Anton NEGRILĂ
Maria NEGRILĂ

matematică
algebră
geometrie

clasa a VII-a

partea I

ediția a XIV-a, revizuită

mate 2000 – consolidare

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.N. nr. 4696/02.08.2019.
Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programa școlară în vigoare pentru clasa a VII-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Referință științifică: Lucrarea a fost definitivată prin contribuția și recomandările Comisiei științifice și metodice a publicațiilor Societății de Științe Matematice din România. Aceasta și-a dat avizul favorabil în ceea ce privește alcătuirea și conținutul matematic.

Director de producție editorială: Ionuț Burcioiu

Redactare: Roxana Pietreanu, Andreea Roșca
Tehnoredactare: Adriana Vlădescu
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
NEGRILĂ, ANTON
Matematică : algebră, geometrie : clasa a VII-a / Anton Negrilă, Maria Negrilă. – Ed. a 14-a, adăug. – Pitești : Paralela 45, 2025 – 2 vol.
ISBN 978-973-47-4292-9
Partea 1. – 2025. – ISBN 978-973-47-4293-6

I. Negrilă, Maria

51

COMENZI – CARTEA PRIN POȘTĂ

EDITURA PARALELA 45
Bulevardul Republicii, Nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești, jud. Argeș, cod 110177
Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918
Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492
E-mail: **comenzi@edituraparalela45.ro**
sau accesați **www.edituraparalela45.ro**

Tiparul executat la tipografia *Editurii Paralela 45*
E-mail: tipografie@edituraparalela45.ro

Recapitulare şi evaluare inițială

PE Teste cu exerciţii şi probleme recapitulative pentru pregătirea testării iniţiale

ALGEBRĂ

✹ TESTUL 1 ✹

1. a) Se consideră numerele:

$a = (-4) \cdot (+6) - [(-24) : (+3) - (-28) : (-7) - (+16) : (-8)]$ și

$b = [(-6) \cdot (+2) - (-5) \cdot (+3) - (-7) \cdot (-3)] : (-12 + 15)$.

Calculați $n = a - b$.

b) Se consideră numerele:

$x = (-3) \cdot (+7) - [(-18) : (+3) - (+24) : (-6) + (-32) : (-4)] \cdot (-11 + 9)$ și

$y = [(-7) \cdot (+4) - (-8) \cdot (+3) - (-6) \cdot (-2)] : (-6 + 8)$.

Calculați $n = x + y$.

2. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuațiile:

a) $27 - 3(2x - 3) = 18$; b) $2(3x + 4) - 15 = 11$;

c) $2(5x - 13) + 33 = 3(2x + 1) + 20$; d) $3x + 5 - 2(x + 2) = 8 + 3(x - 1)$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale inecuațiile:

a) $11 - 2(3x - 4) > 1$; b) $2(2x + 1) + 13 \le 3(x - 1) + 22$;

c) $17x + 19 \le 6(2x + 5) + 2(x - 5) + 11$.

4. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi inecuațiile:

a) $|x + 3| \le 2$; b) $|2x + 5| < 9$; c) $2[3 \cdot |2x - 7| - 7] - 23 < 17$.

5. Determinați valorile întregi ale lui n, pentru care:

a) $\frac{n+10}{n+1} \in \mathbb{Z}$; b) $\frac{3n+14}{n+2} \in \mathbb{Z}$; c) $\frac{4n+7}{2n-1} \in \mathbb{Z}$; d) $\frac{3n+8}{2n+1} \in \mathbb{Z}$.

6. Calculați:

a) $\left(-\frac{5}{16}\right) \cdot \left(+\frac{8}{25}\right) + \left(-\frac{12}{25}\right) \cdot \left(-\frac{15}{16}\right)$; b) $\left(+\frac{16}{21}\right) \cdot \left(-\frac{35}{32}\right) - \left(-\frac{24}{49}\right) \cdot \left(+\frac{21}{32}\right)$;

c) $\left(-\frac{5}{18} + \frac{7}{12}\right) \cdot \left(-1\frac{1}{11}\right) - \left(-\frac{13}{24} + \frac{7}{18}\right) \cdot \left(-1\frac{5}{22}\right)$;

d) $\left(-\frac{1}{10} + \frac{2}{15}\right) \cdot \left(-7\frac{1}{2}\right) + (-4) \cdot \left(-\frac{7}{20} + \frac{4}{15}\right)$.

7. Numerele 377, 517 și 803, împărțite la același număr natural nenul n, dau câturile nenule și resturile egale cu 17, 13 și, respectiv, 11. Determinați valorile împărțitorului n.

8. Determinați cel mai mic număr natural n, care împărțit pe rând la 20, 24 și, respectiv, 28, se obțin câturile nenule, iar resturile egale cu 14, 18 și, respectiv, 22.

9. Determinați cifrele a și b, astfel încât următoarele relații să fie adevărate:

a) $\overline{a24b} \,\vdots\, 12$; b) $\overline{a68b} \,\vdots\, 18$; c) $\overline{7a4b} \,\vdots\, 36$.

10. a) Determinați numerele naturale nenule a și b, cu $a < b$, pentru care $(a; b) = 12$ și $[a; b] = 504$.

b) Se consideră numerele naturale nenule a și b, cu $a < b$, pentru care $(a; b) = 15$ și $[a; b] = 1575$. Determinați valorile diferenței $b - a$.

11. Arătați că pentru orice număr natural n, fracțiile de mai jos sunt ireductibile:

a) $\dfrac{9n+17}{12n+23}$; b) $\dfrac{8n+11}{12n+17}$; c) $\dfrac{6n+7}{9n+10}$; d) $\dfrac{9n+11}{12n+15}$.

12. Arătați că, pentru orice număr natural n, numărul

$$A = 3^{n+1} \cdot 2^{2n} \cdot 24 + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+2} + 2^{n+3} \cdot 6^n - 3^{n+1} \cdot 4^{n+2}$$

se divide cu 17.

13. Arătați că, pentru orice număr natural n, numărul

$$A = 4^{n+4} - 5 \cdot 4^{n+3} + 7 \cdot 4^{n+2} - 3 \cdot 4^{n+1} + 6 \cdot 4^n$$

este divizibil cu 21.

TESTUL 2

1. a) Se consideră numerele:

$a = (-7 + 11) \cdot [(+7) \cdot (-5) - (-8) \cdot (+4)]$ și $b = (-12 + 9) \cdot [(-5) \cdot (+9) + (-6) \cdot (-8)]$.

Calculați $n = a - 2b$.

b) Se consideră numerele:

$x = (-8 + 12) \cdot [(-7) \cdot (-6) - (-8) \cdot (-9) - (+3) \cdot (-8)]$ și

$y = (-15 + 12) \cdot [(-72) : (-9) - (-56) : (+8) - (-54) : (-6)]$.

Calculați $n = x - y$.

2. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuațiile:

a) $5x - 2(x - 7) - 9 = x + 15$; b) $3(2x + 7) - 14 = 2(2x - 5) + 3$;

c) $2[3(2x - 3) - 8] - 9 = 5$; d) $3(3x + 4) - 5 = 2(2x + 7) + 13$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi inecuațiile:

a) $|x + 4| < 3$; b) $2 \cdot |x - 2| + 7 \leq 13$; c) $|2x - 1| < 7$.

4. Calculați:

a) $\left(-\dfrac{15}{16}\right) \cdot \left(+\dfrac{28}{25}\right) - \left(-\dfrac{12}{25}\right) \cdot \left(+\dfrac{15}{18}\right)$; b) $\left(-\dfrac{16}{21}\right) \cdot \left(+1\dfrac{3}{32}\right) - \left(-\dfrac{26}{45}\right) \cdot \left(+\dfrac{10}{13}\right)$;

c) $\left(-\dfrac{7}{10} + \dfrac{8}{15}\right) : \left(-\dfrac{4}{15}\right) - \left(-\dfrac{8}{15} + \dfrac{9}{20}\right) \cdot \left(-2\dfrac{1}{4}\right)$; d) $\left[-\dfrac{4}{7} + \left(-\dfrac{3}{35}\right) : \left(-\dfrac{9}{25}\right)\right] : \left(-\dfrac{2}{7}\right)$.

5. Determinați valorile întregi ale lui n, pentru care:

a) $\dfrac{n+9}{n+1} \in \mathbb{Z}$; b) $\dfrac{2n+16}{n+2} \in \mathbb{Z}$; c) $\dfrac{4n+33}{2n-1} \in \mathbb{Z}$; d) $\dfrac{3n+19}{2n+1} \in \mathbb{Z}$.

6. Împărțind numerele 229, 197 și 263 la același număr natural nenul, se obțin câturile nenule și resturile 13, 17 și, respectiv, 11. Aflați toate valorile împărțitorului.

7. Determinați numerele naturale nenule a și b, cu $a < b$, pentru care $(a; b) = 12$ și $[a; b] = 360$.

8. Determinați cel mai mic număr natural nenul, știind că împărțindu-l pe rând la 27, 36 și, respectiv, 48, se obțin câturile nenule, iar resturile egale cu 21, 30 și, respectiv, 42.

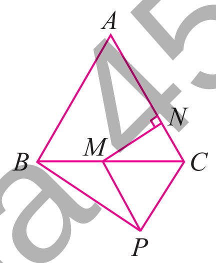
GEOMETRIE

✹ TESTUL 1 ✹

1. Se consideră triunghiul isoscel ABC, cu $AB \equiv AC$ și $AM \equiv AN$, unde $M \in AB$, iar $N \in AC$ și $BN \cap CM = \{P\}$. Arătați că:

a) $BN \equiv CM$; b) $PM \equiv PN$; c) $AP \perp BC$.

2. În figura alăturată, triunghiurile ABC și PMC sunt echilaterale, punctul M este mijlocul laturii BC, iar punctul N este piciorul perpendicularei duse din M pe latura AC.



a) Arătați că dreptele AB și CP sunt paralele.
b) Calculați măsura unghiului ABP.
c) Dacă pe semidreapta AB se ia un punct T astfel încât punctul B să fie interior segmentului AT, iar $BT = \dfrac{AB}{2}$, arătați că punctele T, M și N sunt coliniare.

3. Se consideră triunghiul ABC, iar punctul D este mijlocul laturii BC, astfel încât $AD \equiv BD \equiv CD$.

a) Arătați că $\sphericalangle BAC = 90°$. b) Dacă $\sphericalangle B = 2\sphericalangle C$, arătați că $BC = 2AB$.

4. Se consideră triunghiul isoscel ABC, $AB \equiv AC$, în care punctele D și E sunt mijloacele laturilor AC și AB. Știind că punctul M este simetricul punctului C față de E și N este simetricul punctului B față de D, demonstrați că:

a) $BD \equiv CE$; b) $AM \equiv AN$;
c) punctele M, A, N sunt coliniare.

5. Se consideră triunghiul isoscel ABC, $AB \equiv AC$ și $AM \equiv AN$, unde $M \in AB$ și $N \in AC$, iar $BN \cap CM = \{P\}$. Demonstrați că:

a) $BN \equiv CM$; b) ΔBPC este isoscel;
c) semidreapta AP este bisectoarea unghiului BAC.

✹ TESTUL 2 ✹

1. Se consideră triunghiul isoscel ABC, cu $N \in AB$ și $P \in AC$, astfel încât $BN \equiv CP$, iar $BP \cap CN = \{M\}$. Arătați că:

a) $BP \equiv CN$; b) $NP \parallel BC$; c) Triunghiul BMC este isoscel.

2. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC, cu $\sphericalangle BAC = 90°$, iar punctul D este mijlocul ipotenuzei BC. Se notează cu E simetricul punctului A față de punctul D. Arătați că:

a) $AB \equiv CE$; b) $\sphericalangle ACE \equiv \sphericalangle BAC$; c) $AD = \dfrac{BC}{2}$.

3. În triunghiul ABC, BM și CN sunt înălțimi, $M \in AC$ și $N \in AB$. Pe semidreapta MB se ia punctul P astfel încât $BP \equiv AC$, punctul B fiind interior segmentului PM, iar pe semidreapta NC se ia punctul T astfel încât $CT \equiv AB$, punctul C fiind interior segmentului NT. Arătați că:

a) $\sphericalangle ABP \equiv \sphericalangle ACT$; b) $AP \equiv AT$; c) $\sphericalangle PAT = 90°$.

Algebră

Capitolul I
Mulţimea numerelor reale

PP Competențe specifice

- **C1.** Identificarea numerelor aparţinând diferitelor submulţimi ale lui $\mathbb{R}$
- **C2.** Aplicarea regulilor de calcul pentru estimarea şi aproximarea numerelor reale
- **C3.** Utilizarea unor algoritmi şi a proprietăţilor operaţiilor în efectuarea unor calcule cu numere reale
- **C4.** Folosirea terminologiei aferente noţiunii de număr real (semn, modul, opus, invers)
- **C5.** Elaborarea de strategii pentru rezolvarea unor probleme cu numere reale
- **C6.** Modelarea matematică a unor situaţii practice care implică operaţii cu numere reale

Rădăcina pătrată

PE-PP

1. Rădăcina pătrată a unui număr natural pătrat perfect

• Numărul natural x se numește **pătrat perfect** dacă există numărul întreg a cu proprietatea că $x = a^2$, unde $a \in \mathbb{Z}$.

• Numărul $|a|$ se numește **rădăcina pătrată** a numărului x și se notează cu $\sqrt{x}$.

• $\sqrt{x^2} = |x|$, pentru orice număr întreg x.

Observaţii: Dacă x este un număr natural nenul, pătrat perfect, atunci există două numere distincte al căror pătrat este x, și anume $\sqrt{x}$ și $-\sqrt{x}$. Evident că numai unul dintre ele este număr natural. De aceea, dacă $a \in \mathbb{Z}$, atunci $\sqrt{x^2} = |a|$.

a) $x = a^2$ implică $\sqrt{x} = \sqrt{a^2} = |a|$. b) Dacă $a \geq 0$, atunci $\sqrt{a^2} = a$.

Exemple: $\sqrt{100} = \sqrt{10^2} = |10| = 10$; $\sqrt{64} = \sqrt{(-8)^2} = |-8| = 8$;

$\sqrt{25x^2y^4} = \sqrt{(5xy^2)^2} = |5xy^2| = 5y^2|x|$.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Copiați și completați următorul tabel ($x \in \mathbb{Z}$):

x	-5	-3	-2	0			9	12
x^2					16	36		

2. a) Scrieți toate pătratele perfecte mai mici decât 90.
b) Scrieți toate numerele pătrate perfecte cuprinse între 140 și 290.
c) Scrieți pătratele perfecte de trei cifre, mai mari ca 300.

3. Determinați numerele raționale care au pătratul egal cu:
a) 25; b) 64; c) 121; d) 729; e) 1296.

4. Descompuneți în factori primi numerele următoare și arătați că sunt pătrate perfecte:
a) 36; b) 64; c) 1; d) 169; e) 324; f) 529;
g) $2^8 \cdot 81$; h) $49 \cdot 64 \cdot 5^2$; i) $4^3 \cdot 5^6$; j) $16^3 \cdot (-5)^4$; k) $121 \cdot 169^3$.

5. Stabiliți care dintre următoarele numere sunt pătrate perfecte:
a) 36; 4; 15; 56; 169; 190; 196; 225; 240; 256;
b) 13^2; $(-9)^4$; 3^8; $(-7)^5$; 18^3; $(-12)^{18}$; $(-21)^7$; $(-28)^6$;
c) 5^{8n}; 7^{6n+4}; 28^{n^4+1}; 15^{n^2+n}; 12^{n^2-n+6}, $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$.

6. Fie $A = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ și $B = \{y \mid y = x^2, x \in A\}$.
a) Determinați elementele mulțimii B.
b) Determinați elementele mulțimii $C = \left\{z \mid z = \sqrt{y},\ y \in B\right\}$.

7. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:
a) $\sqrt{64} = 8$; b) $\sqrt{(-5)^2} = -5$; c) $\sqrt{123^2} = 123$;
d) $\sqrt{(-432)^2} = 432$; e) $\sqrt{49a^2} = 7a$, $a < 0$; f) $\sqrt{(-25a^2)^2} = 5a^2$;
g) $\sqrt{(-64a)^4} = 8a^2$; h) $\sqrt{81a^8b^2} = 9a^4b$, $b < 0$.

8. Rezolvați ecuațiile:
a) $x^2 = 36$; b) $x^2 = 1600$; c) $5x^2 = 245$;
d) $-2x^2 = -72$; e) $x^2 + 9 = 265$; f) $x^2 - 14 = 155$;
g) $-3x^2 + 175 = -257$; h) $-2x^2 + 27 = -101$; i) $(x - 3)^2 = 4$;
j) $(x + 4)^2 = 9$; k) $25 - (x + 3)^2 = 9$; l) $-144 - (x - 5)^2 = -225$;
(i) în mulțimea numerelor naturale;
(ii) în mulțimea numerelor întregi.

9. Folosind formula $1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n = \dfrac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$, unde $a \neq 1$ și $n \in \mathbb{N}^*$, calculați:
a) $\sqrt{x+1}$, unde $x = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{201}$;
b) $\sqrt{2x+1}$, unde $x = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{249}$;
c) $\sqrt{4x+1}$, unde $x = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \ldots + 5^{359}$;
d) $\sqrt{8x+1}$, unde $x = 1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + \ldots + 3^{98}$;

29. Calculați:

a) $\sqrt{6^3 \cdot 6}$; b) $\sqrt{11^4 \cdot 9}$; c) $\sqrt{2^6 \cdot 3^4 \cdot 25}$; d) $\sqrt{196 \cdot 2^6 \cdot 81}$;

e) $\sqrt{15^2 - 9^2 + 5^2}$; f) $\sqrt{72^2 - 71^2 + 5^2 + 1}$; g) $\sqrt{7(12^2 - 9^2)}$; h) $\sqrt{2^8(7^2 - 2^4 \cdot 3)}$.

30. Efectuați:

a) $\sqrt{2^6(5^2 - 3^2)}$; b) $\sqrt{5^2 \cdot 2^4 + 5^2 \cdot 3^2}$; c) $\sqrt{5^2 \cdot 17^2 - 2^6 \cdot 5^2}$; d) $\sqrt{13^2 - 5^2 + 9^2}$;

e) $\sqrt{15^2 + 8^2}$; f) $\sqrt{16^2 + 12^2 + 15^2}$; g) $\sqrt{18^2 + 24^2 + 40^2}$; h) $\sqrt{26^2 - 24^2}$.

31. Efectuați calculele:

a) $\sqrt{12^2 + 9^2}$; b) $\sqrt{15^2 - 9^2 + 16^2}$; c) $\sqrt{15^2 + 20^2}$; d) $\sqrt{30^2 - 24^2}$;

e) $\sqrt{3^2 \cdot 5^2 + 2^6}$; f) $\sqrt{3^4 \cdot 13^2 - 3^4 \cdot 5^2}$; g) $\sqrt{2^6 \cdot 7^2 + 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2}$.

PE Aprofundare și performanță ***

32. Efectuați calculele:

a) $\sqrt{6 \cdot \sqrt{576}} + \sqrt{3 \cdot \sqrt{144}}$; b) $\sqrt{760 - \sqrt{961}} + \sqrt{1331 - \sqrt{1225}}$;

c) $\sqrt{63 + 3 \cdot \sqrt{729}} + \sqrt{540 + 2 \cdot \sqrt{324}}$; d) $\sqrt{399240 + \sqrt{32902 + \sqrt{910116}}}$.

33. Calculați:

a) $\sqrt{6911 - \sqrt{261850 - \sqrt{531441}}}$; b) $\sqrt{286594 - \sqrt{135920 + \sqrt{58081}}}$;

c) $\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{455625}}} + \sqrt{18\sqrt{24\sqrt{46656}}}$; d) $\sqrt{669 + \sqrt{75\sqrt{18\sqrt{16384}}}}$.

34. Calculați:

a) $\sqrt{119010 - \sqrt{455025 - \sqrt{561001}}}$; b) $\sqrt{66673 - \sqrt{389963 - \sqrt{344569}}}$.

PE-PP Supermate ****

35. Determinați $x \in \mathbb{N}$, știind că:

a) $\sqrt{1 \cdot 7 + 6 \cdot 7 + 6 \cdot 7^2 + 6 \cdot 7^3 + \ldots + 6 \cdot 7^{2019}} = 7^x$;

b) $9\sqrt{3^{2018} - 2 \cdot 3^{2017} - 2 \cdot 3^{2016} - \ldots - 2 \cdot 3 - 2} = 3^x$;

c) $\sqrt{1 + 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + \ldots + 2 \cdot 3^{2019}} = 3^x$;

d) $\sqrt{2^{1980} - 2^{1979} - 2^{1978} - \ldots - 2^{1002}} = 2^x$;

e) $\sqrt{13 + 12 \cdot 13 + 12 \cdot 13^2 + 12 \cdot 13^3 + \ldots + 12 \cdot 13^{2018} + 12 \cdot 13^{2019}} = 13^{2x}$.

36. Demonstrați că numărul $a = 5^{2n+1} \cdot 4^{3n+2} + 10^{2n+1} \cdot 2^{4n+1}$ este pătrat perfect, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

37. Calculați $x \in \mathbb{N}$, știind că $\sqrt{3^{600} - 2 \cdot 3^{599} - 2 \cdot 3^{598} - 2 \cdot 3^{597} - \ldots - 2 \cdot 3^{479} - 2 \cdot 3^{478}} = 3^x$.

38. Câte pătrate perfecte conțin mulțimile:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \le x \le 144\} \text{ și } B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 400\}?$$

PE **Nume** ________________________________ **Clasa** _______

Test de autoevaluare

• *Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 100 de minute.*

I. Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate. (3 puncte)

(0,5p) **1.** Pătratele perfecte de trei cifre sunt ....

(0,5p) **2.** Numerele întregi x pentru care $2x^2 - 183 = 465$ sunt ....

(0,5p) **3.** Valoarea de adevăr a propoziției „Numerele naturale de forma $4n + 2$ sunt pătrate perfecte, pentru orice $n \in \mathbb{N}$." este ....

(0,5p) **4.** Soluția ecuației $x = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 1999$, în mulțimea numerelor naturale este ....

(0,5p) **5.** Fie numărul natural $x = 2(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 80) - 6399$. Atunci valoarea lui $\sqrt{x}$ este ....

(0,5p) **6.** Dacă $a = \sqrt{(-2)^4(-3)^6(-7)^2(-11)^2}$, atunci valoarea lui a este ....

II. Încercuiți răspunsul corect. (2 puncte)

(0,5p) **1.** Rădăcina pătrată a numărului $x = 18^2 + 24^2 + 40^2$ este:

A. 30; B. 40; C. 50; D. 60.

(0,5p) **2.** Numărul natural x care verifică egalitatea:

$\sqrt{1 \cdot 6 + 5 \cdot 6 + 5 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6^3 + \ldots + 5 \cdot 6^{2019}} = 36^{101x}$ este:

A. 3; B. 4; C. 5; D. 6.

(0,5p) **3.** Rădăcina pătrată a numărului $x = (-9)^2 + (-12)^2 + (-12)^2 + (-16)^2$ este:

A. 20; B. 25; C. 30; D. 35.

(0,5p) **4.** Valoarea numărului:

$$x = \sqrt{29 \cdot 30\left[\left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{44 \cdot 45}\right) - \left(\frac{1}{45 \cdot 46} + \frac{1}{46 \cdot 47} + \frac{1}{47 \cdot 48} + \ldots + \frac{1}{89 \cdot 90}\right)\right]}$$ este:

A. 26; B. 27; C. 28; D. 29.

III. Scrieți rezolvările complete. (4 puncte)

(1p) **1.** Determinați valorile naturale nenule ale numărului n, astfel încât radicalul $\sqrt{\dfrac{25 - 4n}{6}}$ să existe.

(1p) **2.** Calculați valoarea numărului:

$$x=\sqrt{3\left[\left(\frac{3}{1\cdot 4}+\frac{3}{4\cdot 7}+\frac{3}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{3}{74\cdot 77}+\frac{3}{77\cdot 80}\right)-\left(\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{2}{73\cdot 75}\right)\right]}.$$

(1p) **3.** Fie numărul $x = 9^{2n} \cdot 144^{n+1} + 12^{2n} \cdot 81^{n+1} + 25 \cdot 2^{4n+4} \cdot 3^{6n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că $\sqrt{x}$ este număr natural par, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

(1p) **4.** Arătați că numărul $x=\dfrac{2\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{2018\cdot 2019}+\dfrac{1}{2019\cdot 2020}\right)}{\dfrac{1}{1+2+3+4+\ldots+2018+2019}}$

este pătratul unui număr natural.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	I.5	I.6	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4
Punctajul														
Nota														

Mulțimea numerelor reale

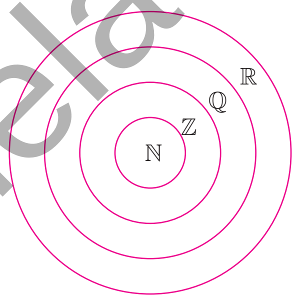
PE-PP

1. Modulul unui număr real. Reprezentarea pe axă a numerelor reale. Aproximări şi rotunjiri. Ordonări

- Numerele care au partea zecimală infinită și neperiodică se numesc **numere iraționale**.
- Dacă $p \in \mathbb{N}^*$ și p nu este pătrat perfect, atunci $\sqrt{p}$ este număr irațional.

Exemple: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{2018}$.

- **Reuniunea** mulțimii numerelor raționale cu mulțimea numerelor iraționale este mulțimea numerelor reale.
- Se notează cu $\mathbb{R}$ mulțimea numerelor reale și cu $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mulțimea numerelor iraționale.
- Avem șirul de incluziuni: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
- $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$; $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$;
  $\mathbb{R} = \mathbb{R}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}_+$; $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.



- **Modulul** unui număr real x este: $|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$.
- $|x| \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
- $|x| = |-x|$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

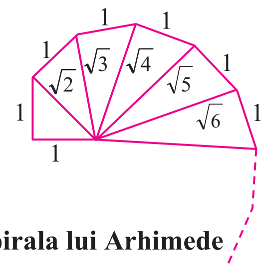
a) Numim **axă** a numerelor reale o dreaptă, cu un punct fixat numit origine, un sens pozitiv și o unitate de măsură.

b) Oricărui **număr real** îi corespunde **un singur punct** pe axa numerelor și, reciproc, oricărui punct de pe axa numerelor îi corespunde un singur număr real.

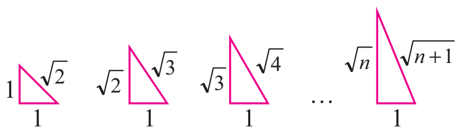
c) **Exercițiu:** Vom arăta că numărul $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Demonstrație. Presupunem că $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Atunci există $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, unde $m, n \in \mathbb{Z}^*$ și $(m, n) = 1$, astfel încât $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$. Rezultă că $m^2 = 2n^2$ (1), de unde 2 divide pe m, adică există $l \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $m = 2l$ (2). Revenind la (1), găsim $2l^2 = n^2$, ceea ce conduce la 2 divide n, adică există $k \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $n = 2k$ (3). Din (2) și (3) obținem că $2 \mid (m, n)$, în contradicție cu ipoteza $(m, n) = 1$. Prin urmare, $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

d) Numerele iraționale se reprezintă pe axă în două moduri:
(i) prin aproximare cu numere zecimale;
(ii) prin utilizarea compasului și a construcției următoare:



Spirala lui Arhimede



e) Are loc următorul rezultat: Dacă $a \in \mathbb{Q}^*$ și $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci:

i) $a + b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; ii) $a \cdot b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

• Fie x și y două numere reale astfel încât x este la **stânga** lui y pe axa numerelor. Spunem că x este **mai mic** decât y și scriem $x < y$ sau spunem că y este mai mare decât x și scriem $y > x$.

Dacă $x < y$ sau $x = y$, spunem că x este mai mic sau egal cu y și scriem $x \le y$ sau că y este mai mare sau egal cu x și scriem $y \ge x$.

Dacă $|x| < |y|$, atunci și $\sqrt{|x|} < \sqrt{|y|}$ și reciproc.

• **Partea întreagă** a unui număr real x, notată $[x]$, este cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu x.

Exemple: a) $[3,24] = 3$; b) $[-2,87] = -3$.

• Fie x un număr real. Diferența $x - [x]$ se numește **partea fracționară** a lui x, notată $\{x\}$.

Exemple: a) $\{5,75\} = 5,75 - 5 = 0,75$; b) $\{-5,75\} = -5,75 - (-6) = 6 - 5,75 = 0,25$.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a) $-4 \in \mathbb{Z}$; b) $-\frac{3}{4} \in \mathbb{Q}$; c) $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$; d) $0 \notin \mathbb{N}$; e) $-\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{9}} \in \mathbb{Q}$; f) $\sqrt{18} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

g) $-\sqrt{64} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; h) $\frac{-32}{8} \in \mathbb{Z}$; i) $\frac{3\sqrt{5}}{2} \in \mathbb{Q}$; j) $\{3, 4, 5\} \subset \mathbb{Z}$; k) $\{-7\} \subset \mathbb{Z}$;

l) $\sqrt{11} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; m) $\left\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right\} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; n) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \not\subset \mathbb{N}$;

o) $\left\{-\frac{1}{3}; 0,(6); -\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{49}}; 1,41(6); 1,2(7)\right\} \subset \mathbb{Q}$; p) $\left\{-\frac{3}{8}; -2,91(6); 2,3(8); \frac{-4\sqrt{25}}{\sqrt{9}}; \frac{5\sqrt{36}}{-\sqrt{49}}\right\} \not\subset \mathbb{Q}$.

2. Se consideră numerele: -7; -4; 6; $\frac{2}{3}$; $-\sqrt{64}$; $2,08(3)$; $-\sqrt{3}$; $-\sqrt{12}$; $\sqrt{(-15)^2}$; $\sqrt{(-18)^2}$; $-0,8(3)$; 2; 17; $\sqrt{144}$; $-\sqrt{169}$. Precizați care dintre numerele de mai sus sunt:

a) numere naturale; b) numere raționale; c) numere întregi;
d) numere negative; e) numere reale; f) numere iraționale.

3. Fie mulțimea $A = \{x \mid x = \sqrt{n}, n \in \mathbb{N}, n \le 125\}$. Determinați probabilitatea ca, alegând la întâmplare numărul n, numărul corespunzător x să fie:

a) rațional; b) irațional.

4. a) Reprezentați pe axă punctele: $A(\sqrt{4})$; $B\left(\sqrt{\frac{49}{4}}\right)$; $C\left(-\sqrt{\frac{128}{2}}\right)$; $D(-\sqrt{6,25})$.

b) Fie E, F, G, H simetricele punctelor A, B, C, respectiv D, față de originea axei. Determinați abscisele punctelor E, F, G, H și reprezentați pe axă aceste puncte.

c) Calculați abscisele punctelor M, N, P, Q, mijloacele segmentelor HB, GA, CE, respectiv FD și reprezentați-le pe axă.

d) Determinați lungimile segmentelor $|CG|$, $|EA|$, $|DH|$, $|QM|$, $|MN|$, $|PA|$.

5. Se dau numerele $\sqrt{125}$; $\sqrt{4,25}$; $\sqrt{245,64}$; $\sqrt{1200}$; $\sqrt{256,24}$.

a) Aproximați prin lipsă, la sutime, numerele de mai sus.
b) Aproximați prin adaos, la sutime, numerele de mai sus.

PE-PP Recapitulare şi sistematizare prin teste

TESTUL 1

• *Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.*

(1p) **1.** Calculați:

a) $\sqrt{121}$; b) $\sqrt{18^4}$; c) $\sqrt{12^2+16^2}$; d) $\sqrt{40^2-24^2}$.

(1p) **2.** Arătați că numărul $a = 2(1 + 2 + 3 + \ldots + 224) + 225$ este pătrat perfect şi apoi calculați $\sqrt{a}$.

(1p) **3.** Folosind algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate, calculați:

a) $\sqrt{6084}$; b) $\sqrt{28224}$; c) $\sqrt{300304}$.

(2p) **4.** Calculați $\sqrt{9+9\cdot\sqrt{64}}-\sqrt{13^2-5^2}+100\cdot\sqrt{0,0324}$.

(2p) **5.** Fie mulțimea $A=\left\{-\frac{4}{7}; 0,8(3); \frac{8}{4}; \sqrt{81}; \sqrt{98}; \frac{\sqrt{6}}{2}; 0,28; \frac{3}{\sqrt{0,36}}; \sqrt{50}; -\frac{4,5}{\sqrt{0,0625}}\right\}$.

Scrieți elementele mulțimilor: $A \cap \mathbb{N}$; $A \cap \mathbb{Z}$; $A \cap \mathbb{Q}$; $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$; $A \cap (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})$.

(2p) **6.** Aflați cel mai mare număr întreg mai mic decât $\sqrt{336}$.

TESTUL 2

• *Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.*

(1p) **1.** Calculați:

a) $\sqrt{196}$; b) $\sqrt{16^6}$; c) $\sqrt{24^2+32^2}$; d) $\sqrt{45^2-27^2}$.

(1p) **2.** Arătați că numărul $a = (2 + 4 + 6 + \ldots + 288) - 144$ este pătrat perfect şi apoi calculați $\sqrt{a}$.

(1p) **3.** Folosind algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate, calculați:

a) $\sqrt{7569}$; b) $\sqrt{55696}$; c) $\sqrt{219024}$.

(2p) **4.** Calculați $\sqrt{36+12\sqrt{81}}-\sqrt{30^2-24^2}+100\cdot\sqrt{0,0256}$.

(2p) **5.** Fie mulțimea $A=\left\{-3,24; -2,(6); \sqrt{9}; \sqrt{10}; \frac{\sqrt{6^2}}{3}; \sqrt{2\frac{7}{9}}; -\sqrt{12}; \sqrt{18}; \sqrt{49}; 0,08(3); -\sqrt{64}\right\}$.

Scrieți elementele mulțimilor: $A \cap \mathbb{N}$; $A \cap \mathbb{Z}$; $A \cap \mathbb{Q}$; $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$; $A \cap (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})$.

(2p) **6.** Aflați cel mai mic număr întreg mai mare decât $\sqrt{260}$.

PE-PP **8.** Ecuaţii de forma $x^2 = a,\ a \in \mathbb{R}$

- A **rezolva** o ecuație de forma $x^2 = a$, cu $a \in \mathbb{R}$, în mulțimea $P \subseteq \mathbb{R}$, înseamnă a determina toate valorile $x_0 \in P$ pentru care propoziția $x_0^2 = a$ este adevărată.
- **Valorile** găsite, dacă există, se numesc **soluții** ale ecuației, iar mulțimea lor, notată de obicei cu S, se numește **mulțimea soluțiilor** ecuației. Dacă mulțimea P nu este precizată, se consideră $P = \mathbb{R}$.
- **Rezolvarea ecuației $x^2 = a$, unde $a \in \mathbb{Q}$**, necesită analiza a trei cazuri:

1. Dacă $a < 0$, atunci $S = \varnothing$, deoarece $x^2 \geq 0 > a$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
2. Dacă $a = 0$, atunci ecuația devine $x^2 = 0$, având soluția unică $x = 0$. Deci, $S = \{0\}$.
3. Dacă $a > 0$, atunci ecuația $x^2 = a$ se poate scrie sub forma $x^2 - a = 0$, adică $\left(x-\sqrt{a}\right)\left(x+\sqrt{a}\right)=0$, având soluțiile: $x_1 = -\sqrt{a}$ și $x_2 = \sqrt{a}$, adică $S = \left\{-\sqrt{a},\ \sqrt{a}\right\}$. Sau: $x^2 = a$, $a > 0$, se mai poate scrie $|x| = \sqrt{a} \Leftrightarrow x \in \left\{-\sqrt{a},\ \sqrt{a}\right\}$.

Exerciții rezolvate:

1. Ecuația $x^2 = 1-\sqrt{4}$ nu are soluții, deoarece $1-\sqrt{4} < 0$, deci $S = \varnothing$.

2. Ecuația $7x^2 - 5 = 5(x + 1)(x - 1)$ este echivalentă cu $7x^2 - 5 = 5x^2 - 5$, de unde rezultă că $2x^2 = 0$, adică $x^2 = 0$, deci $S = \{0\}$.

3. Ecuația $5x^2 - 45 = 0$ este echivalentă cu $x^2 = 9$, deci $S = \{-3, 3\}$. Această ecuație se poate rezolva și prin altă metodă: $5x^2 - 45 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 3) = 0$, de unde se obține $x - 3 = 0$ sau $x + 3 = 0$, adică $x = 3$ sau $x = -3$, de unde $S = \{-3, 3\}$.

4. $x^2 + 6x + 9 = 16 \Leftrightarrow (x + 3)^2 = 4^2$, de unde rezultă că $x + 3 = 4$ sau $x + 3 = -4$ și se obțin soluțiile $x_1 = 1$ și $x_2 = -7$, deci $S = \{-7, 1\}$. Se poate rezolva și altfel: $(x + 3)^2 = 16 \Leftrightarrow (x + 3)^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (x + 3 - 4)(x + 3 + 4) = 0$, de unde $x - 1 = 0$ sau $x + 7 = 0$, adică $x_1 = 1$ și $x_2 = -7$.

5. $9x^2 = 27 + 18\sqrt{2} \Leftrightarrow 9x^2 = 18 + 18\sqrt{2} + 9 \Leftrightarrow 9x^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2 + 2\cdot 3\sqrt{2}\cdot 3 + 3^2 \Leftrightarrow 9x^2 = \left(3\sqrt{2}+3\right)^2 \Leftrightarrow 9x^2 = 9\left(\sqrt{2}+1\right)^2 \Leftrightarrow x^2 = \left(\sqrt{2}+1\right)^2 \Leftrightarrow |x| = \sqrt{2}+1$, adică $x = \sqrt{2}+1$ sau $x = -\sqrt{2}-1 \Rightarrow x_1 = \sqrt{2}+1$ și $x_2 = -\sqrt{2}-1$. $S = \left\{-\sqrt{2}-1;\ \sqrt{2}+1\right\}$.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Precizați care dintre ecuațiile de mai jos admit pe $x = -2$ ca soluție:

a) $x^2 = 4$; b) $3x^2 = 18$; c) $(x - 3)^2 = 25$; d) $2x^2 - 3 = 5$;
e) $(2x + 1)^2 = 27$; f) $(2x - 3)^2 = 49$; g) $x^3 - 8 = -3$; h) $2x^2 - 9 = -1$.

2. **A.** Verificați dacă -3 este soluție a următoarelor ecuații:

a) $x^2 = 9$; b) $7x^2 - 2 = 61$; c) $(x - 1)^2 = 4$; d) $(2x + 1)^2 = 49$.

B. Verificați dacă -2 este soluție a următoarelor ecuații:

a) $x^2 = 4$; b) $5x^2 - 3 = 17$; c) $(x + 1)^2 = 9$; d) $(2x - 1)^2 = 25$.

3. Rezolvați ecuațiile:

a) $x^2 = 1$; $x^2 = 81$; $4x^2 = 1$; $2x^2 = 8$;
b) $3x^2 = 75$; $49x^2 = 121$; $25x^2 = 225$; $36x^2 = 144$;
c) $x^2 - 0{,}25 = 0$; $2x^2 - 0{,}32 = 0$; $4x^2 = 0{,}04$; $3x^2 = 10{,}8$.

4. Determinați $x \in \mathbb{R}$, astfel încât:

a) $\frac{1}{9}x^2 = 16$; $\frac{1}{100}x^2 - \frac{1}{64} = 0$; $\frac{1}{25}x^2 = 0{,}49$;
b) $2x^2 = 3$; $3x^2 = 7$; $4x^2 = 11$;
c) $9x^2 - 10 = 0$; $25x^2 - 32 = 0$; $49x^2 - 24 = 0$;
d) $4x^2 = 0{,}5$; $144x^2 = 25$; $3x^2 - 0{,}(3) = 0$.

5. Determinați $x \in \mathbb{R}$, știind că:

a) $\frac{2x}{5} = \frac{125}{8x}$; b) $\frac{4x}{27} = \frac{3}{x}$; c) $\frac{3x}{16} = \frac{1}{27x}$;
d) $\frac{36}{3x} = \frac{75x}{9}$; e) $\frac{9}{5x} = \frac{20x}{4}$; f) $\frac{4}{6x} = \frac{54x}{25}$.

6. Determinați $x \in \mathbb{R}$, din ecuațiile:

a) $\frac{1}{16}x^2 = 25$; b) $\frac{1}{100}x^2 - \frac{1}{64} = 0$; c) $\frac{1}{25}x^2 = 0{,}36$; d) $36x^2 - 25 = 0$;
e) $\frac{1}{81}x^2 - \frac{1}{36} = 0$; f) $\frac{1}{16}x^2 = 0{,}64$; g) $\frac{1}{25}x^2 = 1{,}44$.

7. Determinați $x \in \mathbb{R}$, astfel încât:

a) $\frac{1}{36}x^2 = 0{,}25$; b) $\frac{1}{6{,}4}x^2 = 2{,}5$; c) $\frac{1}{16}x^2 = 2{,}25$; d) $\frac{1}{25}x^2 = 2{,}56$;
e) $\frac{1}{64}x^2 = 0{,}25$; f) $\frac{1}{225}x^2 = 1{,}44$; g) $\frac{1}{36}x^2 = 2{,}25$; h) $\frac{1}{10}x^2 = 6{,}4$.

8. Determinați mulțimea soluțiilor fiecărei ecuații:

a) $x^2 = 9$; b) $3x^2 = 12$; c) $2x^2 - 72 = 0$; d) $(x - 2)^2 = 25$;
e) $(2x - 3)^2 = 25$; f) $(2x + 1)^2 = 49$; g) $(2x + 5)^2 = 81$; h) $(2x - 5)^2 = 121$.

9. Rezolvați ecuațiile:

a) $(x + 2)^2 = 49$; b) $(x - 3)^2 = 36$; c) $(x + 4)^2 = 25$; d) $(x - 5)^2 = 64$;
e) $3(x + 2)^2 = 48$; f) $5(x - 2)^2 = 45$; g) $4(x + 6)^2 = 36$; h) $6(x - 2)^2 = 54$.

10. Determinați mulțimea soluțiilor fiecărei ecuații:

a) $2x^2 + 5 = 13$; b) $8x^2 - 2 = 0$; c) $6x^2 - 3 = 0$; d) $16x^2 + 15 = 14$;
e) $2x^2 = 1 - (-1)^{2019}$; f) $-\frac{5}{3}x^2 = -\frac{20}{3}$; g) $2(x + 2)^2 + 6 = 18$; h) $3(x - 1)^2 + 5 = 17$.

11. Determinați soluțiile ecuațiilor:

a) $5(x^2 - 8) = 0$; b) $0{,}1x^2 + 0{,}03 = 0{,}04$; c) $\frac{1}{9}x^2 + 3 = \frac{76}{25}$;
d) $0{,}3x^2 + 0{,}19 = \frac{23}{50}$; e) $\frac{1}{4}x^2 + 0{,}4 = \sqrt{0{,}25}$.

12. Rezolvați ecuațiile de forma $x^2 = a$, $(a \in \mathbb{R})$:

a) $x^2 = 196$; $x^2 = 432$; $x^2 = 144$; $x^2 = 128$; $x^2 = 324$;

d) $(2x-3\sqrt{2})^2=98$; e) $(2x+5\sqrt{2})^2=162$; f) $(2x-3\sqrt{3})^2=243$;

g) $(2x+3\sqrt{2})^2=50$; h) $(2x-7\sqrt{2})^2=242$; i) $(2x+5\sqrt{3})^2=147$.

20. Rezolvați ecuațiile:

a) $2(x+\sqrt{3})^2=24$; b) $3(x-\sqrt{2})^2=96$; c) $2(\sqrt{8}-x)^2=64$;

d) $3(x+\sqrt{12})^2=144$; e) $2(\sqrt{18}-x)^2=100$; f) $3(x+\sqrt{27})^2=225$;

g) $2(x+\sqrt{32})^2=144$; h) $3(x-\sqrt{48})^2=81$; i) $2(x-\sqrt{12})^2=150$.

21. Determinați mulțimea soluțiilor fiecăreia din ecuațiile de mai jos.

a) $3(x-2\sqrt{2})^2-8=88$; b) $2(x+3\sqrt{3})^2+25=241$; c) $4(x+4\sqrt{3})^2-41=67$;

d) $2(x-5\sqrt{3})^2+39=333$; e) $3(x+7\sqrt{3})^2-62=82$; f) $4(x-3\sqrt{2})^2+49=337$;

g) $5(x-6\sqrt{2})^2+43=133$; h) $3(x-4\sqrt{2})^2-82=68$.

PE-PP **Supermate ******

22. Arătați că, dacă numerele reale pozitive x, y, z verifică relația $x+y+z=2$, atunci numărul $n=\sqrt{(xy+2z)(yz+2x)(zx+2y)}$ este număr rațional.

23. Rezolvați ecuația $x+y+z+8=2\left(\sqrt{x-1}+2\sqrt{y-2}+3\sqrt{z-3}\right)$, unde $x, y, z \in \mathbb{R}$, cu $x\geq 1, y\geq 2, z\geq 3$.

24. Determinați numerele reale x, y, z pentru care următoarea egalitate este adevărată:

$$\sqrt{x+50}+\sqrt{y+100}+\sqrt{z+150}=\frac{x+y+z+312}{4},$$

unde $x\geq -50, y\geq -100, z\geq -150$.

PE-PP 9. Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană

1. Suprafața unei curți de formă dreptunghiulară, cu lungimea de trei ori mai mare decât lățimea, este de 1323 m^2.

Știind că se împrejmuiește terenul cu un gard format din patru rânduri de sârmă, ce lungime are colacul de sârmă care trebuie folosit?

2. Pe un perete cu dimensiunile de 4 m lungime și 2,7 m lățime trebuie amplasată o fereastră în formă de pătrat, care are suprafața egală cu 30% din suprafața peretelui.

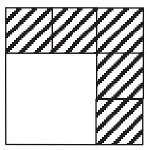
Care trebuie să fie dimensiunile ferestrei?

3. Un teren de sport are aria de 324 m^2 și formă de pătrat.

Cu cât trebuie să se mărească latura terenului pentru ca aria să se mărească cu 576 m^2?

4. Un pătrat cu aria de 729 cm^2 este împărțit în pătrate ca în figura alăturată.

Care este aria pătratului alb? Dar latura sa?



5. Suprafața unei sufragerii în formă de pătrat este egală cu suma suprafețelor a două dormitoare în formă de pătrat cu latura de 3 m și, respectiv, 4 m.

Pentru a acoperi sufrageria cu mochetă, ce suprafață de mochetă trebuie cumpărată?

6. O încăpere în formă de pătrat are aria egală cu cea a unui teren dreptunghiular având dimensiunile 12,8 m și 5 m. Ea trebuie acoperită cu dale pătrate având latura de 0,4 m.

Câte dale trebuie cumpărate pentru a acoperi podeaua încăperii?

Probleme pentru performanță școlară și pregătirea olimpiadelor

1. a) Dacă a și b sunt numere raționale cu proprietatea că $a\sqrt{3}-b\sqrt{5}=0$, demonstrați că $a = b = 0$.

b) Determinați toate perechile de numere raționale $(x; y)$ care verifică egalitatea:

$$\sqrt{3(x+1)^2}-2\sqrt{3}=|y+1|\cdot\sqrt{5}-\left|\sqrt{3}-\sqrt{5}\right|.$$

2. Fie numărul $x=\sqrt{2}+\sqrt{2^2}+\sqrt{2^3}+\sqrt{2^4}+...+\sqrt{2^{2018}}+\sqrt{2^{2019}}$ și $y = 2^{1010}-\sqrt{2}$. Calculați partea întreagă a numărului $\frac{x}{y}$.

3. Numerele întregi a și b verifică relația $3a + 4b = 100$. Determinați cea mai mică valoare posibilă pe care o poate lua numărul $|a-b|$.

4. Numerele naturale nenule a, b, c verifică relația $\frac{2a}{3b+4c}=\frac{3b}{4c+2a}=\frac{4c}{2a+3b}$. Determinați valorile lui a, b, c știind că $7a - 6b - 5c = 2019$.

5. Se consideră numerele $x=\sqrt{6-\sqrt{35}}$ și $y=\sqrt{6+\sqrt{35}}$. Calculați

$$(x-y)^2 \text{ și } \left(x-y+\sqrt{10}\right)^{2020}.$$

6. Determinați mulțimea $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\sqrt{5-2\sqrt{6}}\cdot x-\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{4-2\sqrt{3}}\cdot x\right\}$.

7. Determinați numerele raționale a și b pentru care $\frac{a}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}-\frac{b}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}=\sqrt{2}$.

8. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația $3x^2 - 2xy - y - 1 = 0$.

9. Se consideră numerele reale pozitive a, b, c, d astfel încât $a + b + c + d = 1010$. Arătați că $\sqrt{a(b+c+d)}+\sqrt{b(a+c+d)}+\sqrt{c(a+b+d)}+\sqrt{d(a+b+c)}\le 2020$.

10. a) Dacă $0 < x < 2y < 5$, arătați că numărul $a=\sqrt{(x-2y)^2}+\sqrt{(x+2y-16)^2}+\sqrt{4x^2}$ este pătrat perfect.

b) Demonstrați că nu există x și y numere întregi astfel încât $|x-3y+4|+|x+3y-4|<2$.

11. Se consideră numerele reale strict pozitive x, y, z pentru care $x + y + z = 1346$. Arătați că $\sqrt{xy+xz}+\sqrt{xy+yz}+\sqrt{xz+yz}\le 2019$.

12. Determinați valorile naturale nenule ale lui n pentru care $\frac{2\sqrt{n}-5\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{n}}\in\mathbb{Z}$.

Geometrie

Capitolul I
Patrulatere

PP **Competențe specifice**

- C_1. Identificarea patrulaterelor particulare în configuraţii geometrice date
- C_2. Descrierea patrulaterelor utilizând definiţii şi proprietăţi ale acestora, în configuraţii geometrice date
- C_3. Utilizarea proprietăţilor patrulaterelor în rezolvarea unor probleme
- C_4. Exprimarea în limbaj geometric a noţiunilor legate de patrulatere
- C_5. Alegerea reprezentărilor geometrice adecvate în vederea optimizării calculării unor lungimi de segmente, a unor măsuri de unghiuri şi a unor arii
- C_6. Modelarea unor situaţii date prin reprezentări geometrice cu patrulatere

PE-PP 1. Patrulatere convexe

Definiţie. Poligonul cu patru laturi se numește **patrulater**.

Definiţie. Un patrulater se numește **convex** dacă dreapta suport a oricăreia dintre laturi nu separă celelalte vârfuri ale poligonului care nu se află pe latura dată.

Definiţie. Un patrulater se numește **concav** dacă există o dreaptă suport a unei laturi care separă celelalte vârfuri ale poligonului care nu se află pe latura dată.

Teoremă. Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este egală cu 360°.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Măsurile unghiurilor A, B și C ale triunghiului ABC sunt proporționale cu numerele 4, 5 și 3. Perpendiculara în C pe BC intersectează paralela prin A la BC în punctul D. Calculați măsurile unghiurilor patrulaterului $ABCD$.

2. În patrulaterul convex $ABCD$ se știe că $\sphericalangle B = 2 \cdot \sphericalangle A$; $\sphericalangle C = 3 \cdot \sphericalangle A$ și $\sphericalangle D = 2 \cdot \sphericalangle B$.

a) Calculați măsurile unghiurilor patrulaterului.

b) Arătați că diagonala AC nu poate fi congruentă cu latura AB.

3. Determinați măsurile unghiurilor unui patrulater convex, știind că acestea sunt proporționale cu 3, 4, 5 și, respectiv, 6.
4. Suma măsurilor a două dintre unghiurile unui patrulater convex este 170°. Știind că patrulaterul are trei unghiuri congruente, calculați măsurile unghiurilor patrulaterului.
5. Determinați măsurile unghiurilor unui patrulater convex *ABCD* știind că suma măsurilor unghiurilor *B* și *D* este 150°, suma măsurilor unghiurilor *A*, *B* și *C* este 295° și diferența măsurilor unghiurilor *A* și *C* este 20°.
6. Determinați măsurile unghiurilor unui patrulater convex, știind că acestea sunt direct proporționale cu 3, 5, 7 și 9.
7. Determinați măsurile unghiurilor unui patrulater convex, știind că acestea sunt direct proporționale cu 1, 2, 3, 4.
8. Calculați măsurile unghiurilor unui patrulater convex *ABCD* ale cărui unghiuri verifică egalitățile: $\sphericalangle C = \frac{2}{3}\sphericalangle B$; $\sphericalangle D = \frac{1}{6}\sphericalangle B$; $\sphericalangle A = 1\frac{1}{4}\sphericalangle C$.
9. Determinați măsurile unghiurilor unui patrulater convex, știind că sunt invers proporționale cu numerele 0,(3); 0,25; 0,125 și, respectiv, 0,(1).

PE Aplicare și exersare **

10. Triunghiul *ABC* isoscel are $\sphericalangle A = 36°$ și $AB \equiv AC$. Știind că *BD* este bisectoarea unghiului *ABC*, $D \in AC$, și *E* este mijlocul laturii *AB*, calculați măsurile unghiurilor patrulaterului convex *BCDE*.
11. În triunghiul *ABC*, $AD \perp BC$, $D \in BC$ și $\sphericalangle C = 40°$. Se știe că $BH \perp AM$ și că $HM \parallel AC$, unde $H \in AD$ și punctul *M* este mijlocul segmentului *DC*. Calculați măsurile patrulaterului *ACMN*, unde $MH \cap AB = \{N\}$.
12. În patrulaterul convex *ABCD*, $\sphericalangle A = 40°$, măsura unghiului *B* este de $2\frac{3}{5}$ ori mai mare decât măsura unghiului *A*, iar măsura unghiului *C* este egală cu media aritmetică a primelor două unghiuri. Aflați măsurile unghiurilor patrulaterului.
13. Calculați măsurile unghiurilor unui patrulater convex *ABCD*, știind că măsura unghiului *B* este dublul măsurii unghiului *A*, măsura unghiului *C* este egală cu $\frac{3}{8}$ din măsura unghiului *B*, iar $\sphericalangle D \equiv \sphericalangle C$.
14. Determinați măsurile unghiurilor unui patrulater convex *ABCD*, știind că măsurile unghiurilor *A*, *B*, *C* sunt proporționale cu 4, 5 și 6, iar măsurile lui *C* și *D* sunt invers proporționale cu 0,5 și 0,(3).
15. Calculați măsurile unghiurilor unui patrulater convex care are toate unghiurile congruente.
16. Aflați măsurile unghiurilor unui patrulater convex *ABCD* în care măsura unghiului *A* este media aritmetică a celorlalte trei măsuri, măsura unghiului *B* este media aritmetică a măsurilor unghiurilor *C* și *D*, iar măsura unghiului *C* este jumătate din măsura unghiului *D*.

PE Aprofundare și performanță ***

17. Calculați măsurile unghiurilor patrulaterului convex *ABCD*, știind că:
$$\sphericalangle A = 1{,}25 \cdot \sphericalangle C;\ \sphericalangle C = 0{,}(6) \cdot \sphericalangle B \text{ și } \sphericalangle D = 0{,}1(6) \cdot \sphericalangle B.$$

18. Măsurile unghiurilor A, B și C ale triunghiului ABC sunt invers proporționale cu numerele $\frac{1}{3}; \frac{1}{2}$ și $\frac{1}{4}$. Paralela prin A la latura BC intersectează perpendiculara în C pe BC în punctul M. Calculați măsurile unghiurilor patrulaterului convex $ABCM$.

19. În patrulaterul convex $ABCD$, $\sphericalangle A = 75°$, iar măsurile unghiurilor B, C și D sunt invers proporționale cu numerele: 0,1(6); $\frac{1}{4}$ și 0,(1). Calculați măsurile unghiurilor patrulaterului $ABCD$.

20. În patrulaterul convex $ABCD$ se dau: $\sphericalangle BAD = 110°$, $\sphericalangle ABC = 110°$, $\sphericalangle ADB = 29°$ și $\sphericalangle BDC = 56°$. Calculați măsurile unghiurilor DBC, ABD, ADC, C.

21. În patrulaterul convex $MNPQ$ se știe că $NP = 2MN$, triunghiul MQP este isoscel, triunghiul MNP este dreptunghic, $\sphericalangle MQP = 100°$ și $\sphericalangle PMN = 90°$. Calculați măsurile unghiurilor QMN; MNP și, respectiv, QPN.

22. Fie $MNPQ$ un patrulater convex. Perimetrul triunghiului MNQ este egal cu 72 cm și $\mathscr{P}_{QNP} = 74$ cm. Aflați lungimea diagonalei NQ, știind că $\mathscr{P}_{MNPQ} = 82$ cm.

23. Patrulaterul convex $MNPQ$ are perimetrul egal cu 120 cm. Triunghiul MNP are perimetrul egal cu 82 cm. Știind că diagonala $MP = 24$ cm, aflați perimetrul triunghiului MQP.

24. Aflați măsurile unghiurilor unui patrulater convex $MNPQ$ în care măsura unghiului N este media aritmetică a măsurilor unghiurilor M și P, măsura unghiului P este media aritmetică a unghiurilor N și Q, iar măsura unghiului N este egală cu patru cincimi din măsura unghiului P.

PE-PP **Supermate ******

25. În patrulaterul convex $MNPQ$, unghiurile M și P sunt drepte. Pe laturile MQ și PQ se iau punctele T și R, astfel încât $MT \equiv PR$ și $\sphericalangle MTN \equiv \sphericalangle NRP$. Arătați că:

a) $MQ \equiv PQ$; b) QN este bisectoarea unghiului MQP.

26. În patrulaterul convex $MNPQ$ avem două perechi de laturi consecutive congruente: $MN \equiv NP$ și $PQ \equiv QM$. Demonstrați că:

a) NQ este bisectoarea unghiurilor MNP și MQP; b) $\sphericalangle M \equiv \sphericalangle P$; c) $MP \perp NQ$.

Observație. Un patrulater $MNPQ$ ca cel din problema 26 se numește **zmeu**.

PE-PP 2. Paralelogramul

Definiție. Paralelogramul este patrulaterul convex cu laturile opuse **paralele** două câte două.

Un **patrulater** convex este **paralelogram** dacă și numai dacă îndeplinește una dintre condițiile următoare:

- are laturile opuse congruente două câte două;
- are două laturi opuse paralele și congruente;
- unghiurile opuse sunt congruente;
- oricare două unghiuri alăturate sunt suplementare;
- diagonalele sale se taie în segmente congruente.

PE

Nume ______________________________________ **Clasa** _______

Test de autoevaluare

• *Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 100 de minute.*

I. Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate. (3 puncte)

(0,5p) **1.** Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este egală cu .... °.

(0,5p) **2.** Diagonalele unui paralelogram se intersectează în segmente ....

(0,5p) **3.** Patrulaterul convex cu laturile opuse congruente se numește ....

(0,5p) **4.** Dacă un paralelogram $ABCD$ are $AB = 24$ cm și $BC = 16$ cm, atunci perimetrul său este egal cu .... cm.

(0,5p) **5.** În paralelogramul $MNPQ$ cu $NP = PQ = 18$ cm și $\sphericalangle Q = 120°$, lungimea diagonalei NQ este egală cu .... cm.

(0,5p) **6.** Dacă paralelogramul $MNPQ$ are $\sphericalangle N = 115°$, atunci $\sphericalangle P$ este egală cu .... °.

II. Încercuiți răspunsul corect. (2 puncte)

(0,5p) **1.** Perimetrul unui paralelogram este egal cu 96 cm, iar una dintre laturile sale are lungimea de 32 cm. Lungimea celeilalte laturi este egală cu:
A. 12 cm; B. 18 cm; C. 16 cm; D. 20 cm.

(0,5p) **2.** Paralelogramul $ABCD$ are $BD \perp AD$, $\sphericalangle A = 60°$ și $BC = 9$ cm. Perimetrul paralelogramului este egal cu:
A. 42 cm; B. 48 cm; C. 54 cm; D. 56 cm.

(0,5p) **3.** Într-un paralelogram $ABCD$, $\sphericalangle A = \frac{3}{7} \sphericalangle B$. Atunci $\sphericalangle C$ este egală cu:
A. 48°; B. 50°; C. 52°; D. 54°.

(0,5p) **4.** În paralelogramul $MNPQ$, $PQ = MQ + 32$ cm și perimetrul său este egal cu 176 cm. Lungimea laturii PQ este egală cu:
A. 48 cm; B. 54 cm; C. 60 cm; D. 64 cm.

III. Scrieți rezolvările complete. (4 puncte)

(1p) **1.** În paralelogramul $ABCD$ se consideră punctele $M \in AB$ și $N \in CD$ astfel încât $AM \equiv CN$, iar $AC \cap BD = \{O\}$.
a) Arătați că patrulaterul $BMDN$ este paralelogram.
b) Demonstrați că punctele M, O, N sunt coliniare.

(1p) **2.** Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC, punctul M este simetricul lui B față de A și punctul N simetricul lui C față de A.

a) Arătați că $MN \parallel BC$;

b) Demonstrați că $BN \equiv CM$.

(1p) **3.** În paralelogramul $ABCD$, $AC \cap BD = \{O\}$, iar prin punctul O se duc dreptele oarecare MN și PQ astfel încât $M \in AB$, $Q \in BC$, $N \in CD$ și $P \in AD$. Arătați că $MQNP$ este paralelogram.

(1p) **4.** În paralelogramul $ABCD$, $AC \cap BD = \{O\}$, se duce o dreaptă oarecare MN prin punctul O astfel încât $M \in AB$ și $N \in CD$. Arătați că $BNDM$ este paralelogram.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	I.5	I.6	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4
Punctajul														
Nota														

PE-PP 10. Aria triunghiului şi aria patrulaterului

• Aria unui **triunghi** este egală cu semiprodusul dintre lungimea unei laturi a și înălțimea corespunzătoare ei h: $\mathcal{A} = \dfrac{a \cdot h}{2}$.

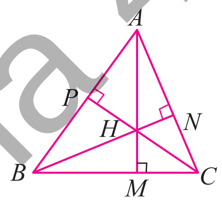
• Dacă în triunghiul ABC se notează $AB = c$, $AC = b$ și $BC = a$, atunci aria triunghiului este dată de **formula lui Heron**:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\text{, unde } p = \frac{a+b+c}{2} \text{ (semiperimetrul triunghiului).}$$

Proprietatea medianei

Orice mediană împarte un triunghi în două triunghiuri echivalente (au ariile egale).

Observaţii:



- **Aria triunghiului** se calculează cu una dintre formulele:

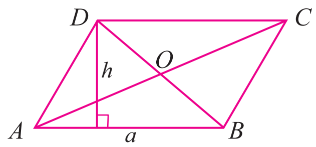
$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{BC \cdot AM}{2} = \frac{AC \cdot BN}{2} = \frac{AB \cdot CP}{2}.$$

(Raportul a două segmente nu depinde de unitatea de măsură aleasă.)

- Dacă triunghiul este dreptunghic, $\sphericalangle BAC = 90°$, putem folosi formula:

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2}\text{, unde } AB \text{ și } AC \text{ sunt catetele triunghiului.}$$

- Dacă $AD \perp BC$, $D \in (BC)$, atunci $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{AD \cdot BC}{2}$, de unde, din cele două formule adevărate pentru triunghiul dreptunghic, rezultă că $AD = \dfrac{AB \cdot AC}{BC}$.



• Aria unui **paralelogram** este egală cu produsul dintre lungimea unei laturi a și înălțimea corespunzătoare ei h.

$$\mathcal{A} = a \cdot h$$

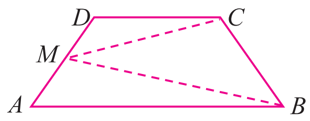
$$\mathcal{A}_{AOB} = \mathcal{A}_{BOC} = \mathcal{A}_{COD} = \mathcal{A}_{AOD} \Rightarrow \mathcal{A}_{ABCD} = 4 \cdot \mathcal{A}_{AOB}.$$

• Aria unui **dreptunghi** este egală cu produsul dintre lungimea L și lățimea l ale sale: $\mathcal{A} = L \cdot l$.

• Aria unui **romb** este egală cu semiprodusul dintre lungimile diagonalelor sale: $\mathcal{A} = \dfrac{d_1 \cdot d_2}{2}$.

• Aria unui **pătrat** este egală cu pătratul lungimii laturii sale l: $\mathcal{A} = l^2$.

• Aria unui **trapez** este egală cu semiprodusul dintre suma lungimilor bazelor B, b și lungimea înălțimii h a trapezului: $\mathcal{A} = \dfrac{(B+b) \cdot h}{2}$.



Observaţie: Dacă $ABCD$ este trapez, $AB \parallel CD$, $AM \equiv DM$, $M \in AD$, atunci $\mathcal{A}_{\Delta MBC} = \dfrac{1}{2}\mathcal{A}_{ABCD}$.

Definiţie. Distanța dintre două drepte paralele este distanța de la un punct al uneia la cealaltă.

Definiţie. Înălțimea unui trapez este distanța dintre dreptele ce conțin bazele.

Definiţie. Două suprafețe care au ariile egale se numesc *echivalente*.

●●● activități de învățare ●●●

PE Înțelegere *

1. Calculați:

a) aria unui triunghi cu lungimea bazei egală cu 60 cm și lungimea înălțimii corespunzătoare ei egală cu 3,5 dm;

b) aria unui paralelogram cu lungimea unei laturi egală cu 180 mm și lungimea înălțimii corespunzătoare ei egală cu 6 cm;

c) aria unui dreptunghi cu lungimile laturilor 24 cm și 1,5 dm;

d) aria unui pătrat cu latura de 0,025 m;

e) aria unui romb cu lungimile diagonalelor egale cu 18 cm și 24 cm.

2. Calculați:

a) aria unui romb cu latura de 30 cm și înălțimea de 28,8 cm;

b) aria unui trapez cu înălțimea de 15 cm și lungimea liniei mijlocii egală cu 18 cm;

c) aria unui trapez dreptunghic având lungimile bazelor egale cu 16 cm și 25 cm, iar lungimile laturilor neparalele egale cu 12 cm și, respectiv, 15 cm;

d) aria patrulaterului $ABCD$, cu $AC = 28$ cm, $BD = 35$ cm și $AC \perp BD$.

3. În triunghiul oarecare ABC se duc $AM \perp BC$, $M \in BC$, și $BN \perp AC$, $N \in AC$.

a) Dacă $AC = 18$ cm, $BN = 12$ cm, $AM = 9$ cm, calculați BC și $\mathcal{A}_{ABC}$.

b) Dacă $AC = 15$ cm, $BN = 12$ cm, $BC = 20$ cm, calculați AM și $\mathcal{A}_{ABC}$.

c) Dacă $AM = 6$ cm, $AC = 18$ cm, $\mathcal{A}_{ABC} = 72$ cm^2, calculați BC și BN.

4. În triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, se duce $AD \perp BC$, $D \in BC$.

a) Dacă $AB = 9$ cm, $AC = 12$ cm, $AD = 7{,}2$ cm, calculați $\mathcal{A}_{ABC}$ și BC.

b) Dacă $AB = 12$ cm, $AC = 16$ cm, $AD = 9{,}6$ cm, calculați $\mathcal{A}_{ABC}$ și BC.

c) Dacă $AC = 20$ cm, $BC = 25$ cm, $AD = 12$ cm, calculați $\mathcal{A}_{ABC}$ și AB.

d) Dacă $AD = 14{,}4$ cm, $AB = 18$ cm, $\mathcal{A}_{ABC} = 216$ cm^2, calculați AC și BC.

e) Dacă $AC = 24$ cm, $BC = 40$ cm, $\mathcal{A}_{ABC} = 384$ cm^2, calculați AB și AD.

5. În paralelogramul $ABCD$ se notează $AC \cap BD = \{O\}$. Dacă $\mathcal{A}_{AOB} = 216$ cm^2, calculați $\mathcal{A}_{ABCD}$.

6. Calculați aria unui triunghi dreptunghic isoscel cu lungimea ipotenuzei de 20 cm.

7. Fie $ABCD$ un dreptunghi.

a) Dacă $AB = 15{,}6$ cm și $BC = 10$ cm, calculați $\mathcal{A}_{ABCD}$.

b) Dacă $\mathcal{A}_{ABCD} = 432{,}5$ cm^2, $AB = 17{,}3$ cm, calculați BC.

c) Dacă $\mathcal{A}_{ABCD} = 225$ cm^2, $AB = 12{,}5$ cm, calculați BC.

d) Dacă $AB = 24$ cm și $BC = 15$ cm, calculați $\mathcal{A}_{ABCD}$.

e) Dacă $BC = 7{,}5$ cm și $\mathcal{A}_{ABCD} = 93{,}75$ cm^2, calculați AB.

8. În triunghiul ABC, AM este mediană, $M \in BC$. Știind că $\mathcal{A}_{ABC} = 168$ cm^2 și $AB = 21$ cm, calculați:

a) distanța de la punctul C la dreapta AB;

b) aria triunghiului ACM.

9. Calculați aria unui romb cu diagonala mică de 12 cm și diagonala mare egală cu triplul diagonalei mici.

10. Calculați aria unui dreptunghi în fiecare dintre cazurile de mai jos:

a) perimetrul dreptunghiului este de 150 cm și lățimea este un sfert din lungime;

b) perimetrul dreptunghiului este de 126 cm și lățimea are 40% din lungime.

PE-PP **Recapitulare şi sistematizare prin teste**

✹ TESTUL 1 ✹

• *Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.*

(3p) **1.** Un dreptunghi are lățimea egală cu $\frac{5}{7}$ din lungime, iar perimetrul dreptunghiului egal cu 432 cm. Calculați aria dreptunghiului exprimată în m^2.

(3p) **2.** Trapezul isoscel $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$, are $AD \equiv CD \equiv BC$. Știind că $AC \perp BC$, iar perimetrul trapezului este egal cu 120 cm, calculați:
a) măsurile unghiurilor trapezului isoscel $ABCD$.
b) lungimile laturilor AB, BC, respectiv, CD.

(3p) **3.** Un paralelogram $ABCD$ cu $AC \cap BD = \{O\}$ are $\mathcal{A}_{BOC} = 54$ cm^2.
a) Calculați aria paralelogramului $ABCD$.
b) Știind că $BD = 27$ cm, calculați distanța de la punctul C la dreapta BD.

✹ TESTUL 2 ✹

• *Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.*

(3p) **1.** Un dreptunghi are lățimea egală cu $\frac{3}{8}$ din lungime, iar aria dreptunghiului este egală cu 1944 cm^2. Calculați perimetrul dreptunghiului.

(3p) **2.** Un romb are lungimile diagonalelor egale cu 72 cm și 9,6 dm, iar lungimea laturii egală cu 60 cm. Calculați:
a) aria rombului; b) lungimea înălțimii rombului.

(3p) **3.** Trapezul isoscel $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$ și $AD \equiv BC$, are lungimile bazelor sale egale cu 18 cm, respectiv, 32 cm. Știind că diagonalele sale sunt perpendiculare și $AC \cap BD = \{O\}$:
a) calculați aria trapezului $ABCD$.
b) demonstrați că triunghiurile AOD și BOC sunt echivalente.

✹ TESTUL 3 ✹

• *Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.*

(3p) **1.** Rombul $ABCD$, cu $AC \cap BD = \{O\}$ are $\mathcal{A}_{BOC} = 108$ cm^2. Știind că $BD = \frac{3}{8}AC$, calculați:
a) aria rombului; b) lungimea diagonalelor BD și AC.

(3p) **2.** Paralelogramul $ABCD$ are $AC \perp BC$, cu $AC = 48$ cm și $BC = 36$ cm.
a) Calculați aria paralelogramului $ABCD$.
b) Dacă $AB = 60$ cm, calculați înălțimea paralelogramului dusă din punctul C.

Capitolul II
Cercul

PP Competențe specifice

C1. Identificarea elementelor cercului şi/sau poligoanelor regulate în configuraţii geometrice date

C2. Descrierea proprietăţilor cercului şi ale poligoanelor regulate înscrise într-un cerc

C3. Utilizarea proprietăţilor cercului în rezolvarea de probleme

C4. Exprimarea proprietăţilor cercului şi ale poligoanelor în limbaj matematic

C5. Interpretarea unor proprietăţi ale cercului şi ale poligoanelor regulate folosind reprezentări

C6. Modelarea matematică a unor situaţii practice în care intervin poligoane regulate sau cercuri

Definiţie. Dacă se dă un punct fix O în plan și un număr pozitiv r și considerăm toate punctele din plan care se găsesc la distanța r de punctul O, mulțimea acestor puncte o vom numi **cerc** de centru O și rază r și o vom nota $\mathscr{C}(O, r)$.

Definiția cercului o mai putem formula și astfel:

• Se numește **cerc** locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de un punct fix, numit centru.

Notăm cercul de centru O și rază r astfel: $\mathscr{C}(O, r) = \{M \in \mathscr{P} \mid OM = r\}$.

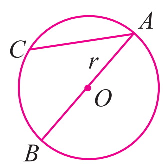
• În anumite situații, prin **rază** vom înțelege și segmentul care unește centrul cercului cu un punct al cercului. Un segment care unește două puncte de pe cerc se numește **coardă**. O coardă care conține centrul cercului se numește **diametru**.

• Lungimea oricărui diametru este $2r$. Două puncte de pe cerc care sunt extremitățile unui diametru se numesc **puncte diametral opuse**.

• Două cercuri sunt **congruente** dacă și numai dacă au razele egale. Scriem:

$$\mathscr{C}(O_1, r_1) \equiv \mathscr{C}(O_2, r_2) \text{ dacă și numai dacă } r_1 = r_2.$$

În figura alăturată, segmentul AC este coardă, iar AB este diametru. Segmentele OA, OB și OC sunt raze. Avem $OA = OB = OC = r$ și $AB = 2r$.



Interior. Exterior. Disc

• Mulțimea $\text{Int}\,\mathscr{C}(O, r) = \{M \in \mathscr{P} \mid OM < r\}$ se numește **interiorul cercului**.

• Mulțimea $\text{Ext}\,\mathscr{C}(O, r) = \{M \in \mathscr{P} \mid OM > r\}$ se numește **exteriorul cercului**.

• Mulțimea $\mathscr{D}(O, r) = \mathscr{C}(O, r) \cup \text{Int}\,\mathscr{C}(O, r) = \{M \in \mathscr{P} \mid OM \leq r\}$ se numește **disc** de centru O și rază r.

PE-PP 1. Poziţiile relative ale unei drepte faţă de un cerc

O dreaptă poate avea cu un cerc fie exact două puncte comune, fie un singur punct comun, fie niciun punct comun.

O dreaptă nu poate avea mai mult de două puncte distincte comune cu un cerc.

Există drepte care au două puncte comune cu un cerc. O dreaptă care are două puncte comune cu un cerc se numește **secantă** (pentru cercul respectiv).

Există drepte care au un singur punct comun cu cercul. Vom numi aceste drepte **tangente** la cerc. Punctul comun al tangentei cu cercul se numește **punct de tangență**.

Tangenta este perpendiculară pe rază în punctul de tangență. Dacă T este un punct al unui cerc dat de centru O și ST este tangenta sa în punctul T, atunci raza OT este perpendiculară pe această tangentă.

Definiţie. Se numește unghi înscris în cerc unghiul cu vârful pe cerc şi ale cărui laturi includ două coarde ale cercului.

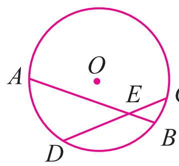
Teoremă. Măsura unui unghi înscris în cerc este jumătate din măsura arcului cuprins între laturile sale.

Teoremă. Măsura unui unghi cu vârful pe cerc, care are una dintre laturi secantă, iar cealaltă tangentă, este jumătate din măsura arcului de cerc cuprins între laturile sale.

PE-PP APLICAŢIE 1. UNGHIURILE CU VÂRFURILE ÎN INTERIORUL SAU ÎN EXTERIORUL UNUI CERC

Definiţie. Un unghi al cărui vârf este un punct din interiorul unui cerc, altul decât centrul cercului, se numește **unghi cu vârful în interiorul acelui cerc**.

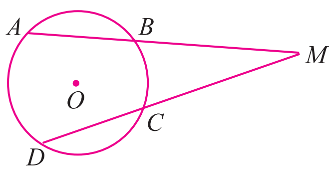
Teoremă. Măsura unui unghi cu vârful în interiorul cercului este egală cu semisuma măsurilor arcelor cuprinse între laturile unghiului și prelungirile laturilor lui: $\sphericalangle AED = \frac{1}{2}\left[\mathrm{m}\left(\overparen{AD}\right) + \mathrm{m}\left(\overparen{BC}\right)\right]$.



Definiţie. Un unghi al cărui vârf este un punct din exteriorul unui cerc, iar laturile lui sunt secante sau tangente (sau o secantă și o tangentă) se numește **unghi cu vârful în exteriorul acelui cerc**.

Teoremă. Măsura unui unghi cu vârful în exteriorul cercului este egală cu jumătate din valoarea absolută a diferenței măsurilor arcelor cuprinse între laturile lui:

$$\sphericalangle AMD = \frac{1}{2}(\overparen{AD} - \overparen{BC});\ (\overparen{AD} > \overparen{BC}).$$



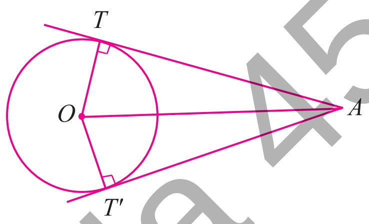
PE-PP **APLICAȚIE 2. UNGHIURI ÎNSCRISE ÎNTR-UN SEMICERC**

Toate unghiurile înscrise într-un semicerc sunt unghiuri drepte.

Generalizare. Toate unghiurile care au vârful pe un cerc și ale căror laturi conțin capetele arcului sunt congruente.

Teoremă. Dintr-un punct exterior unui cerc se pot duce două și numai două tangente la acest cerc.

Observație: Fie A un punct exterior unui cerc de centru O, și T și T' puncte de contact ale tangentelor din A la cerc. Atunci:



a) $TA \equiv T'A$;
b) AO este bisectoarea unghiului TAT';
c) OA este bisectoarea unghiului TOT';
d) OA este mediatoarea segmentului TT'.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Pe cercul $\mathscr{C}(O, R)$, $R = 12$ cm, se iau două puncte distincte A și B. Determinați lungimea coardei AB, dacă:
a) $\sphericalangle AOB = 60°$; b) $\sphericalangle AOB = 180°$.

2. Pe cercul $\mathscr{C}(O, R)$, se iau două puncte distincte A și B. Determinați măsura arcului mic $\overset{\frown}{AB}$, dacă:
a) $\sphericalangle AOB = 75°$; b) $\sphericalangle OBA = 50°$; c) $\sphericalangle OAB = 45°$.

3. Măsura arcului $\overset{\frown}{AB}$ reprezintă 40% din măsura cercului $\mathscr{C}(O, R)$. Calculați măsura unghiului la centru AOB.

4. Măsura arcului $\overset{\frown}{PQ}$ reprezintă 35% din măsura cercului $\mathscr{C}(O, R)$. Calculați măsurile unghiurilor triunghiului OPQ.

5. Pe cercul $\mathscr{C}(O, R)$, se iau două puncte distincte A și B. Determinați măsurile unghiurilor triunghiului AOB, dacă măsura arcului mic $\overset{\frown}{AB}$ este egală cu:
a) $\overset{\frown}{AB} = 45°$; b) $\overset{\frown}{AB} = 60°$; c) $\overset{\frown}{AB} = 80°$;
d) $\overset{\frown}{AB} = 90°$; e) $\overset{\frown}{AB} = 120°$; f) $\overset{\frown}{AB} = 150°$.

6. Pe cercul $\mathscr{C}(O, R)$, se iau punctele distincte M, N, P, Q, R, S, în această ordine, astfel încât $MN \parallel PS$ și $QP \equiv RS$. Demonstrați că $MR \equiv NQ$.

7. Triunghiul isoscel OMN are vârful O în centrul unui cerc dat, iar baza MN intersectează cercul în punctele A și B, unde $B \in AN$ și $A \in MB$. Demonstrați că $AM \equiv BN$.

8. Triunghiul isoscel OPQ are vârful O în centrul unui cerc dat și baza PQ. Știind că dreapta PQ intersectează cercul în punctele A și B astfel încât $B \in AQ$ și $A \in PB$, demonstrați că $AP \equiv BQ$ și $AQ \equiv PB$.

9. Pe cercul $\mathscr{C}(O, R)$, se consideră punctele distincte M și N, iar punctele P și Q sunt mijloacele arcelor determinate de ele pe cerc. Arătați că PQ este diametrul cercului.

PE Aprofundare și performanță ***

22. Pe un cerc $\mathscr{C}(O, R)$, se iau punctele oarecare A, B, C, D, în această ordine. Fie E, F, G, H mijloacele arcelor $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$ și, respectiv, $\overset{\frown}{DA}$. Știind că $EG \cap FH = \{P\}$, calculați măsura unghiului FPG.

23. În cercul din figura 1, MN este coardă, iar PN este tangentă la cerc în punctul N. Arătați că $\sphericalangle MNP = \dfrac{\overset{\frown}{MQN}}{2}$.

24. În figura 2, dreapta BA este secantă la cerc, iar dreapta BC este tangentă la cerc în punctul C. Arătați că $\sphericalangle ABC = \dfrac{\overset{\frown}{AFC} - \overset{\frown}{CED}}{2}$.

25. În figura 3, dreptele MN și MP sunt tangente la cerc. Arătați că: $\sphericalangle PMN = \dfrac{\overset{\frown}{NRP} - \overset{\frown}{NQP}}{2}$.

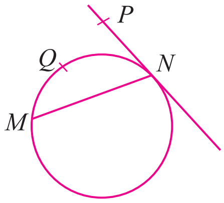


Fig. 1

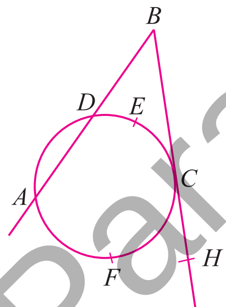


Fig. 2

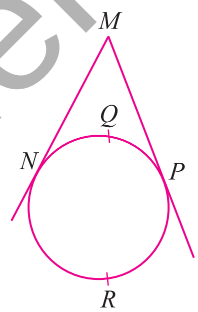


Fig. 3

26. Pe cercul $\mathscr{C}(O, R)$, se iau două puncte A și B diametral opuse. Prin cele două extremități ale diametrului se duc două coarde paralele AC și, respectiv, BD. Demonstrați că $AC \equiv BD$.

27. Pe cercul de centru O și rază R se iau punctele distincte M, N, P, Q (în această ordine), astfel încât distanțele de la punctul O la coardele MN și, respectiv, PQ să fie egale. Demonstrați că patrulaterul $MNPQ$ este trapez isoscel sau dreptunghi.

28. În cercul $\mathscr{C}(O, R)$, diametrul EF este perpendicular pe coarda CD. Știind că $EF \cap CD = \{G\}$ astfel încât $OG \equiv GF$, demonstrați că patrulaterul $CODF$ este romb.

29. Pe un cerc se iau punctele M, N, P, Q, R și S (în această ordine), astfel încât $MN \parallel QS$ și $MP \parallel SR$. Demonstrați că $NR \parallel PQ$.

30. În cercul $\mathscr{C}(O, R)$, diametrul MN este perpendicular pe coarda PQ. Știind că $PQ \cap MN = \{S\}$ și că $OS \equiv SN$, demonstrați că triunghiul MPQ este echilateral.

31. Într-un cerc $\mathscr{C}(O, R)$, coardele MN și PQ sunt congruente. Demonstrați că $MP \parallel NQ$ sau $MQ \parallel NP$.

Modele de teste pentru evaluarea finală

- *Se acordă 10 puncte din oficiu.*
- *Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul de lucru efectiv este de 120 de minute.*

✸ TESTUL 1 ✸

Subiectul I (*30 puncte*)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $\sqrt{(-2)^6 \cdot 3^2} - \sqrt{(-2)^4 \cdot 3^2}$ este egal cu:

a) 4; b) 6; c) 8; d) 12.

(5p) **2.** Calculând $\sqrt{{}^4+\sqrt{3^4}}$, se obține:

a) 3; b) 4; c) 5; d) 6.

(5p) **3.** Rezultatul calculului $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$ este:

a) –1; b) 1; c) $\sqrt{3}$; d) 2.

(5p) **4.** Calculând $\sqrt{(-2)^4 \cdot (-3)^2 \cdot (-5)^2} - \sqrt{(-2)^2 \cdot (-3)^2 \cdot (-5)^2}$, se obține:

a) 10; b) 20; c) 30; d) 40.

(5p) **5.** Rezultatul calculului $\sqrt{6 \cdot \sqrt{576}} - \sqrt{3 \cdot \sqrt{144}}$ este egal cu:

a) 6; b) 8; c) 9; d) 12.

(5p) **6.** Numerele întregi x pentru care $2x^2 - 11 = 7$, sunt:

a) $x \in \{-4; 4\}$; b) $x \in \{-3; 3\}$; c) $x \in \{-2; 2\}$; d) $x \in \{2; 3\}$.

Subiectul al II-lea (*30 puncte*)

(5p) **1.** Un dreptunghi are lungimea egală cu 15 cm și lățimea egală cu 8 cm. Aria dreptunghiului este egală cu:

a) 110 cm^2; b) 112 cm^2; c) 118 cm^2; d) 120 cm^2.

(5p) **2.** În paralelogramul $ABCD$, cu $AC \cap BD = \{O\}$, aria triunghiului AOB este egală cu 36 cm^2. Aria paralelogramului $ABCD$ este egală cu:

a) 108 cm^2; b) 132 cm^2; c) 144 cm^2; d) 160 cm^2.

(5p) **3.** În rombul $ABCD$, cu diagonala BD = 16 cm și măsura unghiului ABC egală cu 120°, lungimea laturii AB, a rombului, este egală cu:

a) 12 cm; b) 16 cm; c) 18 cm; d) 20 cm.

(5p) **4.** În dreptunghiul $ABCD$, cu $AC \cap BD = \{O\}$, diagonala AC = 16 cm, iar unghiul AOB este egal cu 120°. Perimetrul triunghiului AOB este egal cu:

a) 16 cm; b) 18 cm; c) 20 cm; d) 24 cm.

(5p) **5.** În trapezul dreptunghic $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$, $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90°$, $\sphericalangle ABC$ = = 45°, AD = 8 cm, iar CD = 6 cm. Lungimea bazei mari AB este egală cu:

a) 12 cm; b) 14 cm; c) 16 cm; d) 18 cm.

(5p) **6.** În rombul $ABCD$, măsura unghiului $\sphericalangle BAD$ este egală cu 45°. Măsura unghiului ADC este egală cu:

a) 75°; b) 90°; c) 120°; d) 135°.

Subiectul al III-lea (*30 puncte*)

(5p) **1.** Determinați valorile întregi ale lui x pentru care $x^2 = a$, unde:

$a = \sqrt{12^2+2^8} - \sqrt{12^2+3^4} + \sqrt{(-2)^4}$.

(5p) **2.** Determinați valoarea numărului real

$a = 2\sqrt{216} + \sqrt{12}\left(\sqrt{48} - 2\sqrt{18}\right) - \sqrt{18}\left(\sqrt{32} - \sqrt{12}\right)$.

(5p) **3.** Calculați: $\left(\frac{2}{3\sqrt{2}} + \frac{5}{2\sqrt{2}}\right) \cdot 2\sqrt{6} - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3\sqrt{2}}\right) \cdot 3\sqrt{6}$.

(5p) **4.** În paralelogramul $ABCD$, cu $AC \cap BD = \{O\}$, punctele M și N aparțin laturilor AB, respectiv CD, astfel încât $AM \equiv CN$. Demonstrați că:

a) $OM \equiv ON$; b) Punctele M, O, N sunt coliniare.

(5p) **5.** În triunghiul ABC, BD este mediană, cu $D \in AC$, iar EF este linie mijlocie, $E \in AB$ și $F \in BC$. Știind că $EF \cap BD = \{O\}$, demonstrați că:

a) $OB \equiv OD$; b) $OE \equiv OF$.

(5p) **6.** În dreptunghiul $ABCD$ ($AB > BC$) se iau punctele $M \in AB$, $N \in BC$, $P \in CD$ și $Q \in DA$, astfel încât $AM \equiv BN \equiv CP \equiv DQ$, iar $MP \cap NQ = \{O\}$. Demonstrați că:

a) $OM \equiv OP$; b) $ON \equiv OQ$.

TESTUL 2

Subiectul I (*30 puncte*)

(5p) **1.** Rezultatul calculului $\sqrt{(-3)^4 \cdot (-2)^2} - \sqrt{(-2)^4 \cdot (-3)^2}$ este egal cu:

a) 2; b) 3; c) 4; d) 6.

(5p) **2.** Calculând $\sqrt{2^2 \cdot 3 + 2^3 \cdot 3}$, se obține:

a) 4; b) 6; c) 8; d) 12.

(5p) **3.** Rezultatul calculului $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{2}-2)^2}$ este:

a) 1; b) $\sqrt{2}$; c) 2; d) 3.

(5p) **4.** Calculând $\frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}$, se obține:

a) 1; b) $\sqrt{3}$; c) 2; d) 3.

(5p) **5.** Rezultatul calculului $\sqrt{50} - \sqrt{32} - \sqrt{18} + \sqrt{8}$ este:

a) $-\sqrt{2}$; b) 0; c) $\sqrt{2}$; d) $2\sqrt{2}$.

(5p) **6.** Numerele întregi x pentru care $3x^2 - 7 = 5$, sunt:

a) $x \in \{-4; 4\}$; b) $x \in \{-3; 3\}$; c) $x \in \{-2; 2\}$; d) $x \in \{2; 3\}$.

Teste recapitulative

Notă: Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 100 de minute.

TESTUL 1

(1p) **1.** Arătați că numărul x este număr natural pătrat perfect, unde:
$$x=\sqrt{3\cdot 0,(3)}+\sqrt{30\cdot 0,0(3)}+\sqrt{300\cdot 0,00(3)}+\sqrt{3000\cdot 0,000(3)}.$$

(2p) **2.** Calculați că $a\cdot b$ și $\frac{a}{b}$, unde:
$$a=\sqrt{72}-\sqrt{32}+\sqrt{98}-\sqrt{18}-\sqrt{8} \text{ și } b=\sqrt{147}-\sqrt{108}+\sqrt{75}-\sqrt{48}+\sqrt{12}.$$

(1p) **3.** Calculați valoarea numărului real:
$$a=\sqrt{(\sqrt{8}-4)^2}+\sqrt{(\sqrt{18}-6)^2}+5\sqrt{(1-\sqrt{8})^2}+\sqrt{(\sqrt{50}-8)^2}.$$

(1p) **4.** Fie $ABCD$ un patrulater convex în care punctele M, N, P, Q sunt mijloacele laturilor AB, BC, CD, respectiv AD. Demonstrați că $MNPQ$ este paralelogram.

(2p) **5.** Fie $ABCD$ un pătrat în care punctul E este mijlocul laturii AB, iar $F\in AD$, astfel încât $AF=16$ cm și $AE=12$ cm.
a) Calculați aria triunghiului CEF.
b) Dacă $EF=20$ cm, calculați distanța de la punctul C la dreapta EF.

(2p) **6.** Pe cercul $\mathcal{C}(O, R)$ se consideră punctele A, B, C și D (în această ordine) în sensul mișcării acelor de ceasornic, astfel încât arcele de cerc $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$ și $\overset{\frown}{AD}$ sunt direct proporționale cu numerele 3; 4; 6, respectiv 5. Calculați:
a) măsurile arcelor $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$, respectiv $\overset{\frown}{AD}$.
b) măsurile unghiurilor $\sphericalangle A$; $\sphericalangle B$; $\sphericalangle C$, respectiv $\sphericalangle D$.

TESTUL 2

(1p) **1.** Arătați că numărul x este pătratul unui număr rațional, unde:
$$x=\frac{3}{4}\cdot\left[\sqrt{3\cdot 0,(592)}+\sqrt{30\cdot 0,0(592)}+\sqrt{300\cdot 0,00(592)}+\sqrt{3000\cdot 0,000(592)}\right].$$

(2p) **2.** Calculați $a\cdot b$ și $\frac{a}{b}$, unde:
$$a=\sqrt{12}-\sqrt{147}+\sqrt{27}-\sqrt{48}-\sqrt{75} \text{ și } b=\sqrt{128}-\sqrt{72}+\sqrt{50}-\sqrt{32}-\sqrt{8}.$$

(1p) **3.** Calculați valoarea numărului real:
$$a=\sqrt{(4-2\sqrt{5})^2}+\sqrt{(4\sqrt{5}-9)^2}+\sqrt{(6\sqrt{5}-14)^2}+4\sqrt{(3-2\sqrt{5})^2}.$$

(1p) **4.** Fie $ABCD$ un paralelogram în care punctele $M\in AB$, $N\in BC$, $P\in CD$ și $Q\in AD$, astfel încât $AM\equiv BN\equiv CP\equiv DQ$. Arătați că patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram.

(2p) **5.** În paralelogramul $ABCD$, cu $AC\cap BD=\{O\}$, iar aria triunghiului BOC este egală cu 72 cm^2.
a) Aflați aria paralelogramului $ABCD$.
b) Dacă $AC=48$ cm, aflați distanța de la punctul B la diagonala AC.

Probleme pentru performanţă şcolară şi pregătirea olimpiadelor

1. Considerăm pătratul $ABCD$ și punctele $E \in BC$, $F \in DC$. Dacă $\sphericalangle BAE = 15°$ și $\sphericalangle DAF = 30°$, determinați $\sphericalangle AEF$.

Gazeta Matematică nr. 7-8-9/2011

2. Se consideră trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$ și $AC \perp BD$. Fie E mijlocul diagonalei AC. Paralela prin E la BD intersectează pe AB în M. Demonstrați că:

a) triunghiul AMC este isoscel; b) $ME = \dfrac{BD}{2}$ și $CM = \dfrac{AB + CD}{2}$.

O.L. Alba 2016

3. Fie trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $AB < CD$, și punctele $T \in (DC)$, $AT \perp CD$, M mijlocul lui AC. Dacă $MT \parallel BD$, demonstrați că $ABCD$ este trapez isoscel.

O.L. Prahova 2018

4. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC în care înălțimea AD și mediana BM au aceleași lungimi ($D \in BC$, $M \in AC$), iar $\{G\} = AD \cap BM$. Arătați că $GM = AG - GD$.

O.L. Prahova 2018

5. Fie ABC un triunghi oarecare, iar M și D mijloacele segmentelor AB, respectiv BC. Dacă $E \in AD$, astfel încât $AD = 4 \cdot ED$, iar $ME \cap BC = \{N\}$, demonstrați că:

a) $ME \equiv EN$; b) $DN \equiv NC$.

O.L. Ilfov 2016

6. În triunghiul isoscel ABC, cu $AB \equiv AC$ și $\sphericalangle BAC = 120°$, fie M și N mijloacele laturilor AC și, respectiv, BC. Fie $MP \perp BC$, $P \in BC$ și $MP \cap AB = \{Q\}$. Demonstrați că $AQMN$ este romb.

O.L. Mureș 2016

7. Fie paralelogramul $ABCD$, astfel încât $3DB = 2DA$ și $\sphericalangle ADB = 60°$. Arătați că $AC = 2AB$.

Gazeta Matematică nr. 10/2016

8. Fie triunghiul isoscel ABC, $AB \equiv AC$, și $\sphericalangle BAC > 60°$. Considerăm punctul $D \in BC$ astfel încât $BD \equiv AC$. Demonstrați că semidreapta $(AD$ și mediatoarea segmentului DC se intersectează pe bisectoarea unghiului exterior triunghiului ABC cu vârful în C.

Gazeta Matematică nr. 9/2018

9. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic isoscel cu baza BC. Perpendicularele în punctul A pe AB, respectiv AC intersectează dreapta BC în E și respectiv F.

Dacă $EN \perp AC$, $N \in AC$, $FM \perp AB$, $M \in AB$ și $EN \cap FM = \{P\}$, demonstrați că:

a) $AEPF$ și $ABPC$ sunt romburi;

b) $MNST$ este dreptunghi, unde $\{T\} = PB \cap AF$ și $\{S\} = PC \cap AE$.

Gazeta Matematică nr. 10/2017

Indicaţii şi răspunsuri

SOLUȚIILE TESTELOR DE AUTOEVALUARE POT FI CONSULTATE AICI:
(Scanați codul QR cu camera telefonului, nu din aplicația Mate2000+)

RECAPITULARE ŞI EVALUARE INIŢIALĂ

Teste cu exerciții și probleme recapitulative pentru pregătirea testării inițiale

Algebră

Testul 1. 1. a) $a = -14$; $b = -6$; $n = -8$; b) $x = -9$; $y = -8$; $n = -17$. **2.** a) $S = \{3\}$; b) $S = \{3\}$; c) $S = \{4\}$; d) $S = \{-2\}$. **3.** a) $x \in \{0, 1, 2\}$; b) $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$; c) $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. **4.** a) $x \in \{-5, -4, -3, -2, -1\}$; b) $x \in \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1\}$; c) $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. **5.** a) $n \in \{-10, -4, -2, 0, 2, 8\}$; b) $n \in \{-10, -6, -4, -3, -1, 0, 2, 6\}$; c) $n \in \{-4, -1, 0, 1, 2, 5\}$; d) $n \in \{-7, -1, 0, 6\}$. **6.** a) $\frac{7}{20}$; b) $-\frac{43}{84}$; c) $-\frac{25}{48}$; d) $\frac{1}{12}$. **7.** $377 = an + 17$, $17 < n$; $517 = bn + 13$, $13 < n$; $803 = cn + 11$, $11 < n \Rightarrow 360 = an$, $504 = bn$, $792 = cn$, $n > 17 \Rightarrow n \mid (360; 504; 792) \Rightarrow n \mid 72 \Rightarrow n \in \{18, 24, 36, 72\}$. **8.** $n = 20a + 14$, $n = 24b + 18$, $n = 28c + 22 \Rightarrow n + 6 = 20(n + 1)$, $n + 6 = 24(b + 1)$, $n + 6 = 28(c + 1) \Rightarrow [20; 24; 28] \mid n + 6 \Rightarrow n = 840k - 6$, $k \in \mathbb{N}^*$. Pentru $k = 1$ se obține $n = 834$. **9.** a) $12 \mid \overline{a24b}$, $a \neq 0 \Rightarrow 3 \mid \overline{a24b}$, $4 \mid \overline{a24b}$, $(3; 4) = 1$; din $3 \mid \overline{a24b} \Rightarrow 3 \mid a + b + 6 \Rightarrow a + b + 6 = \mathcal{M}_3$; din $4 \mid \overline{a24b} \Rightarrow b \in \{0, 4, 8\}$; $b = 0 \Rightarrow a + 6 = \mathcal{M}_3 \Rightarrow a \in \{3, 6, 9\}$; $b = 4 \Rightarrow a + 10 = \mathcal{M}_3 \Rightarrow a \in \{2, 5, 8\}$; $b = 8 \Rightarrow a + 14 = \mathcal{M}_3 \Rightarrow$ $\Rightarrow a \in \{1, 4, 7\}$; $(a, b) \in \{(3, 0), (6, 0), (9, 0), (2, 4), (5, 4), (8, 4), (1, 8), (4, 8), (7, 8)\}$; b) $(a, b) \in$ $\in \{(4, 0), (2, 2), (9, 4), (2, 6), (5, 8)\}$; c) $(a, b) \in \{(7, 0), (3, 4), (8, 8)\}$. **10.** a) $a = 12x$, $b = 12y$, $(x; y) = 1$, $x < y$, $xy = 42$. Am folosit $(a; b) \cdot [a; b] = a \cdot b$. $x = 1 \Rightarrow y = 42 \Rightarrow a = 12$, $b = 504$; $x = 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow y = 21 \Rightarrow a = 24$, $b = 252$; $x = 3 \Rightarrow y = 14 \Rightarrow a = 36$, $b = 168$; b) $a - b = \{120, 240, 480, 1560\}$. **11.** a) Fie $d \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $d = (9n + 17; 12n + 23) \Rightarrow d \mid 9n + 17$ și $d \mid 12n + 23 \Rightarrow d \mid 36n + 68$ și $d \mid 36n + 69 \Rightarrow d \mid 1 \Rightarrow d = 1 \Rightarrow (9n + 17; 12n + 23) = 1 \Rightarrow$ fracția este ireductibilă; b), c), d) Analog a). **12.** $A = 12^n \cdot 68 = 4 \cdot 17 \cdot 12^n \Rightarrow 17 \mid A$. **13.** $A = 4^n \cdot 42 = 2 \cdot 21 \cdot 4^n \Rightarrow 21 \mid A$.

Testul 2. 1. a) $a = -12$; $b = -9$; $n = +6$; b) $x = -24$; $y = -18$; $n = -6$. **2.** a) $S = \{5\}$; b) $S = \{-7\}$; c) $S =$ $= \{4\}$; d) $S = \{4\}$. **3.** a) $x \in \{-6, -5, -4, -3, -2\}$; b) $x \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; c) $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. **4.** a) $-\frac{13}{20}$; b) $-\frac{7}{18}$; c) $\frac{7}{16}$; d) $\frac{7}{6}$. **5.** a) $n \in \{-9, -5, -3, -2, 0, 1, 3, 7\}$; b) $n \in \{-14, -8, -6, -5, -4, -3, -1, 0, 1, 2, 4, 10\}$; c) $n \in \{-17, -3, -2, 0, 1, 3, 4, 18\}$; d) $n \in \{-18, -4, -3, -1, 0, 2, 3, 17\}$. **6.** $n \in$ $\in \{18, 36\}$. **7.** $(a, b) \in \{(12, 360), (24, 180), (36, 120), (60, 72)\}$. **8.** $n = 426$. **9.** a) $(a, b) \in \{(0, 2),$ $(3, 2), (6, 2), (9, 2), (2, 6), (5, 6), (7, 6)\}$; b) $(a, b) \in \{(8, 0), (6, 2), (4, 4), (2, 6), (0, 8), (9, 8)\}$; c) $(a, b) \in \{(0, 0), (9, 0), (5, 4), (1, 8)\}$; d) $(a, b) \in \{(0, 0), (9, 0), (4, 5)\}$. **10.** a) $x = 54$, $y = 72$, $z =$ $= 108$, $t = 36$; b) $a = 56$, $b = 84$, $c = 126$; c) $a = 24$, $b = 72$, $c = 96$. **11.** a) $A = 16^n \cdot 10 \Rightarrow 10 \mid A$; b) $A = 30^n \cdot 11 \Rightarrow 11 \mid A$; c) $a = 102 \cdot 12^n = 6 \cdot 17 \cdot 12^n \Rightarrow 17 \mid a$.

Testul 3. 1. a) $a = -12$; $b = -6$; $n = 2$; b) $x = -21$; $y = -12$; $n = -9$. **2.** a) $S = \{2\}$; b) $S = \{3\}$; c) $S = \{7\}$; d) $S = \{-4\}$. **3.** a) $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$; b) $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; c) $x \in \{0, 1, 2, 3\}$; d) $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. **4.** a) $x \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; b) $x \in \{-5, -4, -3, -2\}$; c) $x \in \{-1, 0, 1, 2\}$. **5.** a) $A = \{3, 4, 5, 8, 11, 20\}$; $B = \{0, 1, 3, 5, 9, 21\}$; $A \cup B = \{0, 1, 3, 4, 5, 8, 9, 11, 20, 21\}$; $A \cap B = \{3, 5\}$; $A \setminus B = \{4, 8, 11, 20\}$;

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I. MULŢIMEA NUMERELOR REALE

RĂDĂCINA PĂTRATĂ

1. Rădăcina pătrată a unui număr natural pătrat perfect

1.

x	–5	–3	–2	0	±4	±6	9	12
x^2	25	9	4	0	16	36	81	144

2. a) 0; 1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81; b) 144; 169; 196; 225; 256; 289; c) 324; 361; 400; 441; 484; 529; 576; 625; 676; 729; 784; 841; 900; 961. **3.** a) ±5; b) ±8; c) ±11; d) ±27; e) ±36. **4.** a) $2^2 \cdot 3^2$; b) 2^6; c) 1 nu este prim; d) 13^2; e) $2^2 \cdot 3^4$; f) 23^2; g) $2^8 \cdot 3^4$; h) $7^2 \cdot 2^6 \cdot 5^2$; i) $2^6 \cdot 5^6$; j) $2^{12} \cdot 5^4$; k) $11^2 \cdot 13^6$. **5.** a) 36; 4; 169; 196; 225; 256; b) 13^2; $(-9)^4$; 3^8; $(-12)^{18}$; $(-28)^6$; c) 5^{8n}; 7^{6n+4}; 15^{n^2+n}; 12^{n^2-n+6}; $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$. **6.** a) $B = \{0, 1, 4, 9, 16, 25\}$; b) $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. **7.** a) A; b) F; c) A; d) A; e) F; f) F; g) F; h) F. **8.** (i) a) 6; b) 40; c) 7; d) 6; e) 16; f) 13; g) 12; h) 8; i) $x \in \{1; 5\}$; j) $x \in \varnothing$; k) $x \in \{1\}$; l) $x \in \{14\}$; (ii) a) ±6; b) ±40; c) ±7; d) ±6; e) ±16; f) ±13; g) ±12; h) ±8; i) $x \in \{1; 5\}$; j) $x \in \{-7; -1\}$; k) $x \in \{-7; 1\}$; l) $x \in \{-4; 14\}$. **9.** a) 2^{101}; b) 3^{125}; c) 5^{180}; d) 3^{50}; e) 6^{100}; f) 8^{1010}. **10.** a) 70^2; b) 113^2; c) 1010^2; d) 1010^2; e) $2^6 \cdot 3^2 \cdot 17^2$; f) 1009^2. **11.** a) 99; b) 105; c) 18; d) 180; e) 15; f) 50; g) 50; h) 88. **12.** a) $x = 9^n$; $\sqrt{x} = 3^n$; b) $x = 25^n$; $\sqrt{x} = 5^n$; c) $x = 16^{n+2}$; $\sqrt{x} = 4^{n+2}$; d) $x = 4^{n+3}$; $\sqrt{x} = 2^{n+3}$. **13.** $x = 36^2 \cdot 12^{2n}$. **14.** $x = 2^{2020} = \left(2^{1010}\right)^2$. **15.** a) $x = 49 \cdot 144 = (7 \cdot 12)^2 = 84^2 \Rightarrow \sqrt{x} = 84$; b) $x = 49 \cdot 100 = (7 \cdot 10)^2 = 70^2 \Rightarrow \sqrt{x} = 70$; c) $x = 501^2 \Rightarrow \sqrt{x} = 501$; d) $x = 1011^2 \Rightarrow \sqrt{x} = 1011$; e) $x = 1203^2 \Rightarrow \sqrt{x} = 1203$. **16.** a) $x = 2 + 15(2^2 + 2^6 + ... + 2^{1998}) \Rightarrow u(x) = 2 \Rightarrow x \neq$ p.p.; b) $x = 3 + 40(3^2 + 3^6 + ... + 3^{1998}) \Rightarrow u(x) = 3 \Rightarrow x \neq$ p.p. **17.** a) $x = 1010^2 \Rightarrow \sqrt{x} = 1010$; b) $a = 289 \cdot 576 \Rightarrow \sqrt{a} = 408$; c) $n = 361 \Rightarrow \sqrt{n} = 19$; d) $n = 729 = 27^2$; $x^2 = 27^2 \Rightarrow |x| = 27 \Rightarrow x \in \{-27, 27\}$; e) $n = 729 = 27^2 \Rightarrow \sqrt{n} = 27$. **18.** a) $u(x) \in \{3, 8\}$; b) $u(x) \in \{3, 8\}$; c) $u(x) \in \{3, 8\}$; d) $u(x) = 2$; e) $u(x) = 8$; f) $u(x) = 3$; g) $u(x) = 7$; h) $u(x) = 3$; i) $x = 8 + 585(8^2 + 8^6 + ... + 8^{2014}) \Rightarrow u(x) = 8 \Rightarrow x \neq$ p.p.; j) $x = 7 + 400(7^2 + 7^6 + ... + 7^{2018}) \Rightarrow u(x) = 7 \Rightarrow x \neq$ p.p. **19.** $n = 10x + 8$, $n \in \mathbb{N}$, $\forall\, x$ cifră nenulă. **20.** $A = \sqrt{49 \cdot 25^{2n} \cdot 9^{2n+2}} = 7 \cdot 25^n \cdot 9^{n+1}$. **21.** $a = 625 \cdot 49^n \cdot 24^{2n} \Rightarrow \sqrt{a} = 25 \cdot 7^n \cdot 24^n =$ nr. par. **22.** $a = 13^2 \cdot 5^{2n} \cdot 12^{2n} \Rightarrow \sqrt{a} = 13 \cdot 5^n \cdot 12^n =$ nr. par. **23.** a) 14; 23^2; 35; 3^3; 7^2; $|a|$; a^2; a^4; $|a^3|$; b) $2^2 \cdot 3$; $16 \cdot 5$; $2 \cdot 3 \cdot 5$; $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$; $2^3 \cdot 3^2 \cdot 18$; $5 \cdot 3^2 \cdot 12$. **24.** a) $2^3 \cdot 3 \cdot 5$; b) $2 \cdot 5^2 \cdot 7$; c) $2^2 \cdot 3 \cdot 7$; d) $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$; e) $2^2 \cdot 14 \cdot 15$; f) $2 \cdot 7 \cdot 3^2$; g) $2^5 \cdot 5$; h) $2^3 \cdot 3^2$; i) $2^4 \cdot 3 \cdot 5$; j) $3^2 \cdot 5 \cdot 11$; k) $2^5 \cdot 3^3$; l) $7 \cdot 26$. **25.** a) 23; b) 23^2; c) 23^3; d) 17^4; e) 15; f) 36^2; g) 48; h) 12^2; i) 2^{12}; j) 2^{1009}; k) 3^{1010}; l) 6^{1009}; m) 7^{1010}; n) 5^{1008}. **26.** a) 24; 27; 25; 18; b) 20; 28; 21; 26; c) 40; 36; 42; 45; d) 50; 48; 56; 72. **27.** a) 61; 44; 68; 96; b) 85; 47; 84; 63; c) 46; 59; 62; 54; d) 113; 213; 123; 126. **28.** a) 444; b) 150; c) 289; d) 289. **29.** a) 6^2; b) $3 \cdot 11^2$; c) $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$; d) $2^3 \cdot 14 \cdot 9$; e) 13; f) 13; g) 21; h) 2^4. **30.** a) 2^5; b) 5^2; c) 75; d) 15; e) 17; f) 25, g) 50; h) 10. **31.** a) 15; b) 20; c) 25; d) 18; e) 17; f) 108; g) 70. **32.** a) 18; b) 63; c) 36; d) 632; e) 42; f) 31. **33.** a) 80; b) 535; c) 51; d) 27. **34.** a) 344; b) 257. **35.** a) 1010; b) 2; c) 1010; d) 501; e) 505. **36.** $a = (10 \cdot 40^n)^2$. **37.** 239. **38.** Card $A = 13$, card $B = 39$.

2. Rădăcina pătrată a unui număr raţional nenegativ

1. $B = \left\{\frac{4}{9}; \frac{9}{64}; 64; 1; \frac{25}{9}; \frac{16}{9}; \frac{49}{36}; \frac{25}{144}; \frac{49}{144}\right\}$.

2. a)

a	–0,8	$-\frac{5}{8}$	-4^2	-1^3	–0,25	0,08(3)	1,41(6)	1,2(6)	$\frac{5}{4}$	3	4,25	2,3(8)
a^2	0,64	$\frac{25}{64}$	256	1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{144}$	$\frac{289}{144}$	$\frac{361}{225}$	$\frac{25}{16}$	9	$\frac{289}{16}$	$\frac{1849}{324}$

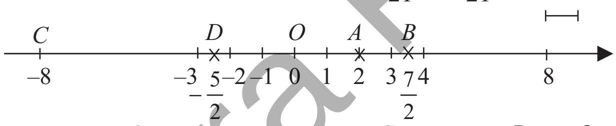
32. $a = |3x + 2y - 22| + |x - y| + |2x + 3y + 14|$. Din ipoteză se obține $-6 \le 3x + 2y \le 22 \Rightarrow -28 \le 3x + 2y - 22 \le 0 \Rightarrow |3x + 2y - 22| = -3x - 2y + 22$; $-14 \le 2x + 3y \le 18 \Rightarrow 0 \le 2x + 3y + 14 \le 32 \Rightarrow |2x + 3y + 14| = 2x + 3y + 14$; $0 \le x - y \le 12 \Rightarrow |x - y| = x - y$, de unde se obține $a = 6^2$. **33.** $N = 2$. **34.** $E = |3a + 2b - 9| + |2a + b + 4| - |3a - b - 5| + 2|a - b - 3|$. Din ipoteză se obține: $-7 \le 3a + 2b \le 9 \Rightarrow -16 \le 3a + 2b - 9 \le 0 \Rightarrow |3a + 2b - 9| = -3a - 2b + 9$; $-4 \le 2a + b \le 5 \Rightarrow 0 \le 2a + b + 4 \le 9 \Rightarrow |2a + b + 4| = 2a + b + 4$; $-6 \le 3a - b \le 5 \Rightarrow -11 \le 3a - b - 5 \le 0 \Rightarrow |3a - b - 5| = -3a + b + 5$; $-4 \le a - b \le 3 \Rightarrow -7 \le a - b - 3 \le 0 \Rightarrow |a - b - 3| = -a + b + 3$, de unde se obține $E = 14$. **35.** $\sqrt{a^4 + 4b^2 - 4} + \sqrt{b^4 + 4a^2 - 4} = \sqrt{a^4 + 4(2 - a^2) - 4} + \sqrt{b^4 + 4(2 - b^2) - 4} = \sqrt{a^4 - 4a^2 + 4} + \sqrt{b^4 - 4b^2 + 4} = |a^2 - 2| + |b^2 - 2| = 2 - a^2 + 2 - b^2$; cum $a^2 - 2 = -b^2 < 0$ și $b^2 - 2 = -a^2 < 0$; $|a^2 - 2| = 2 - a^2$; $|b^2 - 2| = 2 - b^2$, atunci $2 - a^2 + 2 - b^2 = 4 - (a^2 + b^2) = 2$. **36.** Exercițiul din enunț se mai poate scrie: $\dfrac{x+y+z+t}{2} = \dfrac{y+z+t}{3} = \dfrac{x+z+t}{4} = \dfrac{x+y+t}{6} = k \Rightarrow x + y + z + t = 2k$; $y + z + t = 3k$; $x + z + t = 4k$; $x + y + t = 6k \Rightarrow y = -2k$; $x = -k$; $z = -4k$; $t = 9k \Rightarrow xyzt = -72k^4 < 0$.

MULȚIMEA NUMERELOR REALE

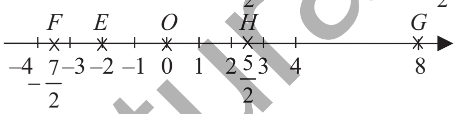
1. Modulul unui număr real. Reprezentarea pe axă a numerelor reale. Aproximări și rotunjiri. Ordonări

1. a) A; b) A; c) F; d) F; e) A; f) A; g) F; h) A; i) F; j) A; k) A; l) A; m) A; n) A; o) A; p) F. **2.** a) 6; 2; 17; $\sqrt{(-15)^2}$; $\sqrt{(-18)^2}$; $\sqrt{144}$; b) -7; -4; 6; $\dfrac{2}{3}$; $-\sqrt{64}$; 2,08(3); $\sqrt{(-15)^2}$; $\sqrt{(-18)^2}$; $-0{,}8(3)$; 2; 17; $\sqrt{144}$; $-\sqrt{169}$; c) -7; -4; 6; $-\sqrt{64}$; $\sqrt{(-15)^2}$; $\sqrt{(-18)^2}$; 2; 17; $\sqrt{144}$; $-\sqrt{169}$; d) -7; -4; $-\sqrt{64}$; $-\sqrt{3}$; $-\sqrt{12}$; $-0{,}8(3)$; $-\sqrt{169}$; e) toate numerele sunt reale; f) $-\sqrt{3}$; $-\sqrt{12}$. **3.** $A = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121\}$. a) $\dfrac{2}{21}$; b) $\dfrac{19}{21}$.

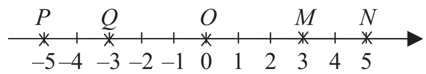
4. a)



b)



c)



$E(-2)$; $F\left(-\dfrac{7}{2}\right)$; $G(8)$; $H(2{,}5)$; $M(3)$; $N(5)$; $P(-5)$; $Q(-3)$;

d) $|CG| = 16$; $|EA| = 4$; $|DH| = 5$; $|QM| = 6$; $|MN| = 2$; $|PA| = 7$. **5.** a) 11,18; 2,06; 15,67; 34,64; 16; b) 11,19; 2,07; 15,68; 34,65; 16,01. **6.** a) -10; 4; -3; 10; -12; 40; -5; b) 5; -15; 49; -4; 3; -4; 7. **7.** a) $-3 < -\sqrt{5} < -2$; b) $3 < \sqrt{13} < 4$; c) $-3 < -\sqrt{7} < -2$; d) $5 < \sqrt{27} < 6$; e) $-5 < -\sqrt{17} < -4$; f) $7 < \sqrt{50} < 8$. **8.** $A \cap \mathbb{N} = \{2; 3\}$; $A \cap \mathbb{Z} = \{-8; -6; 2; 3\}$; $A \cap \mathbb{Q} = \left\{-\dfrac{3}{8}; -6; \dfrac{5}{6}; -\dfrac{4}{9}; -8; 3; 8{,}2; \dfrac{3}{2}; 2; \dfrac{4}{3}; -\dfrac{4}{5}; -\dfrac{2}{3}\right\}$; $A \setminus \mathbb{Q} = \left\{5\sqrt{2}; -\sqrt{108}; \sqrt{18}\right\}$; $A \setminus \mathbb{Z} = \left\{-\dfrac{3}{8}; \dfrac{5}{6}; -\dfrac{4}{9}; 8{,}2; 5\sqrt{2}; -\sqrt{108}; \dfrac{3}{2}; \dfrac{4}{3}; \sqrt{18}; -\dfrac{4}{5}; -\dfrac{2}{3}\right\}$; $A \setminus \mathbb{R} = \varnothing$; $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \left\{5\sqrt{2}; -\sqrt{108}; \sqrt{18}\right\}$. **9.** $A \cap \mathbb{N} = \{3; 4; 8; 36\}$; $A \cap \mathbb{Z} =$

$= \frac{CD}{2} = \frac{\frac{AC}{2}}{2} = \frac{AC}{4}$; $AH = AD + DH = \frac{AC}{2} + \frac{AC}{4} = \frac{3AC}{4} \Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{3}{4}$. **10.** a) $AF = CE$ (ip.); $AF \parallel CE$ (ipoteză) $\Rightarrow AECF$ paralelogram; b) $\frac{GB}{GD} = \frac{1}{2}$; $\frac{OG}{OD} = \frac{1}{3}$. **11.** $AB = 40$ cm; $CD = 30$ cm. **12.** $PQ = \frac{AB - CD}{2} \Rightarrow AB - CD = 16$ cm $\Rightarrow AB = 32$ cm $\Rightarrow DC = 16$ cm. Deoarece ΔABC echilateral $\Rightarrow \mathcal{P}_{\Delta ABC} = 96$ cm. **13.** $AB - CD = 2EF \Rightarrow AB - CD = 20$ cm, $BE = 20$ cm; $BC = 40$ cm $\Rightarrow AB = 80$ cm; $CD = 60$ cm. **14.** $AB + CD = 2MN$; $AB + CD = 24$ cm. Se arată că $AB = 2CD$; $DE \parallel BC$; $CD = 8$ cm, $AB = 16$ cm; $\mathcal{P}_{ABCD} = 40$ cm. **15.** $\left.\begin{array}{l} MN = 36 \text{ cm} \\ PQ = 12 \text{ cm} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} AB + CD = 72 \text{ cm} \\ AB - CD = 24 \text{ cm} \end{array}\right\} \Rightarrow AB = 48$ cm și $CD = 24$ cm. **16.** $\mathcal{P} = 70$ cm. **17.** Fie $DG \parallel AF$; $G \in BC$; ΔCDG: EF linie mijlocie $\Rightarrow FC = FG$; ΔBAF: DG linie mijlocie $\Rightarrow BG = FG \Rightarrow FC = FG = BG = 13$ cm. **18.** $EFGH$ paralelogram $\Rightarrow EG \cap FH = \{O'\}$. Dar OH este linie mijlocie în $\Delta ABD \Rightarrow OH \parallel AB$; OF este linie mijlocie în $\Delta ABC \Rightarrow OF \parallel AB$. Deci H, O, F coliniare $\Rightarrow O \in FH \Rightarrow O = O'$ (coincid) $\Rightarrow EG \cap FH = \{O\}$. **19.** a) Fie $DN \cap AB = \{P\}$; $\Delta DCN \equiv \Delta PBN$ (ULU) $\Rightarrow DC \equiv PB$ și $DN \equiv PN$. În ΔDAP: MN este linie mijlocie $\Rightarrow MN \parallel AP \Rightarrow MN \parallel AB$ și $MN = \frac{AP}{2} \Rightarrow$ b) $\left.\begin{array}{l} MN = \frac{AB + PB}{2} \\ \text{cum } PB = DC \end{array}\right\} \Rightarrow$ $\Rightarrow MN = \frac{AB + CD}{2}$. **20.** În trapezul $ABCD$, MN este linie mijlocie $\Rightarrow MN \parallel AB \parallel CD$; $PQ = MQ - MP$. În ΔABD, $MD = MA$ și $MP \parallel AB \Rightarrow MP$ este linie mijlocie $\Rightarrow MP = \frac{AB}{2}$. În ΔADC, $DM = AM$ și $MQ \parallel DC \Rightarrow MQ$ este linie mijlocie $\Rightarrow MQ = \frac{CD}{2}$. Deci: $PQ = \frac{CD}{2} - \frac{AB}{2} \Rightarrow PQ = \frac{CD - AB}{2}$.

10. Aria triunghiului și aria patrulaterului

1. a) 1050 cm^2; b) 108 cm^2; c) 360 cm^2; d) 625 mm^2; e) 216 cm^2. **2.** a) 864 cm^2; b) 270 cm^2; c) 246 cm^2; d) 490 cm^2. **3.** a) $BC = 24$ cm; $\mathcal{A}_{ABC} = 108$ cm^2; b) $AM = 9$ cm; $\mathcal{A}_{ABC} = 90$ cm^2; c) $BC = 24$ cm; $BN = 8$ cm. **4.** a) $BC = 15$ cm; $\mathcal{A}_{ABC} = 54$ cm^2; b) $BC = 20$ cm; $\mathcal{A}_{ABC} = 96$ cm^2; c) $AB = 15$ cm; $\mathcal{A}_{ABC} = 150$ cm^2; d) $AC = 24$ cm; $BC = 30$ cm; e) $AB = 32$ cm; $AD = 19{,}2$ cm. **5.** $\mathcal{A}_{ABCD} = 864$ cm^2. **6.** $\mathcal{A} = 100$ cm^2. **7.** a) $\mathcal{A}_{ABCD} = 156$ cm^2; b) $BC = 25$ cm; c) $BC = 18$ cm; d) $\mathcal{A}_{ABCD} = 360$ cm^2; e) $AB = 12{,}5$ cm. **8.** a) d$(C;\ AB) = 16$ cm; b) $\mathcal{A}_{ACM} = 84$ cm^2. **9.** 216 cm^2. **10.** a) $\mathcal{A} = 900$ cm^2; b) 810 cm^2. **11.** a) $AB = 3BC$; $\mathcal{P}_{ABCD} = 2(AB + BC) = 8BC$; $BC = 4$ cm; $AB = 12$ cm; b) Fie $DE \perp AB$, $E \in AB$; $DE = 2\sqrt{3}$ cm; $\mathcal{A}_{ABCD} = 24\sqrt{3}$ cm; Fie $DF \perp BC$, $F \in BC$, $DF = \text{d}(D, BC) = 6\sqrt{3}$ cm. **12.** a) $AB = AD + 24$; $AB = 4AD \Rightarrow AD = 8$ cm; $AB = 32$ cm; b) Fie $DE \perp AB$, $E \in AB$; $DE = \frac{AD}{2} = 4$ cm; $\mathcal{A}_{ABCD} = 128$ cm^2. **13.** a) $\mathcal{P}_{ABCD} = 2(AB + BC) \Rightarrow AB = 24$ cm; $BC = 18$ cm; b) În ΔMNP: $\sphericalangle MNP = 90°$, $AC \cap BD = \{O\}$; în ΔOMN; $AB = \frac{MN}{2} \Rightarrow MN = 48$ cm și în ΔONP: $BC = \frac{NP}{2} \Rightarrow NP = 36$ cm; d$(N, MP) = 28{,}8$ cm; c) $\mathcal{A}_{MNPQ} = MN \cdot NP = 1728$ cm^2. **14.** a) $\Delta APM \equiv \Delta NQM$ (IU) $\Rightarrow MP \equiv MQ$, cum $AM \equiv MN$ (ip.) $\Rightarrow APNQ$ este paralelogram; b) $\sphericalangle C = 30° \Rightarrow \Delta ABM$ – echilateral

Testul 4. 1. $\sphericalangle C = 52°$; $\overset{\frown}{AB} = 2\sphericalangle ACB = 104° \Rightarrow \sphericalangle AOB = 104°$; $\overset{\frown}{AC} = 2\sphericalangle ABC = 144° \Rightarrow \sphericalangle AOC = 144°$; $\overset{\frown}{BC} = 2\sphericalangle BAC = 112° \Rightarrow \sphericalangle BOC = 112°$. **2.** a) $\overset{\frown}{AD} = 50°$; $\sphericalangle A = \frac{\overset{\frown}{BCD}}{2} = \frac{200°}{2} = 100°$; $\sphericalangle B = \frac{\overset{\frown}{ADC}}{2} = \frac{180°}{2} = 90°$; $\sphericalangle C = \frac{\overset{\frown}{BAD}}{2} = \frac{160°}{2} = 80°$; $\sphericalangle D = \frac{\overset{\frown}{ABC}}{2} = \frac{180°}{2} = 90°$; b) $\sphericalangle AOB = \overset{\frown}{AB} = 110°$; $\sphericalangle BOC = \overset{\frown}{BC} = 70°$; $\sphericalangle COD = \overset{\frown}{CD} = 130°$; $\sphericalangle AOD = \overset{\frown}{AD} = 50°$. **3.** a) $\overset{\frown}{AD} = 40°$; $\overset{\frown}{ADC} = 150°$; $\overset{\frown}{BCD} = 170°$; $\overset{\frown}{ABC} = 210°$; $\overset{\frown}{BAD} = 190°$; b) $\sphericalangle A = 85°$; $\sphericalangle B = 75°$; $\sphericalangle C = 95°$; $\sphericalangle D = 105°$; c) $\sphericalangle DAC = \sphericalangle DBC = 55°$; $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC = 30°$; $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB = 75°$; $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD = 20°$.
4. $\sphericalangle AOC = 80°$; $\sphericalangle A = \frac{1}{2}\sphericalangle BOC = 75°$; $\sphericalangle B = \frac{1}{2}\sphericalangle AOC = 40°$; $\sphericalangle C = \frac{1}{2}\sphericalangle AOB = 65°$.

MODELE DE TESTE PENTRU EVALUAREA FINALĂ

Testul 1. I. 1. d). **2.** c). **3.** b). **4.** c). **5.** a). **6.** b). **II. 1.** d). **2.** c). **3.** b). **4.** d). **5.** b). **6.** d). **III. 1.** $x \in \{-3; 3\}$. **2.** $6\sqrt{6}$. **3.** $-\frac{5\sqrt{3}}{3}$. **4.** a) $\Delta AOM \equiv \Delta CON$ (LUL) $\Rightarrow OM \equiv ON$; b) Din a) $\Rightarrow \sphericalangle AOM \equiv \sphericalangle CON$ și A, O, C coliniare $\Rightarrow M$, O, N coliniare. **5.** a) În ΔABC: ED linie mijlocie $\Rightarrow ED \parallel BC \Rightarrow ED \parallel BF$ și $ED = BF = \frac{BC}{2} \Rightarrow BFDE$ paralelogram $\Rightarrow OB \equiv OD$; b) Din a) rezultă că $OE \equiv OF$. **6.** a) $\Delta QAM \equiv \Delta NCP$ (CC) $\Rightarrow QM \equiv CP$ (1); $\Delta MBN \equiv \Delta PDQ$ (CC) $\Rightarrow MN \equiv PQ$ (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow MNPQ$ paralelogram; cum $PM \cap NQ = \{O\} \Rightarrow OM \equiv OP$; b) Din a), rezultă că $ON \equiv OQ$.
Testul 2. I. 1. d). **2.** b). **3.** a). **4.** a). **5.** b). **6.** c). **II. 1.** d). **2.** d). **3.** b). **4.** d). **5.** c). **6.** c). **III. 1.** $x = 60^{2n} \cdot 13^2 \Rightarrow \sqrt{x} = 60^n \cdot 13 \in \mathbb{N}$ par. **2.** a) $a = \sqrt{5}+1$; $b = \sqrt{5}-1$; b) $m_g = 2$. **3.** $a = \frac{8\sqrt{3}}{3}$. **4.** a) $\Delta ADF \equiv \Delta CMD$ (LUL) $\Rightarrow DF \equiv DM$; b) $\sphericalangle EBN = 360° - (180° + \sphericalangle ABC) = 180° - \sphericalangle ABC = \sphericalangle BAD$; $\Delta EBN \equiv \Delta BAD$ (LUL) $\Rightarrow BD \equiv EN$. **5.** a) $\sphericalangle ADC = 120° \Rightarrow \sphericalangle BAD = \sphericalangle ABC = 60°$; cum $\sphericalangle ACB = 90° \Rightarrow \sphericalangle BAC = 30° \Rightarrow \sphericalangle DAC = 30° \Rightarrow \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle DAC \Rightarrow AC$ bisectoarea $\sphericalangle BAD$; b) ΔADC isocel ($\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle DCA = 30°$) $\Rightarrow DC = AD = 8$ cm $\Rightarrow BC = 8$ cm și $AB = 16$ cm. Deci $\mathscr{P}_{ABCD} = 40$ cm. **6.** a) $\sphericalangle B = 60° \Rightarrow \sphericalangle C = 30°$; $\sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle CBM = 30° \Rightarrow \Delta MBC$ isoscel ($MB \equiv MC$) cum $MN \perp BC \Rightarrow BN = CN$. Cum $NP \parallel AB \Rightarrow NP \perp AC$, iar $NQ \parallel AC \Rightarrow NQ \perp AB$. Deci: $\sphericalangle QAP = \sphericalangle APN = \sphericalangle AQN = 90° \Rightarrow AQNP$ – dreptunghi. b) Deoarece $BN = CN$ (demonstrat) $\Rightarrow AN$ mediană, deci $AN = \frac{BC}{2}$. Cum $AQNP$ dreptunghi $\Rightarrow QP = AN$ (diagonale) $\Rightarrow QP = AN = \frac{BC}{2}$.

TESTE RECAPITULATIVE

Testul 1. 1. $x = 1 + 1 + 1 + 1 = 4 \Rightarrow x = 2^2$ (p.p.). **2.** $a = 4\sqrt{2}$; $b = 4\sqrt{3}$; $a \cdot b = 16\sqrt{6}$; $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.
3. $a = 13$. **4.** În ΔABC: MN este linie mijlocie $\Rightarrow MN \parallel AC$ și $MN = \frac{AC}{2}$. În ΔADC: PQ este linie mijlocie $\Rightarrow PQ \parallel AC$ și $PQ = \frac{AC}{2}$. Deci $MN \parallel PQ$ și $MN = PQ \Rightarrow MNPQ$ paralelogram. **5.** a) $\mathscr{A}_{CEF} = \mathscr{A}_{ABCD} - (\mathscr{A}_{AEF} + \mathscr{A}_{BEC} + \mathscr{A}_{CDF}) = 240$ cm^2; b) $\mathscr{A}_{EFC} = \frac{EF \cdot d(C, EF)}{2} \Rightarrow d(C, EF) = 24$ cm.

Cuprins