$ este **simetrizabil**, simetricul său fiind elementul $\widehat{n-x}$, care se mai notează $-\hat{x}$;

● înmulțirea din $\mathbb{Z}_n$ este lege de compoziție comutativă, asociativă și distributivă în raport cu adunarea;
● înmulțirea admite element neutru elementul $\hat{1}$;
● evident, $\hat{0} \cdot \hat{x} = \hat{0}$ pentru orice $\hat{x} \in \mathbb{Z}_n$;
● dacă n este număr prim, atunci din $\hat{x}\hat{y} = \hat{0}$ obținem $\hat{x} = \hat{0}$ sau $\hat{y} = \hat{0}$; dacă n nu este prim, nu este adevărat întotdeauna (de exemplu, în $\mathbb{Z}_6$ avem $\hat{3} \cdot \hat{4} = \hat{0}$);
● un element $\hat{x}$ este **inversabil** dacă există $\hat{y}$ astfel încât $\hat{x}\hat{y} = \hat{1}$; atunci $\hat{y}$ este inversul lui $\hat{x}$ și se notează $\hat{x}^{-1}$;
● un element $\hat{x}$ este **inversabil** dacă și numai dacă numerele x și n admit divizor comun doar pe 1.

1.2. Probleme de inițiere

I1. Pe $\mathbb{R}$ definim legea „$\circ$” prin $x \circ y = x + y - 3$. Calculați $4 \circ 9$.

I2. Pe $\mathbb{R}$ definim legea „$\circ$” prin $x \circ y = x + y - 3$. Demonstrați că această lege este comutativă.

I3. Pe $\mathbb{R}$ definim legea „$\circ$” prin $x \circ y = x + y - 3$. Demonstrați că această lege este asociativă.

I4. Pe $\mathbb{R}$ definim legea „$\circ$” prin $x \circ y = x + y - 3$. Demonstrați că 3 este elementul neutru al acestei legi.

I5. Pe $\mathbb{R}$ definim legea „$\circ$” prin $x \circ y = x + y - 3$. Știind că legea admite pe 3 ca element neutru, determinați simetricul elementului $x = 7$ în raport cu această lege.

I6. Pe $\mathbb{R}$ definim legea „$\circ$” prin $x \circ y = x + y - 3$. Determinați valoarea numărului real x, pentru care $x \circ x \circ x = 21$.

I7. În $\mathbb{Z}_6$, calculați $\hat{2} + \hat{5}$.

I8. În $\mathbb{Z}_6$, calculați $\hat{2} \cdot \hat{5}$.

I9. Considerăm mulțimea $C = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\}$. Demonstrați că, oricare ar fi $X,\ Y \in C$, avem $X + Y \in C$.

I10. Considerăm mulțimea $C = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\}$. Demonstrați că, oricare ar fi $X,\ Y \in C$, avem $X \cdot Y \in C$.

1.3. Probleme de consolidare

C1. Se consideră operația „$\perp$” definită prin $x \perp y = x^y + y^x$, pentru orice $x, y \in (0, \infty)$. Calculați $2 \perp 3$.

C2. Pe $\mathbb{R}$ definim operația „$*$” prin $x * y = xy - 4x - 4y + 20$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Determinați $t \in \mathbb{R}$, știind că $t * t = 4$.

C3. Pe $\mathbb{R}$ definim operația „$*$” prin relația $x * y = xy - 2x - 2y + 6$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Demonstrați că $z * 3 = 3 * z = z$ pentru orice $z \in \mathbb{R}$.

C4. Fie mulțimea $A = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Demonstrați că, oricare ar fi $x, y \in A$, avem $x + y \in A$.

C5. Pe mulțimea $G = (-4, \infty)$ definim operația „$\circ$” prin $x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$, pentru orice $x, y \in G$. Demonstrați că, oricare ar fi $x, y \in G$, avem $x \circ y \in G$.

C6. Considerăm operația „$\bullet$” definită prin $x \bullet y = x + y - 6$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Demonstrați că $x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$.

C7. Demonstrați că operația „$*$”, definită prin $x * y = xy + x + y$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, este asociativă.

C8. Fie mulțimea $M = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Demonstrați că mulțimea M este parte stabilă în raport cu înmulțirea numerelor întregi.

C9. Determinați elementul neutru al legii „$\perp$” definită prin $x \perp y = \sqrt{x^2 + y^2}$, pentru orice $x, y \in [0, \infty)$.

C10. Fie operația „$\perp$” definită prin $x \perp y = \dfrac{x + y}{2}$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Demonstrați că această operație este comutativă, dar nu este asociativă.

C11. Pe $\mathbb{R}$ definim legea „$*$” definită prin $x * y = xy - 2x - 2y + 6$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Știind că legea admite pe 3 ca element neutru, determinați elementele simetrizabile.

C12. Determinați valoarea numărului real a, știind că operația „$*$” definită prin $x * y = x + y - a$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, admite pe 2 ca element neutru.

C13. Fie operația „$*$” definită prin $x * y = xy - 3x - 3y + a$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Determinați numărul real a, știind că operația „$*$” este asociativă.

C14. Fie mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\}$. Demonstrați că înmulțirea matricelor este lege de compoziție pe mulțimea G.

C15. Fie mulțimea $A = \{\hat{1}, \hat{3}, \hat{5}, \hat{7}\} \subset \mathbb{Z}_8$. Demonstrați că mulțimea A este parte stabilă în raport cu înmulțirea din $\mathbb{Z}_8$.

C16*. Pe $\mathbb{R}$ definim legea „$\perp$" prin $x \perp y = (x-2)(y-2) + 2$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Determinați valoarea numărului real x care verifică relația $x \perp x \perp x = 10$.

C17*. Fie mulțimea $A = \{a + b\sqrt{3} \mid a,\ b \in \mathbb{Z}\}$. Demonstrați că mulțimea A este parte stabilă în raport cu înmulțirea numerelor reale.

C18*. Pe $\mathbb{R}$ definim legea „$\perp$" prin $x \perp y = (x-2)(y-2) + 2$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Știind că operația este asociativă, calculați $10 \perp 9 \perp 8 \perp \ldots \perp 1 \perp 0$.

C19*. Demonstrați că operația „$*$" este asociativă, unde $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + 1}$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

C20*. Pe $\mathbb{R}$ definim operația „$*$" prin relația $x * y = xy - 2x - 2y + 6$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Dați exemplu de două numere $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, pentru care $a * b \in \mathbb{Z}$.

1.4. Teste de verificare

Testul 1

1. Considerăm legea „$\circ$" definită prin $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Demonstrați că această lege este asociativă.

2. Considerăm legea „$\circ$" definită prin $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Determinați elementul neutru al acestei legi.

3. Considerăm legea „$\circ$" definită prin $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Demonstrați că, oricare ar fi $x, y \in (-2, \infty)$, avem $x \circ y \in (-2. \infty)$.

4. Considerăm legea „$\circ$" definită prin $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Determinați toate valorile reale ale numărului a pentru care $a \circ a = 7$.

5. Considerăm legea „$\circ$" definită prin $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Determinați un element $c \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $x \circ c = c \circ x = c$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

6. Considerăm legea „$\circ$" definită prin $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Calculați: $(-5) \circ (-4) \circ (-3) \circ (-2) \circ (-1) \circ 0$.

Teste pentru Bacalaureat, după modelul M.E.

1. Modele de teste rezolvate pentru examenul de Bacalaureat

Testul 1

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Demonstrați că numărul $a = \lg 30 + \lg 2 - \lg 6$ este natural.

(5p) **2.** Demonstrați că ecuația $(a^2 + 1)x^2 - 2x + 1 = 0$ nu admite rădăcini reale, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}^*$.

(5p) **3.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$.

Calculați $f\left(-\frac{1}{2}\right) f(-1) f(0) f(1) f\left(\frac{1}{2}\right)$.

(5p) **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulțimea $\left\{C_4^3, C_5^2, C_4^2\right\}$, acesta să fie divizibil cu 3.

(5p) **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, 4)$, $B(6, 8)$ și $C(8, 2)$. Calculați distanța de la C la mijlocul segmentului AB.

(5p) **6.** Calculați $(\cos 120° + \cos 60°)(\sin 135° - \sin 45°)$.

Subiectul al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x + 2y - az = 3 \\ 2x - y - z = 1 \\ -x + 3y + z = 2 \end{cases}$, unde a este un parametru real. Notăm cu A matricea sistemului.

(5p) a) Demonstraţi că tripletul (–1, 2, –5) este soluţie a sistemului în cazul $a = 0$.
(5p) b) Determinaţi determinantul matricei A.
(5p) c) Dacă $a \neq 0$, demonstraţi că soluţiile sistemului nu depind de a.

2. Se consideră mulţimea $H = \{\hat{0}, \hat{2}, \hat{4}, \hat{6}\} \subset \mathbb{Z}_8$.

(5p) a) Demonstraţi că mulţimea H este parte stabilă în raport cu adunarea din $\mathbb{Z}_8$.
(5p) b) Determinaţi $x \in H$ cu proprietatea că $x^3 = \hat{0}$.
(5p) c) Calculaţi $\hat{0}^{2012} + \hat{2}^{2012} + \hat{4}^{2012} + \hat{6}^{2012}$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x - x$.

(5p) a) Calculaţi $f'(x)$.
(5p) b) Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.
(5p) c) Demonstraţi că $\sqrt{e} \geq \frac{3}{2}$.

2. Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

(5p) a) Calculaţi $\int_1^4 \frac{f(x)}{\ln x} dx$.
(5p) b) Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g : [1, e] \to \mathbb{R}, g(x) = f(x)$.
(5p) c) Demonstraţi că $\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)dx \leq 0$.

Testul 2

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Calculaţi $C_6^3 - A_4^2 + 3$.
(5p) **2.** Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\log_3 (x^2 - 16) = 2$.
(5p) **3.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ pentru care $a_1 = 2$ şi $a_5 = 18$. Calculaţi a_{2012}.
(5p) **4.** După două scumpiri succesive cu 10% şi apoi cu 20%, preţul final al unui produs este 1 320 de lei. Determinaţi preţul iniţial.

Testul 11

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Determinaţi $x \in (0, \infty)$ pentru care numerele 2, $x + 3$, 8 sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice.

(5p) **2.** Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^{2012} + x^2 + 1$. Demonstraţi că:

$$f(-3) - f(-1) + f(1) - f(3) = 0.$$

(5p) **3.** Se consideră mulţimea $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. Câte submulţimi ale mulţimii A au cel puţin 5 elemente?

(5p) **4.** Ordonaţi crescător numerele $\frac{1}{\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|}$, $\log_2 \frac{1}{8}$ şi 0,(13).

(5p) **5.** Într-un sistem de axe xOy, se consideră punctele $A(1, 1)$, $B(2, 4)$ şi $C(4, 2)$. Demonstraţi că triunghiul ABC este isoscel.

(5p) **6.** Demonstraţi că $\cos 10° + \cos 30° + \cos 50° + \ldots + \cos 170° = 0$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(5p) a) Demonstraţi că $A^2 - I_2 = O_2$.

(5p) b) Demonstraţi că matricea A este inversabilă şi determinaţi inversa sa.

(5p) c) Daţi exemplu de două matrice $X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \setminus \{O_2\}$ pentru care $XY = O_2$.

2. Pe mulţimea $\mathbb{Z}_6$ definim operaţia „$\oplus$” definită prin $x \oplus y = x + y + \hat{3}$, pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}_6$.

(5p) a) Calculaţi $\hat{5} \oplus \hat{4}$.

(5p) b) Demonstraţi că legea „$\oplus$” este asociativă.

(5p) c) Determinaţi elementul neutru al legii „$\oplus$”.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 2}{x^2 + 1}$.

(5p) a) Demonstraţi că $f'(x) = \frac{x^2(x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^2}$.

(5p) b) Demonstraţi că graficul funcţiei f nu admite puncte de extrem.

(5p) c) Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice la $+\infty$, la graficul funcţiei f.

2. Se consideră funcţia $f : [0, 2] \to \mathbb{R}, f(x) = e^x + e^{2-x}$.

(5p) a) Determinaţi primitivele funcţiei f.

(5p) b) Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g : [0, 2] \to \mathbb{R}, g(x) = f(x) - e^{2-x}$.

(5p) c) Folosind, eventual, inegalitatea $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, $a, b > 0$, demonstraţi că $\int_0^2 f(x)dx \geq 4e$.

Testul 12*

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Determinaţi cel mai mare număr întreg x care verifică inegalitatea $x < 3\sqrt{2}$.

(5p) **2.** Demonstraţi că rădăcinile ecuaţiei $x^2 - mx - (m + 2) = 0$ sunt reale distincte, oricare ar fi valoarea parametrului real m.

(5p) **3.** Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ inecuaţia $3^{4-2x} \leq 81$.

(5p) **4.** Demonstraţi că $C_4^0 + C_4^2 + C_4^4 = 2^3$.

(5p) **5.** Fie M, N, P mijloacele laturilor BC, CA şi, respectiv, AB ale triunghiului ABC. Arătaţi că $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = 0$.

(5p) **6.** Se consideră triunghiul ABC în care $AB = 4$, $BC = 6$ şi $AC = 8$. Determinaţi $\cos A$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. În sistemul de axe xOy, se consideră punctele $A(1, 1)$, $B(9, 3)$ şi $C(3, 7)$. Notăm cu M mijlocul laturii BC.

(5p) a) Determinaţi ecuaţia dreptei AM.

(5p) b) Demonstraţi că triunghiurile AMB şi AMC au arii egale.

(5p) c) Demonstraţi că, pentru orice punct $P \in AM$, triunghiurile ABP şi ACP au aceeaşi arie.

2. Pe mulţimea $A = (0, \infty)$ definim legea „$\circ$” definită prin $x \circ y = \sqrt{xy}$.

(5p) a) Demonstraţi că $16 \circ 81 \in \mathbb{N}$.

(5p) b) Demonstraţi că $1 \circ (16 \circ 81) < (1 \circ 16) \circ 81$.

(5p) c) Demonstraţi că legea „$\circ$” nu este asociativă.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} ax^2, & x < 1 \\ 2x - 1, & x \geq 1 \end{cases}$.

(5p) a) Determinaţi valoarea numărului real a, ştiind că funcţia f este continuă în punctul $x = 1$.

Testul 23

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Determinaţi numărul real x pentru care numerele 2, $x + 2$ şi 10 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

(5p) **2.** Calculaţi $f(1) + f(2)$ pentru funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$.

(5p) **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_9(x^2 + 5) = 1$.

(5p) **4.** Determinaţi numărul submulţimilor cu 2 elemente ale unei mulţimi cu 6 elemente.

(5p) **5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreapta h de ecuaţie $y = x - 1$ şi punctul $A(2, 2)$. Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin A şi este paralelă cu h.

(5p) **6.** Se consideră expresia $E(x) = \sin\frac{x}{3} + \cos\frac{x}{2}$. Arătaţi că $E(90°) = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Pentru orice număr natural m, definim matricea $A(m) = \begin{pmatrix} m & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

(5p) a) Calculaţi suma $A(1) + A(2) + A(3) + ... + A(10)$.

(5p) b) Demonstraţi că det (A) este număr par, oricare ar fi $m \in \mathbb{N}$.

(5p) c) Demonstraţi că, oricare ar fi $p \in \mathbb{N}$, are loc relaţia det $(A(p + 1)) >$ det $(A(p))$.

2. Pe mulţimea $(0, \infty)$, definim operaţia „$*$” prin relaţia $x * y = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.

(5p) a) Demonstraţi că $4 * 3 > 2$.

(5p) b) Demonstraţi că valoarea expresiei $x * x$ este aceeaşi, oricare ar fi $x \in (0, \infty)$.

(5p) c) Determinaţi $x \in \mathbb{Q}$ din egalitatea $(2*2)\cdot(4*4)\cdot(6*6)\cdot...\cdot(10*10) = 8^x$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^6 - 6x + 10$.

(5p) a) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^6}$.

(5p) b) Determinaţi coordonatele punctului de minim al graficului funcţiei f.

(5p) c) Demonstraţi că $f(0{,}9) + f(1, 1) > 10$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x^2 - 2x + 1$.

(5p) a) Calculaţi $\int_1^2 f(x)$.

(5p) b) Calculaţi $\int_0^1 (6x-2) f^2(x)dx$.

(5p) c) Calculaţi $\int_0^1 e^x f(x)dx$.

Testul 24*

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Arătaţi că numărul $x = 2(1 + i) - 2i$ este real.

(5p) **2.** Calculaţi $(f \circ f)(1)$ pentru care funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$.

(5p) **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2 + x + 1} = 1$.

(5p) **4.** Determinaţi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, pentru care $C_n^1 + C_n^2 = 15$.

(5p) **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0, 0)$ şi $A(2, 3)$. Determinaţi coordonatele punctului B, ştiind că A este mijlocul segmentului (OB).

(5p) **6.** Calculaţi ctg a, ştiind că $\sin a = \frac{1}{3}$ şi $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(5p) a) Demonstraţi că $A^2 - 3A + 2I_2 = O_2$.

(5p) b) Demonstraţi prin inducţie matematică egalitatea $A^n = (2^n - 1)A - (2^n - 2)I_2$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

(5p) c) Determinaţi valoarea numărului real x din egalitatea

$$A^2 + A^3 + ... + A^{100} = (2^x - 103)(A - I_2) + 99I_2.$$

2. Fie polinomul $f_n = 2nX^{2n+1} - (2n + 1)X^{2n} + 1$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

(5p) a) Determinaţi toate rădăcinile complexe ale polinomului f_1.

(5p) b) Demonstraţi că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, polinomul f_n admite o rădăcină naturală dublă.

(5p) c) Demonstraţi că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, polinomul f_n admite exact trei rădăcini reale.

2. Modele de teste propuse pentru examenul de Bacalaureat

Testul 1

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Determinaţi suma primilor trei termeni ai unei progresii geometrice, ştiind că suma primilor doi termeni ai progresiei este egală cu 8, iar diferenţa dintre al doilea termen şi primul termen este egală cu 4.

(5p) **2.** Determinaţi punctele de intersecţie a graficului funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$ cu axele de coordonate.

(5p) **3.** Demonstraţi că ecuaţia $x^2 + mx - m^2 - 2 = 0$ admite soluţii reale distincte, pentru orice $m \in \mathbb{R}$.

(5p) **4.** Demonstraţi că $C_{18}^1 - A_4^2 = P_3$.

(5p) **5.** Calculaţi lungimea laturii AC a triunghiului ABC, ştiind că $m(\measuredangle B) = 45°$, $m(\measuredangle C) = 30°$ şi $AB = 10$.

(5p) **6.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5, -4)$ şi $B(0, 8)$. Calculaţi lungimea segmentului AM, unde M este mijlocul segmentului AB.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră numerele reale a, b şi sistemul $\begin{cases} x + y + az = 4 \\ x + y + z = 3 \\ -3x - y + 2z = b \end{cases}$.

(5p) a) Demonstraţi că sistemul nu are soluţie în cazul $a = 1$.

(5p) b) Rezolvaţi sistemul în cazul $a = 2$, $b = -2$.

(5p) c) Determinaţi valoarea numărului real a pentru care soluţia sistemului verifică condiţia $x + y + 2z = 4$.

2. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 - 2X^2 + aX - 8$.

(5p) a) Determinaţi numărul real a, astfel încât o rădăcină a polinomului f să fie egală cu 2.

(5p) b) Pentru $a = 4$, calculaţi şi restul împărţirii polinomului f la polinomul $g = X^2 - X + 2$.

(5p) c) Demonstraţi că f nu are toate rădăcinile reale, oricare ar fi $a \in (2, +\infty)$.

Subiectul al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x - \ln x - 2$.

(5p) a) Determinaţi ecuaţia tangentei duse la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0 = 1$.

(5p) b) Determinaţi coordonatele punctului extrem al graficului funcţiei f.

(5p) c) Determinaţi mulţimea numerelor $x \in (0, \infty)$ pentru care $f(x) > -1$.

2. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x(x-1), & x < 1 \\ \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}, & x \geq 1 \end{cases}$.

(5p) a) Demonstraţi că funcţia f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

(5p) b) Calculaţi $\int_{-1}^{0} f(x)\, dx$.

(5p) c) Calculaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g : [1, e] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$, pentru orice $x \in [1, e]$.

Testul 2

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Calculaţi $\left(\frac{5}{2}\right)^{-1} - \sqrt[3]{\frac{8}{125}}$.

(5p) **2.** Determinaţi numerele reale a şi b pentru care punctul $A(a, b + 1)$ aparţine graficelor funcţiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + 5$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x + 1$.

(5p) **3.** Rezolvaţi ecuaţia $4^{2-x} = 16$.

(5p) **4.** Rezolvaţi ecuaţia $\log_5 (x + 2) - \log_5 (2x - 5) = 1$.

(5p) **5.** Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(1, 1)$ şi este paralelă cu dreapta $y = x + 2$.

(5p) **6.** Demonstraţi egalitatea $\sin 60° + \operatorname{tg} 45° = \cos 30° + \operatorname{ctg} 45°$.

Subiectul al II-lea **(30 de puncte)**

1. În $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $B = I_3 + A$.

(5p) a) Calculaţi $A \cdot B$.

(5p) b) Calculaţi determinantul matricei $A^2 + A^3$.

(5p) b) Demonstraţi prin inducţie matematică că $\underbrace{x \odot x \odot ... \odot x}_{n \text{ ori}} = (x-2)^n + 2$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{N}^*$.

(5p) c) Determinaţi toate numerele reale x care verifică egalitatea:

$$\underbrace{x \odot x \odot ... \odot x}_{10 \text{ ori}} = 1026.$$

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln(3x^2 + e)$.

(5p) a) Calculaţi derivata funcţiei f.

(5p) b) Calculaţi $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x^2}$.

(5p) c) Demonstraţi că graficul funcţiei f nu admite asimptote.

2. Se consideră $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$.

(5p) a) Calculaţi I_1.

(5p) b) Calculaţi I_2.

(5p) c) Demonstraţi că $I_1 - I_3 = \dfrac{1}{3}$.

Testul 10*

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Calculaţi partea întreagă a numărului real a dacă $a = \sqrt[3]{8} + \sqrt{7}$.

(5p) **2.** Dacă x_1 şi x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^2 - (2m + 1)x + m^2 + m = 0$, demonstraţi că $(x_1 - x_2)^2 = 1$, oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$.

(5p) **3.** Determinaţi mulţimea soluţiilor reale ale inecuaţiei $0,2^{3x+1} \le 0,2^{2x+5}$.

(5p) **4.** Considerăm dezvoltarea $\left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^{30}$, unde $x \in \mathbb{R}^*$. Determinaţi termenul care nu îl conţine pe x.

(5p) **5.** Demonstraţi că vectorii $\vec{u} = a\vec{i} + (a+1)\vec{j}$ şi $\vec{v} = (a+1)\vec{i} - a\vec{j}$ sunt perpendiculari, oricare ar fi numărul real a.

(5p) **6.** Demonstraţi inegalitatea $\arcsin\dfrac{1}{2} < \text{arctg } 1$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră mulţimea $S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \det(X) = -1\}$.

(5p) a) Demonstraţi că, oricare ar fi $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, avem egalitatea:

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B).$$

(5p) b) Demonstraţi prin inducţie matematică că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, avem $\det(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n) = \det(A_1) \cdot \det(A_2) \cdot ... \cdot \det(A_n)$.

(5p) c) Demonstraţi că, oricare ar fi $C_1, C_2, ..., C_{2013} \in S$, avem $C_1 C_2 ... C_{2013} \neq I_2$.

2. Se consideră polinomul $f = X^4 - 4X^3 + 2X^2 + aX + b$, cu $a, b \in \mathbb{R}$.

(5p) a) Determinaţi valoarea numerelor reale a, b, ştiind că $f(2+i) = 0$.

(5p) b) Pentru $a = 12$ şi $b = -15$, determinaţi toate rădăcinile complexe ale polinomului f.

(5p) c) Pentru $a = 12$ şi $b = -15$, descompuneţi polinomul f în factori ireductibili cu coeficienţi reali.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Fie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 + 1 + \sqrt{3x+16}$.

(5p) a) Demonstraţi că f este strict crescătoare.

(5p) b) Determinaţi mulţimea valorilor funcţiei f.

(5p) c) Studiaţi dacă există numerele reale $a_1, a_2, ..., a_{400} \geq 0$ astfel încât:

$$f(a_1) + f(a_2) + ... + f(a_{400}) = 1999,976.$$

2. Se consideră $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1} dx$.

(5p) a) Calculaţi I_2.

(5p) b) Demonstraţi că $I_{n+2} + I_n = \frac{1}{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

(5p) c) Demonstraţi că $I_{2008} - I_{2012} = \frac{2}{2010^2 - 1}$.

Soluții

Clasa a IX-a

1. Mulțimi și elemente de logică matematică

I1.	I2.	I3.	I4.	I5.	I6.	I7.	I8.	I9.	I10.
8	16	9	$8 \in \mathbb{N}$	$a = -1$	(4, 3)	3	[3, 5)	4	–3 și 7

C1. $2^3 = 8$. **C2.** 31 nevide $\Rightarrow$ 32 în total $\Rightarrow$ A are 5 elemente. **C3.** $28 + 28 - 11 = 45$. **C4.** $2^2 = 4$. **C5.** $2 + \frac{1}{3} + \frac{8}{3} = 5$. **C6.** $2x + 1$ divide pe 6, deci $2x + 1 \in \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6\} \Rightarrow A = \{-2, -1, 0, 1\}$. **C7.** $4x - 2 < 2 < 2x + 6 \Rightarrow x \in (-2, 1)$. **C8.** $12 + 25 - 7 = 30 \Rightarrow$ 30 de elevi. **C9.** $A \setminus B = [2, 5)$, deci numărul este 4. **C10.** $A \cup B = (-2, 5)$, deci sunt 6 numere întregi. **C11.** Se obține $a < c < b$. **C12.** $x - 3 \mid 2 \Rightarrow x - 3 \in \{\pm1, \pm2\} \Rightarrow A = \{1, 2, 4, 5\}$. **C13.** $\frac{11}{9} = 1{,}2222....$ deci $P = 2^{10} = 1024$. **C14.** $\frac{13}{6} = 2{,}16666...$, deci cifra 3 nu apare niciodată. **C15.** $\frac{23}{15} = 1{,}53333...$, deci $S = 5 + 3 \cdot 99 = 302$. **C16.** $A - B = (-3, 1] \Rightarrow$ cardinalul mulțimii $(A \setminus B) \cap \mathbb{Z}$ este 4. **C17.** $a = 7\sqrt{2} - 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$, $b = 9\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 18\sqrt{2}$, deci $\sqrt{ab} = \sqrt{18 \cdot 2} = 6$. **C18.** Avem $x + 4 = 1 - 2x$ și $x + 4 = 2x - 1$, de unde $x \in \{-1, 5\}$. **C19.** $\left|2 - \sqrt{5}\right| + \left|3 - \sqrt{5}\right| = \sqrt{5} - 2 + 3 - \sqrt{5} = 1 \in \mathbb{N}$. **C20.** $3x - 2 = \pm 11 \Rightarrow x \in \left\{\frac{13}{3}, -3\right\}$. Dar $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = -3$. **C21.** Avem $\left[\frac{17}{5}\right] = 2$ și $\left\{\frac{11}{6}\right\} = \frac{5}{6}$, deci suma este $\frac{17}{6}$. **C22.** Avem $4 < a < 5$, deci $[a] = 4$. **C23.** $b = 5 + \sqrt{26} \in (10, 11) \Rightarrow [b] = 10$. **C24.** $A = \left|\sqrt{2} - 3\right| + \left|\sqrt{2} - 1\right| = 3 - \sqrt{2} + \sqrt{2} - 1 = 2 \in \mathbb{N}$. **C25.** $a = \frac{\sqrt{1} - \sqrt{2}}{1 - 2} + \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2 - 3} + \ldots + \frac{\sqrt{99} - \sqrt{100}}{99 - 100} = \frac{\sqrt{1} - \sqrt{100}}{-1} = \frac{1 - 10}{-1} = 9 \in \mathbb{N}$. **C26.** Avem $\sqrt{3} + \sqrt{25} = 5 + \sqrt{3} \in (6, 7)$, deci $\left[\sqrt{3} + \sqrt{25}\right] = 6$. Apoi $\sqrt{4} + \sqrt{19} = 2 + \sqrt{19} \in (6, 7)$, așadar $\left[\sqrt{4} + \sqrt{19}\right] = 6$. **C27.** Pentru pasul de inducție avem $1 + 2 + 3 + ... + k + (k + 1) = \frac{k(k+1)}{2} +$

Clasa a X-a

1. Numere reale

I1.	I2.	I3.	I4.	I5.	I6.	I7.	I8.	I9.	I10.
–1	0	0	6	0	0	$b < a < c$	13 = 13	$2 < 3$	verificare

C1. $3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 0$. **C2.** $2\sqrt{14} - \dfrac{\sqrt{14}}{2} - \dfrac{10\sqrt{14}}{7} = \dfrac{\sqrt{14}}{14}$. **C3.** $\sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{54} = 3\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{250} = 5\sqrt[3]{2}$. **C4.** Verificare. **C5.** $\lg 90 = \lg 3^2 \cdot 10 = 2a + 1$. **C6.** $\log_2 \dfrac{12 \cdot 14}{21} = \log_2 8 = 3$. **C7.** $a = 2 + 2 + 3 = 7$. **C8.** $\lg\dfrac{2}{1} + \lg\dfrac{3}{2} + ... + \lg\dfrac{10}{9} = \lg\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot ... \cdot\dfrac{10}{9} = 1$. **C9.** $1331^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{1331}\right)^2 = 121$. **C10.** $a = 2^{33} = 8^{11}$, $b = 3^{22} = 9^{11} \Rightarrow a < b$. **C11.** $3\sqrt{2008} < 2008\sqrt{3}$. **C12.** $b - a = \log_2 \dfrac{6}{3} = 1$. **C13.** $\lg\dfrac{12 \cdot 15}{18} = 1$. **C14.** $\log_4 9 = \log_2 3$, $\log_8 27 = \log_2 3$. **C15.** $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 8 = \dfrac{\lg 3}{\lg 2} \cdot \dfrac{\lg 5}{\lg 3} \cdot \dfrac{\lg 2^3}{\lg 5} = 3$. **C16.** $a = \dfrac{\log_3 \sqrt{3}}{\log_3 9} + \dfrac{\log_2 \sqrt[3]{2}}{\log_2 4} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{12} \in \mathbb{Q}$.

C17. $\log_2 (5+\sqrt{7})(5-\sqrt{7}) - \log_2 9 = \log_2 2 = 1$. **C18.** $\log_{2\sqrt{2}} 3\sqrt{3} = \dfrac{\log_2 3\sqrt{3}}{\log_2 2\sqrt{2}} = \dfrac{\log_2 3^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \log_2 3$. **C19.** $4 = \log_5 625 < \log_5 2007$. **C20.** Se obține $11 > 9$. **C21.** $\dfrac{b}{a} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{4-2}} = \sqrt{2} + 1 \Rightarrow \dfrac{b}{a} - \sqrt{2} = 1$. **C22.** $a = 3$, $b = 2$. **C23.** $2 = \log_2 4 > \log_2 3$; $\dfrac{3}{2} = \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \log_2 \sqrt{8} < \log_2 3$. **C24.** $\sqrt{3} + \sqrt{9} < \sqrt{5} + \sqrt{7} \Leftrightarrow 3 + 2\sqrt{27} + 9 < 5 + 2\sqrt{35} + 7 \Leftrightarrow \sqrt{27} < \sqrt{35}$. **C25.** $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt[3]{3} \Rightarrow a^6 = 8$, $b^6 = 9 \Rightarrow a < b$. **C26.** $2 = \log_3 9 > \log_3 4$; $2 = \sqrt{4} < \sqrt{5}$. **C27.** $\log_3 5 \cdot \log_5 9 = 2 = \sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{9}$. **C28.** $100^{\lg 2} = 4$; $\sqrt[3]{-27} = -3$. **C29.** $\log_{12} 18 = \dfrac{\log_3 18}{\log_3 12} = \dfrac{a+2}{2a+1}$. **C30.** $\log_3 7 > 1 > \log_7 3$.

Test 3: 1. D; **2.** D; **3.** C; **4.** C; **5.** B; **6.** B.

Clasa a XI-a

1. Matrice

I1.	I2.	I3.	I4.	I5.	I6.	I7.	I8.	I9.	I10.
$a=4$ $b=7$	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -6 & 0 & 12 \\ -9 & 15 & -6 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 14 & 7 \\ 24 & 13 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	calcul	Ambele sunt egale cu 7.	5	calcul	2

C1. $A = B \Leftrightarrow 2a + 5 = 7,\ 3a + 2 = 8 \Rightarrow a = 1$ și $a = 2$, imposibil. **C2.** Se verifică prin calcul. **C3.** $B = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$, unde, $m = 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^5 = \dfrac{2^6 - 2}{2 - 1} = 62,\ n = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \ldots + 2 \cdot 5 = 2(1 + 2 + \ldots + 5) = 2 \cdot 15 = 30,\ p = \underbrace{(-1) + \ldots + (-1)}_{5 \text{ ori}} = -5$. Atunci $B = \begin{pmatrix} 62 & 30 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$ și suma elementelor este 87. **C4.** Se verifică prin calcul. **C5.** Din $2X - AB = A \Rightarrow a = -8,\ b = 9,\ c = -3$ și $d = 1$. Atunci $a + b + c + d = -1$. **C6.** $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; $A^3 = 6I_3$. **C7.** $A^2 = 6A \Rightarrow d = 6$.

C8. $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $A^3 = O_3 \Rightarrow A^k = O_3$, pentru orice $k \geq 3$, deci $A + A^2 + \ldots + A^{20} = A + A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **C9.** $A^4 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, deci $S = 17$. **C10.** $A^{2014} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. **C11.** Se demonstrează că $A^2 = A$, atunci $A^k = A,\ \forall\ k \in \mathbb{N}^*$, deci $A^{2012} - A^{2011} = A - A = O_2$. **C12.** $3a = 12 \Rightarrow a = 4$. **C13.** Se rezolvă sistemul astfel obținut și rezultă $a = -3$, $b = c = 2$ și $d = -1$. **C14.** Se verifică prin calcul. **C15.** Se verifică prin calcul. **C16.** Se verifică prin calcul. **C17.** Din $a + b + c + d = 10,\ a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$, distincte $\Rightarrow \{a, b, c, d\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Atunci numărul matricelor este $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. **C18.** Se rezolvă sistemul și se obține $X = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -5 & -13 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$. **C19.** Se verifică prin calcul. **C20.** $A^2 = -I_2 \Rightarrow A^{2014} = (A^2)^{1007} = (-I_2)^{1007} = -I_2$.

Test 3: **1.** B; **2.** D; **3.** B; **4.** D; **5.** B; **6.** D.

Clasa a XII-a

1. Legi de compoziție

I1.	I2.	I3.	I4.	I5.	I6.	I7.	I8.	I9.	I10.
10	verificare	verificare	3	–1	9	$\hat{1}$	$\hat{4}$	verificare	verificare

C1. $2 \perp 3 = 2^3 + 3^2 = 17$. **C2.** $t * t = t^2 - 8t + 20 \Rightarrow t = 4$. **C3.** Verificare. **C4.** $x + y = 2k + 2l = 2(k + l) \in A$. **C5.** $x \circ y = (x + 4)(y + 4) - 4 > -4$, $\forall\, x, y \in G$. **C6.** Verificare. **C7.** Verificare. **C8.** $xy = (2k + 1)(2l + 1) = 4kl + 2k + 2l + 1 = 2(2kl + k + l) + 1$ și concluzia. **C9.** Se obține $x = 0$. **C10.** Verificare. **C11.** Din $x * x' = 3 \Rightarrow x' = \frac{2x-3}{x-2} \Rightarrow x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$. **C12.** $x * 2 = x$, $\forall\, x \Rightarrow a = 2$. **C13.** Se obține $a = 12$. **C14.** Verificare. **C15.** Se deduce din tabla operației. **C16.** $x \perp x \perp x = (x - 2)^3 + 2 = 10 \Rightarrow x - 2 = 2 \Rightarrow x = 4$. **C17.** $x, y \in A$, $x = a + b\sqrt{3}$, $y = c + d\sqrt{3}$. Atunci $xy = (ac + 3bd) + (ad + bc)\sqrt{3}$ și concluzia. **C18.** Deoarece $x \perp 2 = 2$, $\forall\, x \Rightarrow 10 \perp 9 \perp ... \perp 1 \perp 0 = 2$. **C19.** $(x * y) * z = \sqrt[3]{(x*y)^3 + z^3 + 1} = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3 + 2}$ etc.

C20. $a * b = (a - 2)(b - 2) + 2$. Putem alege, de exemplu, $a - 2 = \frac{3}{2}$ și $b - 2 = \frac{2}{3}$ etc.

Test 3: 1. A; **2.** B; **3.** C; **4.** D; **5.** C; **6.** B.

2. Structuri algebrice. Morfisme

I1.	I2.	I3.	I4.	I5.	I6.	I7.	I8.	I9.	I10.
verificare	verificare	verificare	verificare	verificare	verificare	$\hat{3}$	$\{\hat{0},\ \hat{2},\ \hat{4}\}$	$\hat{0}$	$\hat{1}+\hat{3}=\hat{0}$

C1. Se verifică axiomele, iar $e = 2$. **C2.** Elementul neutru este 4. Se verifică axiomele. **C3.** Calculul se simplifică dacă utilizăm relația $X(a)X(b) = X(a + b)$. **C4.** Se verifică. **C5.** Se verifică. **C6.** $f(x \circ y) = xy - 3x - 3y + 9 = (x - 3)(y - 3) = f(x)f(y)$. **C7.** Din tabla operației se obține partea stabilă și comutativitatea. Elementul neutru este $\hat{0}$, iar $\hat{2}$ și $\hat{4}$ sunt simetrice unul celuilalt. **C8.** Se verifică. **C9.** Verificare. **C10.** Verificare. Elementele neutre sunt 1 și respectiv 2. **C11.** $\det(A) \neq 0$. **C12.** Suma este egală cu $\hat{4}$. **C13.** $\hat{2}^3 = \hat{0} \Rightarrow \hat{2}^{2012} = \hat{0}$. **C14.** Elementele inversabile sunt $\hat{1}$ și $\hat{5}$, iar produsul lor este $\hat{5}$. **C15.** $\det A = \hat{1} + \hat{1} + \hat{2} - \hat{2} - \hat{2} - \hat{2} = \hat{4}$. **C16.** Se obține $a = 1$. **C17.** Verificare. **C18.** Se folosește relația $Ax \cdot Ay = A(x+y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. **C19.** $S = \hat{2} + \hat{5} = \hat{1}$, $P = \hat{0} + \hat{1} + \hat{3} + \hat{4} = \hat{2} \Rightarrow S + P = \hat{3}$. **C20.** $y = \hat{5} + \hat{4}x \Rightarrow \hat{5}x + \hat{3} + x = \hat{2} \Rightarrow \hat{6}x = \hat{6} \Rightarrow x = \hat{1} \Rightarrow y = \hat{2}$.

Test 3: 1. C; **2.** B; **3.** A; **4.** D; **5.** C; **6.** B.

Teste pentru Bacalaureat, după modelul M.E.

• Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
• Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
• Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

1. Modele de teste rezolvate pentru examenul de Bacalaureat

Testul 1

I. 1. Avem $a = \lg 60 - \lg 6 = \lg 10 = 1$. **2.** $\Delta = -4a^2 < 0$, $(\forall)\ a \in \mathbb{R}^*$. **3.** Din $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ rezultă $f\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot f(-1)f(0)f(1); f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. **4.** Avem $A = \{C_4^3,\ C_5^2,\ C_4^2\} = \{4, 6, 10\}$. Notăm p = probabilitatea ca un element din A să fie divizibil cu 3, obținem $p = \frac{1}{3}$. **5.** Notăm M mijlocul lui AB, punctul M va avea coordonatele $M(4, 6)$, de unde $d(C, M) = 4\sqrt{2}$. **6.** Cum $\cos 120° = -\cos 60°$, avem $(\cos 120° + \cos 60°)(\sin 135° - \sin 45°) = 0$. **II. 1.** a) Verificare; b) $\Delta = -5a$; c) Pentru $a \neq 0$, obținem $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$ soluția sistemului. **2.** a) Din tabla operației rezultă că H e parte stabilă; b) $x \in \{\hat{0}, \hat{2}, \hat{4}, \hat{6}\}$. c) Deoarece $x^3 = \hat{0}$, pentru orice $x \in H \Rightarrow$ suma este $\hat{0}$.
III. 1. a) $f'(x) = e^x - 1$; b) Din a) $x = 0$ punct de minim pentru f. De aici, f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0)$ și strict crescătoare pe $(0, \infty)$; c) Deoarece $x = 0$ este punct de minim, alegând $x = \frac{1}{2}$, găsim $f\left(\frac{1}{2}\right) \geq 1$, adică $\sqrt{e} \geq \frac{3}{2}$. **2.** a) $\int_1^4 \frac{f(x)}{\ln x}dx = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\Big|_1^4 = 2$; b) $\mathcal{V} = \pi\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx = \pi\int_0^1 t^2 dt = \frac{\pi}{3}$; c) Deoarece $\ln x \leq 0$ pentru orice $x \in \left[\frac{1}{e}, 1\right]$, rezultă $f(x) \leq 0$ și de aici concluzia.

Testul 2

I. 1. 11. **2.** $x \in \{-5, 5\}$. **3.** Se obține rația $r = 4$, $a_{2012} = 8046$. **4.** $x = 1000$. **5.** $m = 5$. **6.** Avem $\sin 70° = \cos 20°$, de unde $\sin^2 20° + \cos^2 20° = 1$. **II. 1.** a) $A^2 = \begin{pmatrix} 25 & 18 \\ 18 & 13 \end{pmatrix}$, de unde $A^2 - 6A - I_2 = \begin{pmatrix} 25 & 18 \\ 18 & 13 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 18 \\ 18 & 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 25 & 18 \\ 18 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$;

punct de minim; c) $f(x) = (x + 2)^2(x - 4)$, de unde $f(x) \le 0$, $(\forall)\ x \in (-\infty, +4)$. **2.** a) $\int_0^1 xe^x dx = 1$;

b) $\int_0^1 xe^{x^2} dx = -\frac{1}{2}\int_1^e dt = \frac{e-1}{2}$; c) $I_{100} - I_{99} = \int_0^1 (xe^{x^{100}} - xe^{x^{99}})dx = \int_0^1 xe^{x^{99}}(x-1)dx < 0$, $(\forall)\ x \in$

$\in (0, 1)$, de unde concluzia.

Testul 11

I. 1. Din $x + 3 = \frac{8+2}{2}$, obținem $x = 2$. **2.** $f(-3) - f(-1) + f(1) - f(3) = 3^{2012} + 9 + 1 - 1 - 1 -$ $- 1 + 1 + 1 + 1 - 3^{2012} - 9 - 1 = 0$. **3.** $C_6^5 = 6$ reprezintă numărul submulțimilor cu 5 elemente. În total, vom avea 7 submulțimi cu cel puțin 5 elemente. **4.** Avem $\frac{1}{\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|} = \sqrt{3}+\sqrt{2} > 1$, $\log_2\frac{1}{8} = -3$. Obținem $\log_2\frac{1}{8} < 0$, (13) $< \frac{1}{\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|}$. **5.** Avem $AB = \sqrt{10}$, $AC = \sqrt{10}$, $BC = \sqrt{8}$, de unde concluzia. **6.** Cum $\cos 170° = -\cos 10°$, $\cos 150° = -\cos 30°$, $\cos 130° = -\cos 50°$, $\cos 110° = -\cos 70°$, $\cos 90° = 0$, avem concluzia. **II. 1.** a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$, de unde $A^2 - I_2 =$ $= O_2$; b) Din $A^2 = I_2 \Rightarrow A$ este inversabilă și $A^{-1} = A$; c) Din $A^2 - I_2 = O_2 \Rightarrow (A - I_2)(A + I_2) = O_2$, deci putem alege $X = A - I_2$, $Y = A + I_2$. **2.** a) $\hat{0}$; b) $(x \oplus y) \oplus z = x + y + z$; c) $e = \hat{3}$.

III. 1. a) $f'(x) = \left(\frac{x^3+2x^2+2}{x^2+1}\right)' = \frac{(3x^2+4x)(x^2+1)-2x(x^3+2x^2+2)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$; b) $f'(x) = 0$ conduce la abscisa punctului critic $x = 0$. Cum derivata este crescătoare, f nu admite puncte extremale; c) Avem $m = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{x} = 1$, $n = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - x) = 2$, de unde ecuația asimptotei $y =$ $= x + 2$. **2.** a) $F(x) = \int f(x)dx = e^x - e^{2-x} + C$, $C \in \mathbb{R}$; b) $y(x) = e^x$. Volumul corpului va fi $\mathcal{V} =$ $= \pi\int_0^2 g^2(x)dx = \pi\int_0^2 e^{2x}dx = \frac{e^4-1}{2}$; c) În inegalitatea $a + b \ge 2\sqrt{ab}$, $a, b > 0$, luăm $a = e^x$, $b =$ $= e^{2-x}$. Imediat $e^x + e^{2-x} \ge 2e$, de unde $\int_0^2 f(x)dx \ge \int_0^2 2e = 4e$.

Testul 12*

I. 1. $3\sqrt{2} = \sqrt{18} > \sqrt{16} = 4 \Rightarrow x = 4$. **2.** $\Delta = m^2 + 4m + 8 = (m + 2)^2 + 4 > 0$, $(\forall)\ m \in \mathbb{R}$. **3.** $x \in [0, \infty)$. **4.** $C_4^0 + C_4^2 + C_4^4 = 1 + 6 + 1 = 2^3$. **5.** $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \frac{\overrightarrow{BC}}{2} + \frac{\overrightarrow{CA}}{2} + \frac{\overrightarrow{AB}}{2} = \overrightarrow{O}$.

strict descrescătoare pe $(1,\infty)$. **2.** a) $g'(x)=\ln x + x\cdot\frac{1}{x}-1=\ln x = f(x)$, deci g este o primitivă a lui f; b) $\int_e^{e^2} f(x)dx = g(x)\Big|_e^{e^2}$. Dar $g\left(e^2\right)=2e^2-e^2=e^2$, $g(e)=e-e=0$, deci $\int_e^{e^2} f(x)dx=e^2$; c) $\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx=\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$. Schimbarea de variabilă $\ln x = t$ conduce la $\int_0^1 tdt=\frac{t^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}$.

Testul 23

I. 1. $x+2=\frac{2+10}{2}$; $x=4$. **2.** $f(1)+f(2)=2+5=7$. **3.** $x^2+5=9\Rightarrow x^2-4=0$; $x_1=-2$ și $x_2=2$, care verifică ecuația. **4.** $C_6^2=15$. **5.** $d \parallel h\Rightarrow m_d=m_h=1$, $d: y-2=1\cdot(x-2)$, deci $d: y=x$. **6.** $E\left(90^\circ\right)=\sin 30^\circ+\cos 45^\circ=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

II. 1. a) $A(1)+A(2)+A(3)+...+A(10)\begin{pmatrix}55 & 20\\ 30 & 60\end{pmatrix}$; b) $\det(A)=6m-6=6(m-1)$, deci este număr par; c) Avem $A(p+1)-A(p)=6>0$ și de aici concluzia. **2.** a) Verificare; b) $x*x=2$; c) Din punctul anterior avem $(2*2)\cdot(4*4)\cdot(6*6)\cdot...\cdot(10*10)=2^5$, deci $2^{3x}=2^5$, adică $x=\frac{5}{3}$.

III. 1. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^6}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^6-6x+10}{x^6}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{6}{x^5}+\frac{10}{x^6}\right)=1$; b) Avem $f'(x)=6x^5-6$. Ecuația $f'(x)=0$ are soluția $x=1$. Deoarece $f'(x)<0$ pentru $x<1$ și $f'(x)>0$ pentru $x>1$, deducem că $x=1$ este punct minim. Cum $f(1)=5$, punctul de minim are coordonate $(1;5)$; c) Conform punctului anterior, deducem că $f(0,9)>5$ și $f(1,1)>5$. Adunăm cele două inegalități și obținem concluzia. **2.** a) $\int\limits_1^2 f(x)=\int\limits_1^2\left(3x^2-2x+1\right)dx=x^3\Big|_1^2-x^2\Big|_1^2+x\Big|_1^2=8-1-4+1+2-1=5$; b) Schimbarea de variabilă $f(x)=t$ conduce la egalitatea $(6x-2)dx=dt$. Obținem $\int\limits_2^9 t^2dt=\frac{t^3}{3}\Big|_2^9=\frac{721}{3}$; c) $\int\limits_0^1 e^x f(x)dx=\int\limits_0^1 e^x\left(3x^2-2x+1\right)dx=e^x\left(3x^2-2x+1\right)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 e^x(6x-2)dx=2e-1-e^x(6x-2)\Big|_0^1+\int\limits_0^1 6e^xdx=2e-1-4e-2+6e-6=4e-9$.

Cuprins

Clasa a XII-a

TESTE PENTRU BACALAUREAT, DUPĂ MODELUL M.E.