

Ion TUDOR

matematică

algebră, geometrie

- Modalități de lucru diferențiate
- Pregătire suplimentară prin planuri individualizate

Caiet de lucru

Partea I

7

Ediția a IX-a

Editura Paralela 45

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.N. nr. 4696/02.08.2019.

Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programul școlar în vigoare pentru clasa a VII-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Referință științifică: Lucrarea a fost definitivată prin contribuția și recomandările Comisiei științifice și metodice a publicațiilor Societății de Științe Matematice din România. Aceasta și-a dat avizul favorabil în ceea ce privește alcătuirea și conținutul matematic.

Director de producție editorială: Ionuț Burcioiu

Redactare: Roxana Pietreanu

Tehnoredactare: Iuliana Ene

Pregătire de tipar: Marius Badea

Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

TUDOR, ION

Matematică : [clasa] 7 : algebră, geometrie : modalități de lucru diferențiate, pregătire suplimentară prin planuri individualizate : caiet de lucru / Ion Tudor. – Ed. a 9-a. – Pitești : Paralela 45, 2025 – 2 vol.

ISBN 978-973-47-4300-1

Partea 1. – 2025. – ISBN 978-973-47-4301-8

51

COMENZI – CARTEA PRIN POȘTĂ

EDITURA PARALELA 45

Bulevardul Republicii, Nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești,
jud. Argeș, cod 110177

Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918

Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492

E-mail: comenzi@edituraparelela45.ro

sau accesați www.edituraparelela45.ro

Tiparul executat la tipografia Editurii Paralela 45

E-mail: tipografie@edituraparelela45.ro

Copyright © Editura Paralela 45, 2025

Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate,
iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.
www.edituraparelela45.ro

Teste de evaluare inițială

Testul 1

Se acordă 1 punct din oficiu.

Partea I – Scrieți litera corespunzătoare singurului răspuns corect:

- (0,5p) 1. Forma zecimală a fracției ordinare $\frac{3}{4}$ este:
A. 0,5; B. 0,75; C. 0,65; D. 0,8.
- (0,5p) 2. Cel mai mic număr natural prim de două cifre este:
A. 10; B. 15; C. 11; D. 13.
- (0,5p) 3. Suma numerelor raționale pozitive $1\frac{1}{3}$ și $\frac{1}{6}$ este egală cu:
A. $\frac{3}{2}$; B. $\frac{2}{3}$; C. $\frac{5}{6}$; D. $\frac{3}{4}$.
- (0,5p) 4. Suplementul unghiului cu măsura de 78° este unghiul cu măsura de:
A. 160° ; B. 12° ; C. 90° ; D. 102° .
- (0,5p) 5. Rezultatul calculului $(-1)^{2017} + (-1)^{2018}$ este egal cu:
A. 2; B. -2; C. -1; D. 0.
- (0,5p) 6. Soluția inecuației $-3x \leq 9$, unde $x \in \mathbb{Z}$, este:
A. $\{3, 4, 5, \dots\}$; B. $\{-3, -2, -1, \dots\}$; C. $\{\dots, -5, -4, -3\}$; D. $\{\dots, 1, 2, 3\}$.
- (0,5p) 7. Cel mai mic multiplu comun al numerelor 6 și 8 este egal cu:
A. 12; B. 24; C. 48; D. 18.
- (0,5p) 8. Dacă ABC este un triunghi dreptunghic în A și $\sphericalangle B = 4\sphericalangle C$, atunci măsura unghiului C este egală cu:
A. 60° ; B. 30° ; C. 18° ; D. 45° .
- (0,5p) 9. Calculând 40% din 35 obținem numărul:
A. 15; B. 40; C. 70; D. 14.

Partea a II-a – La următoarele probleme se cer rezolvări complete:

- (0,8p) 1. Se consideră triunghiul isoscel ABC . Dacă $AB = 10$ cm și $AC = 4,5$ cm, aflați BC .

2. Se consideră numărul rațional pozitiv $x = \frac{11}{10} - \left[2\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right] : \frac{5}{2}$.

(0,8p) a) Arătați că $x = \frac{4}{15}$.

(0,7p) b) Rotunjiți la a doua zecimală numărul rațional pozitiv x .

ALGEBRĂ

Capitolul I

MULȚIMEA NUMERELOR REALE

Lecția 1. Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural. Estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional



Citesc și rețin

Definiție: Un număr natural a se numește **pătrat perfect** dacă există un număr natural b , astfel încât $a = b^2$.

Exemple: $9 = 3^2$, $25 = 5^2$, $100 = 10^2$.

Observație: Dacă a , $a \neq 0$, este un număr natural pătrat perfect, atunci există două numere întregi b și $-b$ cu proprietatea că $a = b^2 = (-b)^2$.

Exemple: $1 = 1^2 = (-1)^2$, $4 = 2^2 = (-2)^2$, $9 = 3^2 = (-3)^2$.

Definiție: **Rădăcina pătrată** a numărului natural pătrat perfect a ($a = b^2$, $b \in \mathbb{Z}$) este numărul natural $|b|$. Notăm $\sqrt{a} = |b|$.

Exemple: $\sqrt{5^2} = 5$; $\sqrt{19^2} = 19$; $\sqrt{(-11)^2} = |-11| = 11$.

Observații:

1. Dacă $a = b^2$, $b \in \mathbb{N}$, atunci $\sqrt{a} = b$.

2. Dacă $a \in \mathbb{N}$ și $b \in \mathbb{N}^*$, atunci $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.



Cum se aplică?

1. Calculați:

a) $\sqrt{25}$;

Soluție:

a) $\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$;

2. Calculați:

a) $\sqrt{\frac{49}{64}}$;

Soluție:

a) $\sqrt{\frac{49}{64}} = \sqrt{\frac{7^2}{8^2}} = \frac{7}{8}$;

b) $\sqrt{81}$.

b) $\sqrt{81} = \sqrt{9^2} = 9$.

b) $\sqrt{\frac{48}{75}}$.

b) $\sqrt{\frac{48^3}{75}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{4^2}{5^2}} = \frac{4}{5}$.

3. Determinați cardinalul mulțimii $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 5 < \sqrt{n} \leq 6\}$.

Soluție:

$5 < \sqrt{n} \leq 6$, deci $25 < n \leq 36$, de unde rezultă $A = \{26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36\}$, prin urmare $\text{card } A = 11$.



Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Arătați că următoarele numere naturale sunt pătrate perfecte:

- a) $16 = \dots\dots\dots$; b) $36 = \dots\dots\dots$; c) $49 = \dots\dots\dots$; d) $64 = \dots\dots\dots$; e) $81 = \dots\dots\dots$;
f) $100 = \dots\dots\dots$; g) $144 = \dots\dots\dots$; h) $196 = \dots\dots\dots$; i) $324 = \dots\dots\dots$; j) $400 = \dots\dots\dots$.

2. Citiți următoarele propoziții:

- a) $\sqrt{25} = 5$; b) $\sqrt{169} = 13$; c) $\sqrt{361} = 19$; d) $\sqrt{81} = 9$.

3. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

- a) $\sqrt{14^2} = 14$; ☐ b) $\sqrt{19^2} = 19$; ☐ c) $\sqrt{41^2} = 41$; ☐
d) $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$; ☐ e) $\sqrt{(-13)^2} = -13$; ☐ f) $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$; ☐

4. Calculați:

- a) $\sqrt{16} = \dots\dots\dots$; b) $\sqrt{25} = \dots\dots\dots$; c) $\sqrt{36} = \dots\dots\dots$; d) $\sqrt{49} = \dots\dots\dots$; e) $\sqrt{64} = \dots\dots\dots$;
f) $\sqrt{100} = \dots\dots\dots$; g) $\sqrt{121} = \dots\dots\dots$; h) $\sqrt{144} = \dots\dots\dots$; i) $\sqrt{225} = \dots\dots\dots$; j) $\sqrt{256} = \dots\dots\dots$.

5. Completați spațiile punctate cu răspunsul corect:

- a) $\sqrt{(-11)^2} = \dots\dots\dots$; b) $\sqrt{(-23)^2} = \dots\dots\dots$; c) $\sqrt{(-59)^2} = \dots\dots\dots$; d) $\sqrt{(-77)^2} = \dots\dots\dots$.

6. Determinați mulțimile:

- a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{x^2} = 7\} = \dots\dots\dots$; b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{x^2} = 8\} = \dots\dots\dots$;
c) $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{x^2} = 29\} = \dots\dots\dots$; d) $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{x^2} = 67\} = \dots\dots\dots$.

7. Calculați:

- a) $\sqrt{16} + \sqrt{25}$; b) $\sqrt{64} - \sqrt{49}$; c) $\sqrt{36} + \sqrt{81}$; d) $\sqrt{64} + \sqrt{25}$;
e) $\sqrt{81} - \sqrt{36} = \dots\dots\dots$; f) $\sqrt{16} - \sqrt{64} = \dots\dots\dots$.

8. Calculați:

- a) $(\sqrt{225} - \sqrt{36}) \cdot \sqrt{100}$; b) $\sqrt{121} : (\sqrt{25} - \sqrt{256})$; c) $\sqrt{144} : (\sqrt{49} - \sqrt{169})$;
d) $\sqrt{196} : (\sqrt{64} - \sqrt{100}) = \dots\dots\dots$.

9. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a) $\sqrt{\frac{4}{81}} = \frac{2}{9}$; ☐ b) $\sqrt{\frac{49}{25}} = \frac{7}{5}$; ☐ c) $\sqrt{\frac{81}{16}} = \frac{9}{4}$; ☐ d) $\sqrt{\frac{64}{9}} = \frac{8}{3}$; ☐

10. Calculați:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \sqrt{\frac{36}{25}} = \text{---}; & \text{b) } \sqrt{\frac{16}{49}} = \text{---}; & \text{c) } \sqrt{\frac{64}{81}} = \text{---}; & \text{d) } \sqrt{\frac{25}{49}} = \text{---}; \\ \text{e) } \sqrt{\frac{81}{100}} = \text{---}; & \text{f) } \sqrt{\frac{49}{144}} = \text{---}; & \text{g) } \sqrt{\frac{225}{64}} = \text{---}; & \text{h) } \sqrt{\frac{196}{25}} = \text{---}. \end{array}$$

Exerciții și probleme de dificultate medie

11. Efectuați mai întâi simplificările și apoi calculați:

$$\text{a) } \sqrt{\frac{27}{12}}; \quad \text{b) } \sqrt{\frac{18}{32}}; \quad \text{c) } \sqrt{\frac{45}{20}}; \quad \text{d) } \sqrt{\frac{75}{108}}; \quad \text{e) } \sqrt{\frac{96}{294}}; \quad \text{f) } \sqrt{\frac{175}{567}}.$$

12. Calculați:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \sqrt{0,75 \cdot 0,(3)}; & \text{b) } \sqrt{0,96 \cdot 0,(6)}; & \text{c) } \sqrt{0,27 \cdot 1,(3)}; & \text{d) } \sqrt{1,35 \cdot 1,(6)}; \\ \text{e) } \sqrt{0,3 \cdot 2,1(3)}; & \text{f) } \sqrt{0,6 \cdot 0,2(6)}; & \text{g) } \sqrt{5,5 \cdot 0,6(1)}; & \text{h) } \sqrt{4,5 \cdot 1,3(8)}. \end{array}$$

13. Determinați cel mai mic număr natural nenul n pentru care:

$$\text{a) } \sqrt{45 \cdot n} \in \mathbb{N}; \quad \text{b) } \sqrt{63 \cdot n} \in \mathbb{N}; \quad \text{c) } \sqrt{75 \cdot n} \in \mathbb{N}; \quad \text{d) } \sqrt{80 \cdot n} \in \mathbb{N}.$$

14. Calculați rădăcina pătrată a numărului natural n , în următoarele cazuri:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } n = \sqrt{225} + \sqrt{100} - \sqrt{81}; & \text{b) } n = \sqrt{324} + \sqrt{25} + \sqrt{169}; \\ \text{c) } n = 3\sqrt{256} - \sqrt{16} + \sqrt{400}; & \text{d) } n = \sqrt{324} - \sqrt{49} + 5\sqrt{196}. \end{array}$$

15. Calculați rădăcina pătrată a numărului natural n , în următoarele cazuri:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } n = (\sqrt{576} + \sqrt{256}) : \sqrt{100}; & \text{b) } n = \sqrt{324} : (\sqrt{256} - \sqrt{196}); \\ \text{c) } n = (\sqrt{900} + \sqrt{324}) : \sqrt{144}; & \text{d) } n = \sqrt{144} \cdot (\sqrt{289} - \sqrt{196}). \end{array}$$

16. Determinați mulțimile:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } A = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 < \sqrt{n} < 2\}; & \text{b) } B = \{n \in \mathbb{N} \mid 2 \leq \sqrt{n} < 3\}; \\ \text{c) } C = \{n \in \mathbb{N} \mid 3 < \sqrt{n} \leq 4\}; & \text{d) } D = \{n \in \mathbb{N} \mid 4 \leq \sqrt{n} \leq 5\}. \end{array}$$

17. i) Determinați numerele naturale consecutive m și n pentru care $m < x < n$, în fiecare din cazurile:

$$\text{a) } x = \sqrt{35}; \quad \text{b) } x = \sqrt{51}; \quad \text{c) } x = \sqrt{73}; \quad \text{d) } x = \sqrt{94}.$$

ii) Determinați numerele naturale consecutive p și q pentru care $p < x < q$, în următoarele cazuri:

$$\text{a) } x = \sqrt{27,5}; \quad \text{b) } x = \sqrt{43,2}; \quad \text{c) } x = \sqrt{61,7}; \quad \text{d) } x = \sqrt{79,8}.$$

18. Calculați:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \sqrt{\frac{1}{49}} + \sqrt{\frac{1}{16}}; & \text{b) } \sqrt{\frac{1}{25}} - \sqrt{\frac{1}{36}}; & \text{c) } \sqrt{\frac{1}{16}} + \sqrt{\frac{1}{36}}; \\ \text{d) } \sqrt{\frac{49}{64}} - \sqrt{\frac{25}{144}}; & \text{e) } \sqrt{\frac{81}{25}} - \sqrt{\frac{9}{100}}; & \text{f) } \sqrt{\frac{81}{400}} + \sqrt{\frac{16}{25}}. \end{array}$$

19. Calculați:

a) $\sqrt{\frac{1}{16}} : \left(\sqrt{\frac{4}{9}} + \sqrt{\frac{49}{36}} - \sqrt{\frac{9}{144}} \right);$

b) $\sqrt{\frac{1}{64}} : \left(\sqrt{\frac{100}{9}} - \sqrt{\frac{25}{16}} - \sqrt{\frac{9}{64}} \right);$

c) $\left(\sqrt{\frac{225}{81}} - \sqrt{\frac{121}{36}} - \sqrt{\frac{49}{16}} \right) : \sqrt{\frac{1}{36}};$

d) $\left(\sqrt{\frac{169}{400}} - \sqrt{\frac{81}{100}} + \sqrt{\frac{64}{25}} \right) : \sqrt{\frac{1}{25}}.$

20. Arătați că $x \in \mathbb{Q}$ în următoarele cazuri:

a) $x = \sqrt{1 + \sqrt{\frac{25}{16}}} : \sqrt{\frac{81}{64}};$

b) $x = \sqrt{\frac{25}{64}} : \sqrt{9 - \sqrt{\frac{121}{16}}};$

c) $x = \sqrt{\frac{25}{36}} : \sqrt{2 + \sqrt{\frac{49}{81}}}.$

21. Arătați că $n \in \mathbb{N}$ în următoarele cazuri:

a) $n = \sqrt{1,44} + \sqrt{2,25} + \sqrt{5,29};$

b) $n = \sqrt{2,56} + \sqrt{6,76} + \sqrt{7,84}.$

22. Calculați:

a) $\left[\sqrt{1,3(8) : 0,5} + \sqrt{2\frac{14}{25}} \right] : \sqrt{1,96};$

b) $\left[\sqrt{0,8(3) : 1,2} - \sqrt{1\frac{40}{81}} \right] : \sqrt{0,49}.$

23. Determinați cel mai mic număr natural nenul n , pentru care:

a) $\sqrt{\frac{12 \cdot n}{245}} \in \mathbb{Q};$

b) $\sqrt{\frac{968}{n \cdot 75}} \in \mathbb{Q}.$

c) $\sqrt{\frac{27 \cdot n}{448}} \in \mathbb{Q}.$

Exerciții și probleme de dificultate avansată

24. Se consideră produsul $p = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$. Este posibil ca înlocuind unul dintre factorii produsului p cu o cifră să avem $\sqrt{p} \in \mathbb{N}^*$? Justificați răspunsul.

25. Dacă $\sqrt{73abc} \in \mathbb{N}$, arătați că $\sqrt{\sqrt{abc} - \sqrt{a+b+c} \cdot \sqrt{a \cdot b \cdot c}} \in \mathbb{N}$, unde $0 < a < 9$.



Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) 1. Calculați:

a) $(\sqrt{100} + \sqrt{64}) : \sqrt{9};$ b) $\sqrt{49} \cdot (\sqrt{4} - \sqrt{196});$ c) $\sqrt{144} : (\sqrt{1} + \sqrt{121}).$

(3p) 2. Determinați mulțimea $E = \{n \in \mathbb{N} \mid 5 < \sqrt{n} < 6\}$ și precizați cardinalul ei.

(3p) 3. Rotunjiți la prima zecimală numărul:

$$a = \left(\sqrt{\frac{9}{64}} + \sqrt{\frac{25}{16}} - \sqrt{\frac{121}{100}} \right) : \sqrt{1,2 : 0,8(3)}.$$



Teste de evaluare sumativă

Testul 1

Se acordă 1 punct din oficiu.

(2p) 1. Calculați:

a) $\sqrt{16} + \sqrt{9}$;

b) $\sqrt{4} - \sqrt{49}$.

(2p) 2. Scoateți factorii de sub radical:

a) $\sqrt{24}$;

b) $3\sqrt{75}$.

(1p) 3. Încercuiți litera corespunzătoare singurului răspuns corect:

A. $\sqrt{1\frac{3}{4}} \in \mathbb{N}$;

B. $\sqrt{1\frac{3}{4}} \in \mathbb{Z}$;

C. $\sqrt{1\frac{3}{4}} \in \mathbb{Q}$;

D. $\sqrt{1\frac{3}{4}} \in \mathbb{I}$.

(1p) 4. Precizați cel mai mic și cel mai mare dintre următoarele numere reale: $-4\sqrt{3}$, $-5\sqrt{2}$, $-2\sqrt{11}$, $-3\sqrt{5}$.

(1p) 5. Știind că $\sqrt{3} = 1,73...$, calculați rădăcina pătrată a numărului $x = |\sqrt{3} - 1,74| + |1,73 - \sqrt{3}|$.

(2p) 6. Se consideră numărul $a = \left(\sqrt{\frac{25}{36}} - \sqrt{\frac{49}{81}} \right) : \frac{1}{\sqrt{64}}$. Rotunjiți la a treia zecimală numărul $\sqrt{a}$.

Testul 2

Se acordă 1 punct din oficiu.

(2p) 1. Calculați:

a) $\sqrt{36} + \sqrt{25}$;

b) $\sqrt{16} - \sqrt{81}$.

(2p) 2. Introduceți factorii sub radical:

a) $7\sqrt{2}$;

b) $-2\sqrt{5}$.

(1p) 3. Încercuiți litera corespunzătoare singurului răspuns corect:

A. $\sqrt{\frac{75}{12}} \in \mathbb{N}$;

B. $\sqrt{\frac{75}{12}} \in \mathbb{Z}$;

C. $\sqrt{\frac{75}{12}} \in \mathbb{Q}$;

D. $\sqrt{\frac{75}{12}} \in \mathbb{I}$.

(1p) 4. Reprezentați pe axa numerelor aproximările cu o unitate prin lipsă, respectiv prin adaos, ale numerelor reale $\sqrt{10}$ și $-\sqrt{23}$.

(1p) 5. Determinați valoarea absolută a numărului real $x = |5 - 3\sqrt{3}| - |3\sqrt{3} - 4|$.

(2p) 6. Rotunjiți la prima zecimală numărul real $x = \sqrt{100} \cdot \left(\sqrt{\frac{16}{25}} + \sqrt{0,01} - \sqrt{\frac{49}{64}} \right)$.

Lecția 14. Ecuația de forma $x^2 = a$, unde $a \in \mathbb{R}$



Citesc și rețin

Definiție: Un număr $u \in \mathbb{R}$ se numește **soluție a ecuației**

$$x^2 = a, a \in \mathbb{R} \quad (1)$$

dacă $u^2 = a$ (u verifică ecuația).

A rezolva ecuația (1) înseamnă a determina **mulțimea de soluții**

$$S = \{u \in \mathbb{R} \mid u^2 = a\}.$$

- Dacă $a < 0$, atunci $S = \emptyset$.
- Dacă $a = 0$, atunci $S = \{0\}$.
- Dacă $a > 0$, atunci ecuația (1) are două soluții, $x = \sqrt{a}$ și $x = -\sqrt{a}$, prin urmare $S = \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}$.



Cum se aplică?

1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $x^2 = 64$; b) $6x^2 = \frac{75}{2}$; c) $x^2 = 1, (7)$.

Soluție:

a) $x^2 = 64$, deci $x = \sqrt{64}$ sau $x = -\sqrt{64}$, de unde rezultă că $x = 8$ sau $x = -8$, prin urmare $x \in \{-8, 8\}$;

b) $6x^2 = \frac{75}{2}$, de unde rezultă că $x^2 = \frac{75}{2} : 6$, deci $x^2 = \frac{75}{12}$, prin urmare $x^2 = \frac{25}{4}$,

de unde rezultă că $x = \sqrt{\frac{25}{4}}$ sau $x = -\sqrt{\frac{25}{4}}$, deci $x = \frac{5}{2}$ sau $x = -\frac{5}{2}$, prin urmare

$$x \in \left\{-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right\};$$

c) $x^2 = 1, (7)$, deci $x^2 = \frac{16}{9}$, de unde rezultă că $x = \sqrt{\frac{16}{9}}$ sau $x = -\sqrt{\frac{16}{9}}$, deci $x = \frac{4}{3}$

sau $x = -\frac{4}{3}$, prin urmare $x \in \left\{-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right\}$.

2. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $x^2 = 54$.

Soluție:

$x^2 = 54$, deci $x = \sqrt{54}$ sau $x = -\sqrt{54}$, de unde rezultă că $x = 3\sqrt{6}$ sau $x = -3\sqrt{6}$, prin urmare $x \in \{-3\sqrt{6}, 3\sqrt{6}\}$.

14. Rezolvați în $\mathbb{R}$ următoarele ecuații:

a) $(x - \sqrt{2})^2 = 18$; b) $(x + \sqrt{3})^2 = 12$; c) $(\sqrt{5} - x)^2 = 45$.

15. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $2(x + 15)^2 = 32$; b) $3(x - 12)^2 = 75$; c) $4(4x + 1)^2 = 36$; d) $7(3 - 5x)^2 = 28$.

16. Rezolvați următoarele ecuații, unde $x \in \mathbb{R}$:

a) $(4x - 5\sqrt{5})^2 = 45$; b) $(2\sqrt{6} + 3x)^2 = 96$; c) $(3\sqrt{2} - 2x)^2 = 50$.

17. Determinați numărul întreg x care verifică egalitatea:

a) $x^2 = 2^{50} + 2^{53}$; b) $x^2 = 3^{24} + 3^{25}$; c) $x^2 = 5^{33} - 5^{32}$;
d) $x^2 = 2^{24} - 2^{23} + 2^{20}$; e) $x^2 = 3^{23} - 3^{20} - 3^{20}$; f) $x^2 = 2^{32} + 2^{31} + 2^{28}$.

18. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $x^2 = 3^{18} + 3^{21}$; b) $x^2 = 2^{26} - 2^{20}$; c) $x^2 = 3^{20} - 3^{16}$; d) $x^2 = 5^{28} - 5^{26}$.

Exerciții și probleme de dificultate avansată

19. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația $x^2 = 1 + 2 + 3 + \dots + \overline{ab}$, $a \neq 0$.

20. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația $x^2 = \overline{ababcd}$, unde $\overline{ab} = 4\overline{cd}$, $a \neq 0$, $c \neq 0$.



Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $x^2 = 81$; b) $x^2 = 24$; c) $x^2 = 1,3(8)$.

(3p) **2.** Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $(x - 5)^2 = 64$.

(3p) **3.** Determinați numărul întreg x care verifică egalitatea: $x^2 = 2^{26} + 2^{29} + 2^{30}$.



Teste de evaluare sumativă

Testul 1

Se acordă 1 punct din oficiu.

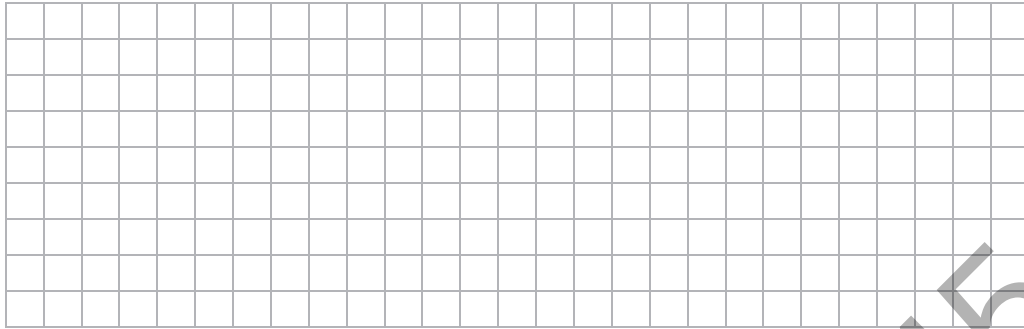
(2p) **1.** Calculați media aritmetică a numerelor:

a) $\frac{3}{5}$ și $\frac{7}{5}$; b) $6\sqrt{6}$ și $8\sqrt{6}$.

(2p) **2.** Calculați media geometrică a numerelor:

a) 25 și 36; b) $2\sqrt{6}$ și $3\sqrt{6}$.

(1p) **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $x^2 = 75$.

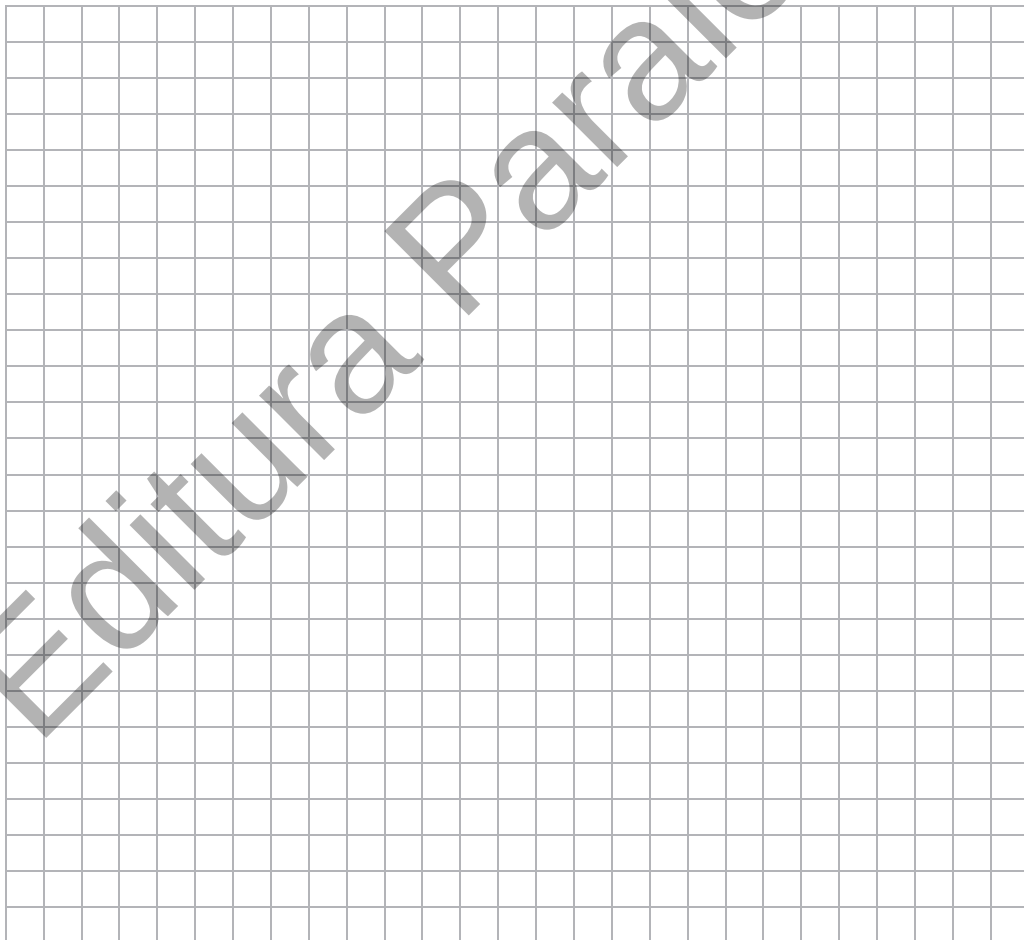


V. Media aritmetică ponderată a numerelor $\frac{50}{\sqrt{5}}$ și $\frac{15}{\sqrt{5}}$ cu ponderile n , respectiv $n + 2$,

$n \in \mathbb{N}$, este egală cu $6\sqrt{5}$.

(8p) a) Determinați numărul natural n .

(8p) b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $x^2 = \frac{n+3}{n+2}$.



GEOMETRIE

Capitolul I PATRULATERUL

Lecția 1. Patrulaterul convex



Citesc și rețin

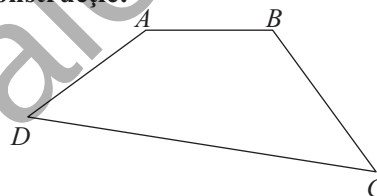
Definiție: Numim **patrulater** de vârfuri A, B, C și D reuniunea segmentelor $AB \cup BC \cup CD \cup DA$, unde punctele distincte A, B, C și D îndeplinesc condițiile:

- oricare trei dintre ele sunt necoliniare;
- $AB \cap CD = \emptyset, BC \cap AD = \emptyset$.

Patrulaterul de vârfuri A, B, C și D se notează $ABCD$.

Definiție: Un **patrulater** se numește **convex** dacă dreapta determinată de oricare două vârfuri alăturate ale acestuia **nu separă** celelalte două vârfuri ale patrulaterului.

Construcție:



Elemente:

- vârfurile patrulaterului: A, B, C, D ;
- laturile patrulaterului: AB, BC, CD, DA ;
- unghiurile patrulaterului: $\sphericalangle A, \sphericalangle B, \sphericalangle C, \sphericalangle D$;
- diagonalele patrulaterului: AC, BD .

Laturile AB și BC , BC și CD etc. se numesc **alăturate**, iar laturile AB și CD , respectiv BC și DA se numesc **opuse**.

Unghiurile $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle B$, $\sphericalangle B$ și $\sphericalangle C$ etc. se numesc **alăturate**, iar unghiurile $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle C$, respectiv $\sphericalangle B$ și $\sphericalangle D$ se numesc **opuse**.

Proprietăți:

Teoremă: Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este egală cu 360° .

Definiție: Perimetrul patrulaterului convex $ABCD$ este dat de formula:

$$\mathcal{P}_{ABCD} = AB + BC + CD + DA.$$



Cum se aplică?

1. Fie $ABCD$ un patrulater convex. Dacă $\sphericalangle A = 60^\circ$, $\sphericalangle B = 73^\circ$ și $\sphericalangle C = 135^\circ$, aflați măsura unghiului D .

Soluție:

$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D = 360^\circ$, deci $60^\circ + 73^\circ + 135^\circ + \sphericalangle D = 360^\circ$ sau $268^\circ + \sphericalangle D = 360^\circ$, de unde rezultă că $\sphericalangle D = 360^\circ - 268^\circ$ și obținem $\sphericalangle D = 92^\circ$.

2. Calculați perimetrul patrulaterului convex $DEFG$, cu $DE = 7$ cm, $EF = 5$ cm, $FG = 3$ cm și $GD = 6$ cm.

Soluție:

$$\mathcal{P}_{DEFG} = DE + EF + FG + GD = 7 \text{ cm} + 5 \text{ cm} + 3 \text{ cm} + 6 \text{ cm} = 21 \text{ cm}.$$

3. Determinați măsurile unghiurilor patrulaterului convex $MNPQ$ știind că $\sphericalangle M = 5\sphericalangle P$, $\sphericalangle N = 2\sphericalangle P$ și $\sphericalangle Q = 4\sphericalangle P$.

Soluție:

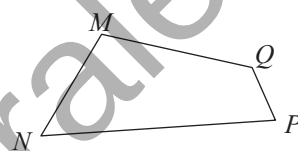
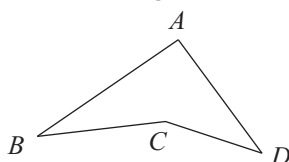
$\sphericalangle M + \sphericalangle N + \sphericalangle P + \sphericalangle Q = 360^\circ$, deci $5\sphericalangle P + 2\sphericalangle P + \sphericalangle P + 4\sphericalangle P = 360^\circ$, deci $12\sphericalangle P = 360^\circ$, de unde rezultă că $\sphericalangle P = 360^\circ : 12$ și obținem $\sphericalangle P = 30^\circ$; $\sphericalangle M = 5 \cdot 30^\circ = 150^\circ$; $\sphericalangle N = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$ și $\sphericalangle Q = 4 \cdot 30^\circ = 120^\circ$.



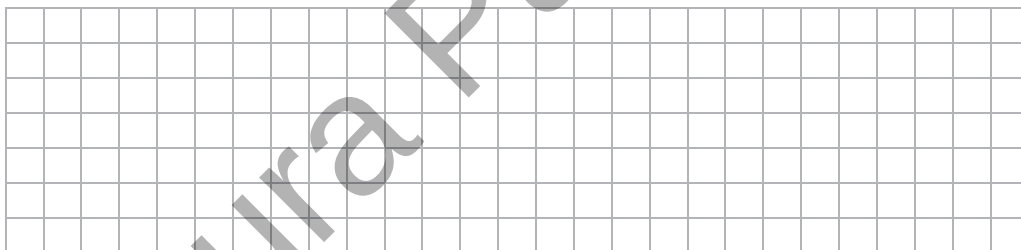
Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Completați spațiul punctat cu răspunsul corect. Dintre patrulateralele $ABCD$ și $MNPQ$ reprezentate în figurile următoare, cel convex este patrulaterul

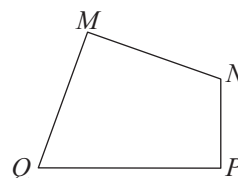


2. Construiți patrulaterul convex $ABCD$ și notați cu O punctul de intersecție al diagonalelor acestuia.



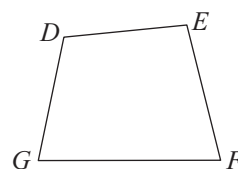
3. În figura alăturată este reprezentat patrulaterul convex $MNPQ$. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a) $\sphericalangle M$ și $\sphericalangle N$ sunt alăturate;
- b) $\sphericalangle P$ și $\sphericalangle Q$ sunt opuse;
- c) $\sphericalangle N$ și $\sphericalangle Q$ sunt alăturate;
- d) $\sphericalangle M$ și $\sphericalangle P$ sunt opuse.



4. În figura alăturată este reprezentat patrulaterul convex $DEFG$. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a) laturile DE și FG sunt alăturate;
- b) laturile DG și FG sunt opuse;
- c) laturile DE și EF sunt alăturate;
- d) laturile DG și EF sunt opuse.



- 14.** Determinați măsurile unghiurilor patrulaterului convex $ABCD$, știind că:
- $\angle B = 2\angle A$, $\angle C = \angle A + 50^\circ$ și $\angle D = 3\angle A - 47^\circ$;
 - $\angle A = \angle D + 35^\circ$, $\angle B = 3\angle D$ și $\angle C = 3\angle D - 43^\circ$.
- 15.** Determinați lungimile laturilor patrulaterului convex $ABCD$ cu perimetrul de 100 cm, știind că:
- $BC = 2AB$, $CD = AB + 13$ cm și $DA = AB - 8$ cm;
 - $AB = AD + 15$ cm, $BC = 3AD$ și $CD = AD - 5$ cm.
- 16.** Determinați măsurile unghiurilor patrulaterului convex $DEFG$, știind că:
- $\angle E = 60\%\angle D$, $\angle F = 80\%\angle D$ și $\angle G = 60\%\angle D$;
 - $\angle D = 20\%\angle G$, $\angle E = 40\%\angle G$ și $\angle F = 80\%\angle G$.
- 17.** Determinați măsurile unghiurilor patrulaterului convex $MNPQ$, știind că acestea sunt direct proporționale cu numerele:
- 6, 7, 10 și 13;
 - 8, 9, 13 și 15.
- 18.** Determinați măsurile unghiurilor patrulaterului convex $DEFG$, știind că acestea sunt invers proporționale cu numerele:
- 4, 5, 8 și 40;
 - 3, 4, 6 și 12.

Exerciții și probleme de dificultate avansată

- 19.** Se consideră patrulaterul convex $ABCD$. Arătați că $AC + BD < \mathcal{P}_{ABCD}$.
- 20.** Se consideră patrulaterul convex $ABCD$. Știind că $\mathcal{P}_{ABD} = \mathcal{P}_{ACD}$ și $\mathcal{P}_{BCD} = \mathcal{P}_{ABC}$, arătați că:
- $AC \equiv BD$;
 - $AB \equiv CD$.



Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

- (3p) **1.** Se consideră patrulaterul convex $DEFG$. Știind că $\angle D = 56^\circ$, $\angle E = 115^\circ$ și $\angle G = 104^\circ$, aflați $\angle F$.
- (3p) **2.** În patrulaterul convex $MNPQ$, măsura unghiului $\angle M$ este egală cu media aritmetică a măsurilor unghiurilor $\angle N$, $\angle P$ și $\angle Q$. Aflați $\angle M$.
- (3p) **3.** Se consideră patrulaterul convex $ABCD$. Știind că $\mathcal{P}_{ABCD} = 22$ cm, $\mathcal{P}_{ABC} = 19$ cm și $\mathcal{P}_{ADC} = 21$ cm, aflați AC .

Lecția 8. Trapezul. Trapezul isoscel



Citesc și rețin

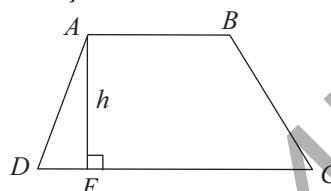
Definiție: Patrulaterul care are două laturi paralele și celelalte două laturi neparalele se numește **trapez**.

Laturile paralele ale unui trapez se numesc **bazele** trapezului.

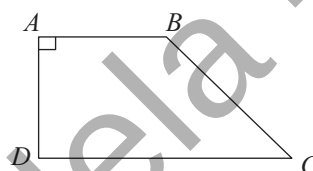
Definiție: Trapezul care are un unghi drept se numește **trapez dreptunghic**.

Definiție: Trapezul care are laturile neparalele congruente se numește **trapez isoscel**.

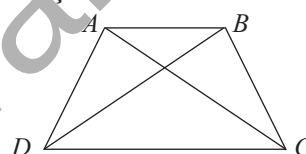
Construcție:



Construcție:



Construcție:



Definiție: Segmentul determinat de punctele de intersecție dintre bazele trapezului și o perpendiculară comună a acestora se numește **înălțimea** trapezului. Lungimea înălțimii se notează cu h .

Proprietăți (trapezul isoscel):

Teorema 1: Într-un trapez isoscel, unghiurile alăturate bazei mari și unghiurile alăturate bazei mici sunt, respectiv, congruente.

Teorema 2: Dacă unghiurile alăturate unei baze a unui trapez sunt congruente, atunci trapezul este isoscel.

Teorema 3: Diagonalele trapezului isoscel sunt congruente.

Teorema 4: Dacă un trapez are diagonalele congruente, atunci trapezul este isoscel.

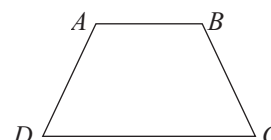


Cum se aplică?

1. Aflați măsurile unghiurilor trapezului isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, dacă $\angle A = 3\angle D$.

Soluție:

Deoarece $AB \parallel CD$, rezultă că $\angle A + \angle D = 180^\circ$ (interne de aceeași parte a secantei AD), deci $3\angle D + \angle D = 180^\circ$, de unde rezultă că $\angle D = 45^\circ$, $\angle A = 135^\circ$. Aplicăm teorema 1: $\angle A \equiv \angle B$ și $\angle C \equiv \angle D$, prin urmare $\angle B = 135^\circ$ și $\angle C = 45^\circ$.

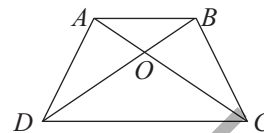


2. Notăm cu O punctul de intersecție a diagonalelor trapezului isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$. Arătați că:

- a) $AO \equiv BO$; b) $CO \equiv DO$.

Soluție:

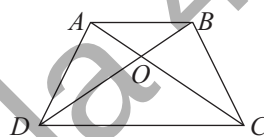
a) Deoarece $ABCD$ este trapez isoscel avem $AD \equiv BC$ și $AC \equiv BD$, deci $\triangle ABD \equiv \triangle BAC$, de unde rezultă că $\angle ABO \equiv \angle BAO$, prin urmare $AO \equiv BO$; b) $OC = AC - AO$ și $OD = BD - BO$, de unde rezultă că $CO \equiv DO$.



3. În trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, notăm cu O punctul de intersecție a diagonalelor. Dacă $\mathcal{P}_{ABC} = 25$ cm și $\mathcal{P}_{ADO} = 19$ cm, aflați AB .

Soluție:

$\mathcal{P}_{ABC} = 25$ cm, deci $AB + BC + CA = 25$ cm sau $AB + BD + DA = 25$ cm (1); $\mathcal{P}_{ADO} = 19$ cm, deci $AO + OD + DA = 19$ cm, dar în problema precedentă am arătat că $AO \equiv BO$, deci $BD + DA = 19$ cm și înlocuind în (1) obținem $AB = 6$ cm.

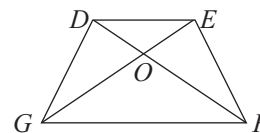


Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

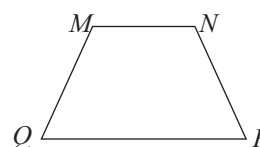
1. În figura alăturată este reprezentat trapezul isoscel $DEFG$ cu $DE \parallel FG$, în care am notat cu O punctul de intersecție a diagonalelor. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

- | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| a) $DE \parallel GF$; | ☐ | b) $DG \parallel EF$; | ☐ |
| c) $DE \equiv GF$; | ☐ | d) $DG \equiv EF$; | ☐ |
| e) $\angle DGF \equiv \angle EFG$; | ☐ | f) $\angle EDG \equiv \angle DEF$; | ☐ |
| g) $DF \equiv EG$; | ☐ | h) $DO \equiv FO$. | ☐ |



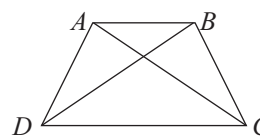
2. În figura alăturată este reprezentat trapezul isoscel $MNPQ$ cu $MN \parallel PQ$. Completați spațiile punctate cu răspunsul corect. Dacă:

- a) $MQ = 3,5$ cm, atunci $NP = \dots\dots\dots$;
b) $NP = 4,7$ cm, atunci $MQ = \dots\dots\dots$.



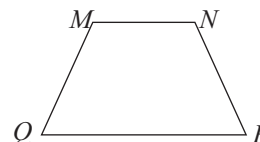
3. În figura alăturată este reprezentat trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$. Completați spațiile punctate cu răspunsul corect. Dacă:

- a) $AC = 6,5$ cm, atunci $BD = \dots\dots\dots$;
b) $BD = 3,8$ cm, atunci $AC = \dots\dots\dots$.



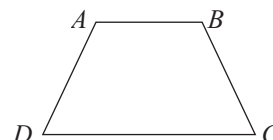
4. În figura alăturată este reprezentat trapezul isoscel $MNPQ$ cu $MN \parallel PQ$. Completați spațiile punctate cu răspunsul corect. Dacă:

- a) $\angle M = 127^\circ$, atunci $\angle N = \dots\dots\dots$;
b) $\angle P = 68^\circ$, atunci $\angle Q = \dots\dots\dots$.

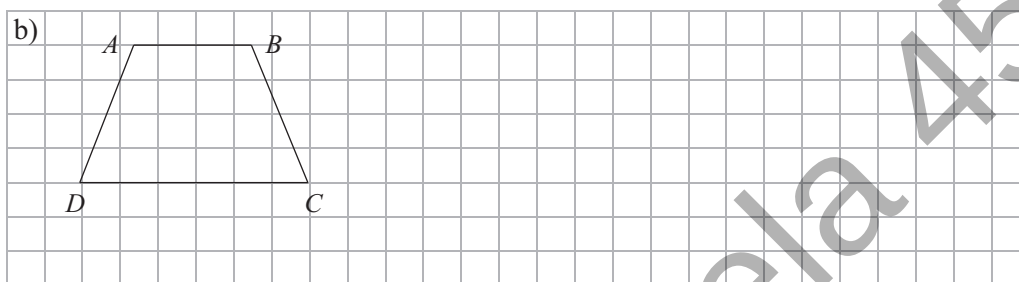


5. Pentru trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ reprezentat în figura alăturată completați următorul tabel:

	$\sphericalangle A$	$\sphericalangle B$	$\sphericalangle C$	$\sphericalangle D$
a)	110°			
b)				60°

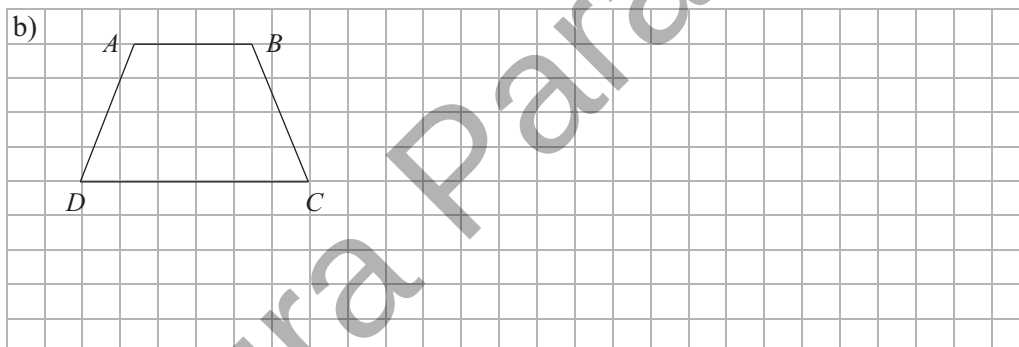


6. Fie $ABCD$ un trapez isoscel cu $AB \parallel CD$. Aflați perimetrul trapezului $ABCD$, dacă:
a) $AB = 5$ cm, $BC = 8$ cm și $CD = 10$ cm; b) $AB = 7$ cm, $AD = 6$ cm și $CD = 11$ cm.



7. Fie $ABCD$ un trapez isoscel cu $AB \parallel CD$, $AB = 4$ cm și $CD = 6$ cm. Aflați AD , dacă perimetrul trapezului este egal cu:

- a) 20 cm; b) 24 cm; c) 30 cm.



Exerciții și probleme de dificultate medie

8. Determinați măsurile unghiurilor trapezului isoscel $DEFG$ în următoarele cazuri:

- a) $\sphericalangle D = 113^\circ 5'$; b) $\sphericalangle G = 68^\circ 36'$; c) $\sphericalangle E = 119^\circ 4'$.

9. Aflați măsurile unghiurilor trapezului isoscel $MNPQ$ cu $MN \parallel PQ$, dacă:

- a) $\sphericalangle M = 4\sphericalangle Q$; b) $\sphericalangle N = 5\sphericalangle P$; c) $\sphericalangle P = 3\sphericalangle N$.

10. Determinați măsurile unghiurilor trapezului isoscel $DEFG$, cu $DE \parallel GF$, știind că:

- a) $\sphericalangle G = \frac{4}{5} \sphericalangle D$; b) $\sphericalangle F = \frac{5}{7} \sphericalangle D$.

11. Fie O punctul de intersecție a diagonalelor trapezului isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$.

- a) Dacă $AC = 15$ cm și $AD = 10$ cm, aflați $\mathcal{P}_{AOD}$.
b) Dacă $BC = 17$ cm și $\mathcal{P}_{BOC} = 40$ cm, aflați BD .

24. În trapezul isoscel $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, notăm cu M mijlocul laturii BC . Dacă $AB = a$, $BC = 2a$ și $CD = 3a$, arătați că $DB \equiv DM$.

25. Se consideră trapezul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $AB < CD$ și $\angle A = 90^\circ$. Arătați că $AB + AC < DC + DB$.

(I. Tudor, *Gazeta Matematică* nr. 2/2016)



Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

- (3p) **1.** Se consideră trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$. Știind că $P_{ABCD} = 23$ cm, $AB = 5$ cm, $CD = 8$ cm și $\angle A = 125^\circ$, aflați:
a) BC ; b) $\angle B$; c) $\angle C$.
- (3p) **2.** În trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, diagonalele sunt perpendiculare pe laturile neoparalele. Știind că $AD = 7$ cm și $\angle B = 2\angle D$, calculați perimetrul trapezului $ABCD$.
- (3p) **3.** În triunghiul ABC cu $AB \neq AC$, construim înălțimea AD , $D \in BC$ și notăm cu M , N și P mijloacele laturilor AB , BC , respectiv CA . Arătați că patrulaterul cu vârfurile în punctele M , D , N și P este trapez isoscel.

Lecția 9. Linia mijlocie în trapez



Citesc și rețin

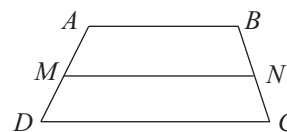
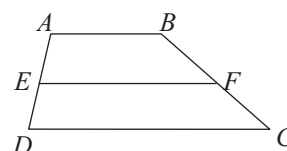
Definiție: Segmentul determinat de mijloacele laturilor neoparalele ale unui trapez se numește linia mijlocie a trapezului.

Teorema liniei mijlocii a trapezului: Linia mijlocie a trapezului este paralelă cu bazele acestuia și are lungimea egală cu media aritmetică a lungimilor acestora.

$$\left. \begin{array}{l} AM \equiv MD \\ BN \equiv NC \end{array} \right\} \Rightarrow AB \parallel MN \parallel DC, MN = \frac{AB + CD}{2}.$$

Reciproca teoremei liniei mijlocii a trapezului: Paralela construită prin mijlocul unei laturi neoparalele a unui trapez la bazele acestuia trece prin mijlocul celeilalte laturi neoparalele a trapezului.

$$AM \equiv MD, MN \parallel AB \Rightarrow BN \equiv NC.$$

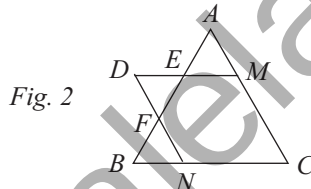
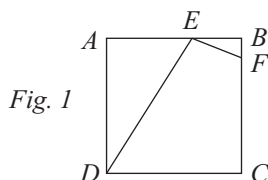


Probleme din realitatea cotidiană

1. O curte în formă de pătrat, cu aria de 3600 m^2 , urmează să fie împrejmuită cu un gard susținut de stâlpi metalici amplasați la distanța de 2,5 m unul față de celălalt. Aflați numărul stâlpilor necesari pentru construcția gardului.

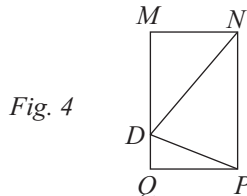
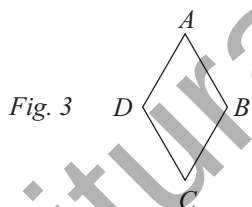
2. În figura 1, pătratul $ABCD$ reprezintă schematic o placă de gresie care s-a spart în trei bucăți reprezentate de triunghiurile DAE și EBF și de patrulaterul $DEFC$. Știind că $\mathcal{P}_{ABCD} = 20 \text{ dm}$, $BE = 2 \text{ dm}$ și $BF = 1 \text{ dm}$, calculați $\mathcal{A}_{DEFC}$.

3. În figura 2, este reprezentat schematic un mozaic. Triunghiurile ABC și DEF sunt echilaterale, $AE \equiv EF \equiv FB$, $DE \cap AC = \{M\}$ și $DF \cap BC = \{N\}$. Știind că $\mathcal{P}_{ABC} = 18 \text{ dm}$, calculați perimetrul patrulaterului $DMCN$.



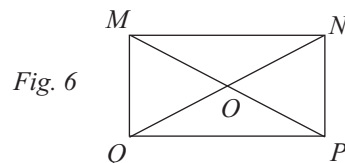
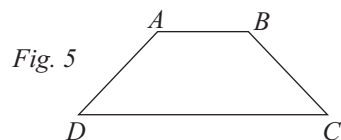
4. În figura 3, rombul $ABCD$ reprezintă schematic un rond de flori. Știind că $\angle A = 60^\circ$ și $BD = 4 \text{ m}$, calculați perimetrul rondului de flori.

5. În figura 4, dreptunghiul $MNPQ$ reprezintă schematic un perete. Suprafețele triunghiulare MND și PQD se vopsesc cu vopsea violet, iar suprafața triunghiulară NDP se vopsește cu vopsea albă. Știind că 1 kg de vopsea de orice culoare acoperă aceeași suprafață, comparați cantitățile de vopsea albă, respectiv violet necesare acestei lucrări.



6. În figura 5, trapezul isoscel $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, reprezintă schematic o parte a unui acoperiș. Știind că $AB = 7 \text{ m}$, $CD = 15 \text{ m}$ și $\angle A = 3\angle D$, calculați aria acoperișului reprezentat de trapezul $ABCD$.

7. În figura 6, dreptunghiul $MNPQ$ reprezintă schematic un panou publicitar; $MP \cap NQ = \{O\}$. Știind că $\mathcal{P}_{MON} = 9 \text{ m}$, $\mathcal{P}_{NOP} = 8 \text{ m}$ și $\mathcal{P}_{MQP} = 12 \text{ m}$, calculați aria panoului publicitar.



CAPITOLUL II

Cercul

Lecția 12. Unghi înscris în cerc



Citesc și rețin

Definiție: Numim **cerc** de centru O și rază R , notat $\mathcal{C}(O, R)$, mulțimea punctelor din plan situate la distanța R față de punctul O .

Definiție: **Măsura** unui cerc este egală cu 360° .

Definiție: Un unghi care are vârful în centrul unui cerc se numește **unghi la centru**. (În figura alăturată, unghiul $\angle AOB$ este unghi la centru pentru cercul respectiv.)

Definiții:

1. Mulțimea punctelor de pe un cerc situate în interiorul unghiului $\angle AOB$ se numește **arc mic** AB , notat $\widehat{AB}$.

2. Mulțimea punctelor de pe cerc situate în exteriorul unghiului $\angle AOB$

se numește **arc mare** AB , notat $\widehat{AMB}$, unde M este un punct de pe cerc situat în exteriorul unghiului $\angle AOB$ (pentru ambele arce, punctele A și B se numesc **capete** sau **extremități**).

Observație: Măsura arcului de cerc de extremități X și Y se notează $\widehat{XY}$.

Definiții:

1. Dacă $\widehat{AB}$ este un arc mic, atunci $\widehat{AB} = \angle AOB$.

2. Dacă $\widehat{AMB}$ este un arc mare, atunci $\widehat{AMB} = 360^\circ - \angle AOB$.

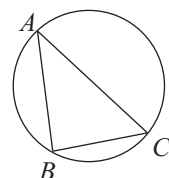
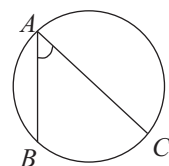
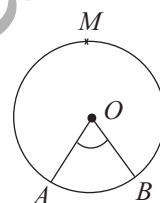
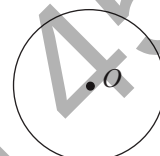
Definiție: Două arce $\widehat{AB}$ și $\widehat{CD}$ ale aceluiași cerc (sau din cercuri congruente) se numesc **congruente**, dacă $\widehat{AB} = \widehat{CD}$; se notează $\widehat{AB} \equiv \widehat{CD}$.

Definiție: Un unghi cu vârful pe cerc și ale cărui laturi sunt două coarde ale cercului se numește **unghi înscris în cerc**.

Teoremă: Măsura unui unghi înscris în cerc este egală cu jumătate din măsura arcului de cerc cuprins între laturile sale:

$$\angle BAC = \frac{\widehat{BC}}{2}.$$

Definiție: Un triunghi se numește **înscris într-un cerc** dacă vârfurile sale aparțin cercului respectiv. În acest caz, spunem că cercul este **circumscriș triunghiului**, centrul său fiind punctul de concurență a mediatoarelor laturilor triunghiului.





Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Încercuți litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

Măsura cercului este egală cu:

- A. 100° ; B. 180° ; C. 360° ; D. 400° .

2. În figura alăturată este reprezentat cercul $\mathcal{C}(O)$ și unghiul la centru $\angle MON$. Completați spațiile punctate cu răspunsul corect:

a) Dacă $\angle MON = 54^\circ$, atunci $\widehat{MN} = \dots\dots\dots$.

b) Dacă $\widehat{MN} = 48^\circ$, atunci $\angle MON = \dots\dots\dots$.



3. Pe un cerc se consideră punctele E și F , iar pe arcul mare de extremități E și F se consideră punctul D . Aflați $\widehat{EF}$ și $\angle EDF$, dacă:

a) $\angle EDF = 5 \widehat{EF}$;

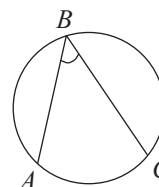
b) $\angle EDF = 4 \widehat{EF}$.



4. În figura alăturată este reprezentat un cerc și unghiul $\angle ABC$ înscris în cercul respectiv. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $\angle ABC = \frac{\widehat{AC}}{3}$; ☐

b) $\angle ABC = \frac{\widehat{AC}}{2}$. ☐

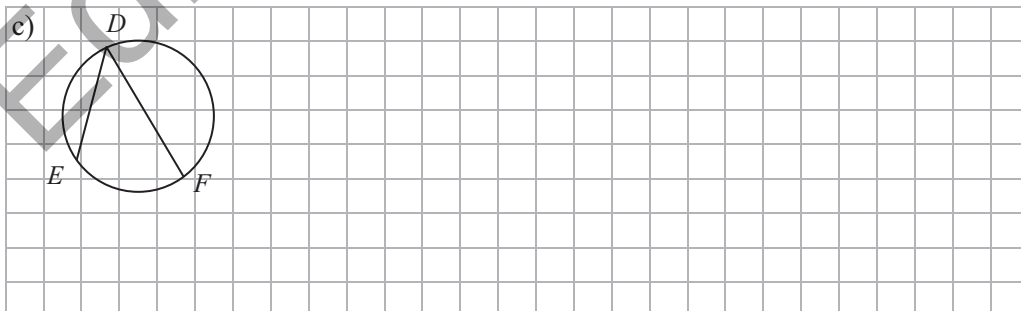


5. Pe un cerc se consideră punctele E și F , iar punctul D este situat pe arcul mare de extremități E și F . Aflați $\angle EDF$, dacă:

a) $\widehat{EF} = 40^\circ$;

b) $\widehat{EF} = 74^\circ$;

c) $\widehat{EF} = 96^\circ$.



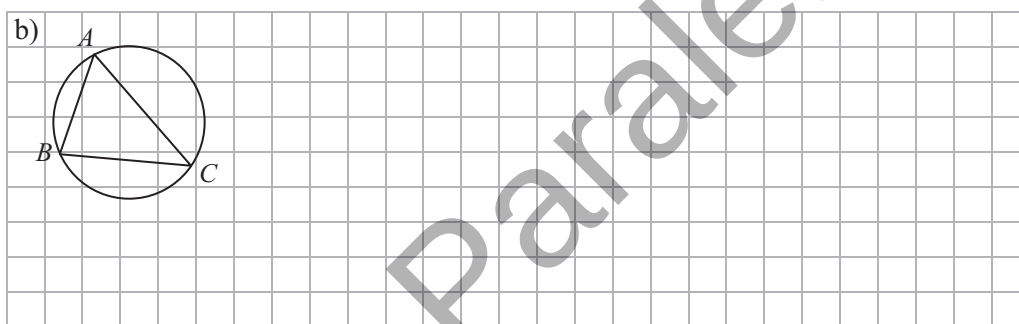
6. Pe un cerc se consideră punctele E și F , iar punctul D este situat pe arcul mare de extremități E și F . Aflați măsura arcului $\widehat{EF}$, dacă:

- a) $\angle EDF = 15^\circ$; b) $\angle EDF = 26^\circ$; c) $\angle EDF = 45^\circ$.



7. Pe un cerc se consideră punctele A , B și C . Aflați măsurile unghiurilor triunghiului ABC , dacă:

- a) $\widehat{AB} = 72^\circ$ și $\widehat{BC} = 154^\circ$; b) $\widehat{BC} = 61^\circ$ și $\widehat{CA} = 170^\circ$.



Exerciții și probleme de dificultate medie

8. Pe un cerc se consideră punctele A , B și C . Aflați măsurile arcelor $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ și $\widehat{CA}$, dacă:

- a) $\angle A = 40^\circ$ și $\angle B = 55^\circ$; b) $\angle B = 61^\circ$ și $\angle C = 73^\circ$.

9. În cercul $\mathcal{C}(O)$ construiți diametrul MN . Dacă punctul $P \in \mathcal{C}(O)$, aflați măsura unghiului $\angle MPN$.

10. Fie $\angle EDF$ un unghi înscris în cercul $\mathcal{C}(O, 7\sqrt{5} \text{ cm})$. Dacă $\angle EDF = 90^\circ$, aflați EF .

11. Pe un cerc se consideră punctele A , B și C . Aflați măsurile unghiurilor triunghiului ABC , dacă măsurile arcelor $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ și $\widehat{CA}$ sunt direct proporționale cu numerele:

- a) 5, 6 și 7; b) 5, 7 și 8.

12. Pe un cerc se consideră punctele A , B și C . Aflați măsurile arcelor $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ și $\widehat{CA}$, știind că măsurile unghiurilor $\angle A$, $\angle B$ și $\angle C$ sunt direct proporționale cu numerele:

- a) 12, 16 și 17; b) 17, 20 și 23.

26. Dacă ABC este un triunghi echilateral înscris în cercul $\mathcal{C}(O)$ și punctul $D \in \widehat{BC}$, arătați că $AD = BD + CD$.

27. Dacă ABC este un triunghi echilateral înscris în cercul $\mathcal{C}(O)$ și punctul $D \in \widehat{BC}$, astfel încât $\widehat{DB} < \widehat{DC}$, arătați că $d(O, BD) = d(O, CD) + d(O, AD)$.

Exerciții și probleme de dificultate avansată

28. Cercul circumscris triunghiului ABC intersectează bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle BAC$ și $\sphericalangle ABC$ în punctele D , respectiv E . Dacă $AD \cap BE = \{I\}$, $DE \cap BC = \{P\}$ și $DE \cap AC = \{M\}$, arătați că patrulaterul:

a) $AIME$ este inscriptibil; b) $BIPD$ este inscriptibil; c) $IMCP$ este romb.

29. Pe cercul $\mathcal{C}(O)$ se consideră punctele A, B, C și D în această ordine, astfel încât $AB \equiv CD$. Notăm cu M, N, P și Q picioarele perpendicularelor construite din punctele A, B, C , respectiv D , pe o dreaptă d care trece prin punctul O , iar cu E și F notăm mijloacele coardelor AB , respectiv CD . Dacă $EM \cap FQ = \{G\}$ și $EN \cap FP = \{H\}$, arătați că patrulaterul $EGFH$ este paralelogram.

30. Punctul C este interior segmentului AB . De aceeași parte a dreptei AB , construiți pătratele $ACDE$ și $CBPM$. Dacă $AM \cap BD = \{T\}$, arătați că punctele E, T și P sunt coliniare.

(I. Tudor, *Gazeta Matematică* nr. 3/2007)



Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Pe un cerc se consideră punctele M și N , iar pe arcul mare de extremități M și N se consideră punctul P . Știind că:

a) $\widehat{MN} = 54^\circ$, aflați $\sphericalangle MPN$; b) $\sphericalangle MPN = 35^\circ$, aflați $\widehat{MN}$.

(3p) **2.** Pe un cerc se consideră punctele A, B și C . Aflați măsurile arcelor $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ și $\widehat{CA}$, știind că măsurile unghiurilor $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$ și $\sphericalangle C$ sunt invers proporționale cu numerele 2, 3 și 6.

(3p) **3.** În triunghiul ABC , bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle B$ și $\sphericalangle C$ intersectează laturile AC și AB în punctele E , respectiv F . Știind că $\sphericalangle AEF = 50^\circ$ și $\sphericalangle AFE = 70^\circ$, determinați măsurile unghiurilor triunghiului ABC .

Modele de teste pentru evaluarea cunoștințelor

Testul 1

Capitolele: Mulțimea numerelor reale, Patrulaterul și Cercul
Se acordă 10 puncte din oficiu.

Subiectul I. Încercuiți litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

- (7p) 1. Numărul $\sqrt{0,01}$ aparține mulțimii:
A. $\mathbb{N}$; B. $\mathbb{Z}$; C. $\mathbb{Q}$; D. $\mathbb{I}$.
- (7p) 2. Media aritmetică a numerelor $\sqrt{20}$ și $2\sqrt{45}$ este egală cu:
A. $3\sqrt{6}$; B. $2\sqrt{3}$; C. $6\sqrt{2}$; D. $4\sqrt{5}$.
- (7p) 3. Comparând numerele reale $a = 5\sqrt{3}$ și $b = 6\sqrt{2}$ obținem:
A. $a \geq b$; B. $a > b$; C. $a < b$; D. $a \leq b$.
- (7p) 4. Rezultatul calculului $3\sqrt{10} \cdot \sqrt{8}$ este egal cu:
A. $12\sqrt{5}$; B. $6\sqrt{3}$; C. $9\sqrt{2}$; D. $10\sqrt{2}$.
- (7p) 5. Perimetrul paralelogramului cu $L = 15$ cm și $l = 8$ cm este egal cu:
A. 52 cm; B. 28 cm; C. 46 cm; D. 30 cm.
- (7p) 6. Dacă $ABCD$ este un trapez isoscel cu $AB \parallel CD$ și $\angle A = 108^\circ$, atunci măsura unghiului C este egală cu:
A. 65° ; B. 72° ; C. 54° ; D. 90° .

Subiectul al II-lea. La următoarele probleme se cer rezolvările complete.

- (8p) 1. Scrieți sub forma cea mai simplă opusul numărului real:
$$x = \left| (-\sqrt{2})^3 + (-\sqrt{2})^5 \right| : (-2\sqrt{6}).$$
- (8p) 2. Rotunjiți la prima zecimală numărul real $a = \left(\sqrt{0,5 \cdot 1,3(8)} - \frac{7}{30} \right) : \sqrt{1,3}$.
- (8p) 3. Media aritmetică ponderată a numerelor reale $3\sqrt{5}$ și $8\sqrt{5}$ cu ponderile 2, respectiv n este egală cu $6\sqrt{5}$. Determinați numărul natural n .
- (8p) 4. Pe un cerc se consideră punctele D , E și F în această ordine, astfel încât $\widehat{EDF} = 7\widehat{EF}$. Aflați măsura unghiului $\angle EDF$.
5. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $AB = 7$ cm, $CD = 21$ cm și $\angle A = 2\angle D$.
- (8p) a) Aflați măsurile unghiurilor $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ și $\angle D$.
- (8p) b) Calculați perimetrul trapezului $ABCD$.

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

TESTE DE EVALUARE ÎNȚIALĂ

Testul 1

Partea I:

Nr. item	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Rezultate	B	C	A	D	D	B	B	C	D

Partea a II-a: 1. $BC + AC > AB$, deci $BC = 10$ cm. 2. a) $x = \frac{11}{10} - \left(\frac{4}{3} \cdot 7 - \frac{3}{4} \cdot 1 \right) : \frac{5}{6} = \frac{11}{10} - \frac{25}{12} \cdot \frac{6}{5} = \frac{11}{10} - \frac{25}{10} = -\frac{14}{10} = -\frac{7}{5}$; b) $x = \frac{4}{15} = 0,2(6) = 0,266...$, deci rotunzind la a doua zecimală numărul rațional pozitiv x obținem 0,27. 3. a) $BC = 17$ cm; b) $\angle AED = 60^\circ$; c) $\triangle ADE$ este echilateral cu latura de 10 cm, prin urmare $\mathcal{P}_{ADE} = 30$ cm.

Testul 2

Partea I:

Nr. item	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Rezultate	C	D	A	B	A	D	C	B	A

Partea a II-a: 1. $x = \frac{21}{40}$. 2. a) $a = 9$ și $b = 12$; b) $\frac{b}{a} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} = 1,3(3)$. 3. a) $\angle NFD = \angle EDF = 60^\circ$, deci $NF \parallel DE$; b) $NF \equiv MD$; $\angle F \equiv \angle D$ și $FD \equiv DE$, deci $\triangle NFD \equiv \triangle MDE$; c) $\triangle NFD \equiv \triangle MDE$, deci $\angle DNF = \angle EMD = 90^\circ$, deci $DN \perp FN$, dar $FN \parallel DE$, prin urmare $ND \perp DE$.

Testul 3

Partea I:

Nr. item	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Rezultate	D	D	C	A	C	A	B	C	C

Partea a II-a: 1. $x \in \{0, 1, 2\}$. 2. a) $x < y$; b) $y : (x^2 - y) = \frac{17}{9} : \left(\frac{121}{36} - \frac{17}{9} \right) = \frac{17}{9} : \frac{53}{36} = \frac{68}{53}$. 3. a) $\angle BAD = \angle ABD = 45^\circ$, deci $AD \equiv BD$; b) $\angle ACE = 45^\circ$ și $\angle CDH = 90^\circ$, deci $\angle DHC = 45^\circ$; c) $AD \equiv BD$, $\angle ADH \equiv \angle BDC$ și $DH \equiv DC$, deci $\triangle ADH \equiv \triangle BDC$, așadar $AH \equiv BC$.

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I. MULȚIMEA NUMERELOR REALE

Lecția 1. Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural. Estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional

1. a) $16 = 4^2$; b) $36 = 6^2$; c) $49 = 7^2$; d) $64 = 8^2$; e) $81 = 9^2$; f) $100 = 10^2$; g) $144 = 12^2$; h) $196 = 14^2$; i) $324 = 18^2$; j) $400 = 20^2$. 2. a) Rădăcina pătrată a numărului natural 25 este 5 sau radical din 25 este egal cu 5. 3. a) A; b) A; c) A; d) A; e) F; f) A. 4. a) $\sqrt{16} = 4$; b) $\sqrt{25} = 5$; c) $\sqrt{36} = 6$; d) $\sqrt{49} = 7$; e) $\sqrt{64} = 8$; f) $\sqrt{100} = 10$; g) $\sqrt{121} = 11$; h) $\sqrt{144} = 12$; i) $\sqrt{225} = 15$; j) $\sqrt{256} = 16$. 5. a) $\sqrt{(-11)^2} = 11$; b) $\sqrt{(-23)^2} = 23$; c) $\sqrt{(-59)^2} = 59$; d) $\sqrt{(-77)^2} = 77$. 6. a) $A = \{-7, 7\}$; b) $B = \{-8, 8\}$; c) $C = \{-29, 29\}$; d) $D = \{-67, 67\}$. 7. a) 9; b) 1; c) 15; d) 13; e) 3; f) -4. 8. a) 90; b) -1; c) -2; d) -7. 9. a) A; b) A; c) A; d) A. 10. a) $\frac{6}{5}$; b) $\frac{4}{7}$; c) $\frac{8}{9}$; d) $\frac{5}{7}$; e) $\frac{9}{10}$; f) $\frac{7}{12}$; g) $\frac{15}{8}$; h) $\frac{14}{5}$. 11. a) $\frac{3}{2}$; b) $\frac{3}{4}$; c) $\frac{3}{2}$; d) $\frac{5}{6}$; e) $\frac{4}{7}$; f) $\frac{5}{9}$. 12. a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{4}{5}$; c) $\frac{3}{5}$; d) $\frac{3}{2}$;

e) $\frac{4}{5}$; f) $\frac{2}{5}$; g) $\frac{11}{6}$; h) $\frac{5}{2}$. **13.** a) $n = 5$; b) $n = 7$; c) $n = 3$; d) $n = 5$. **14.** a) $\sqrt{n} = 4$; b) $\sqrt{n} = 6$; c) $\sqrt{n} = 8$; d) $\sqrt{n} = 9$. **15.** a) $\sqrt{n} = 2$; b) $\sqrt{n} = 3$; c) $\sqrt{n} = 2$; d) $\sqrt{n} = 6$. **16.** a) $A = \{2, 3\}$; b) $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$; c) $C = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$; d) $D = \{16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25\}$. **17.** i) a) $5 < \sqrt{35} < 6$; b) $7 < \sqrt{51} < 8$; c) $8 < \sqrt{73} < 9$; d) $9 < \sqrt{94} < 10$; ii) a) $5 < \sqrt{27,5} < 6$; b) $6 < \sqrt{43,2} < 7$; c) $7 < \sqrt{61,7} < 8$; d) $8 < \sqrt{79,8} < 9$. **18.** a) $\frac{11}{28}$; b) $\frac{1}{30}$; c) $\frac{5}{12}$; d) $\frac{11}{24}$; e) $\frac{3}{2}$; f) $\frac{5}{4}$. **19.** a) $\frac{3}{19}$; b) $\frac{3}{41}$; c) $-\frac{23}{2}$; d) $\frac{27}{4}$. **20.** a) $x = \frac{4}{3}$; b) $x = \frac{1}{4}$; c) $x = \frac{1}{2}$. **21.** a) $n = 5$; b) $n = 7$. **22.** a) $2\frac{1}{3}$; b) $-\frac{5}{9}$. **23.** a) $\sqrt{\frac{12 \cdot n}{245}} = \frac{6}{7} \in \mathbb{Q}$ pentru $n = 15$; b) $\sqrt{\frac{968}{n \cdot 75}} = \frac{22}{15} \in \mathbb{Q}$ pentru $n = 6$; c) $\sqrt{\frac{27 \cdot n}{448}} = \frac{9}{8} \in \mathbb{Q}$ pentru $n = 21$. **24.** Dacă înlocuim pe 7 cu 1, $\sqrt{p} = 5 \cdot 9 \cdot 16$; dacă înlocuim pe 1 cu 7, $\sqrt{p} = 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 16$; dacă înlocuim pe 7 cu 4, $\sqrt{p} = 5 \cdot 9 \cdot 32$; dacă înlocuim pe 7 cu 9, $\sqrt{p} = 5 \cdot 16 \cdot 27$. **25.** $\sqrt{73100} \leq \sqrt{73abc} \leq \sqrt{73899}$, de unde rezultă că $270,37 < \sqrt{73abc} < 271,85$, deci $\overline{73abc} = 271^2 = 73441$, așadar $\overline{abc} = 441$; $\sqrt{\overline{abc} - \sqrt{a+b+c} \cdot \sqrt{a \cdot b \cdot c}} = 3 \in \mathbb{N}$. **Test de evaluare stadială:** **1.** a) 6; b) -84; c) 1. **2.** $E = \{26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35\}$; card $E = 10$. **3.** $a = \frac{7}{16}$; rotunjind la prima zecimală numărul a , obținem 0,4.

Lecția 2. Scoaterea factorilor de sub radical. Introducerea factorilor sub radical

1. a) A; b) A; c) F. **2.** a) $2\sqrt{3}$; b) $3\sqrt{2}$; c) $2\sqrt{6}$; d) $2\sqrt{7}$; e) $4\sqrt{3}$; f) $5\sqrt{2}$. **3.** a) $3\sqrt{6}$; b) $2\sqrt{15}$; c) $3\sqrt{7}$; d) $6\sqrt{2}$; e) $5\sqrt{3}$; f) $4\sqrt{5}$; g) $4\sqrt{6}$; h) $7\sqrt{2}$. **4.** a) A; b) F; c) A. **5.** a) $\sqrt{12}$; b) $\sqrt{18}$; c) $\sqrt{20}$; d) $\sqrt{72}$; e) $\sqrt{80}$; f) $\sqrt{75}$. **6.** a) $\sqrt{200}$; b) $\sqrt{300}$; c) $\sqrt{500}$; d) $\sqrt{700}$. **7.** a) $\sqrt{108}$; b) $\sqrt{125}$; c) $\sqrt{162}$; d) $\sqrt{112}$; e) $\sqrt{150}$; f) $\sqrt{147}$; g) $\sqrt{180}$; h) $\sqrt{175}$. **8.** a) $-\sqrt{48}$; b) $-\sqrt{50}$; c) $-\sqrt{28}$; d) $-\sqrt{45}$; e) $-\sqrt{245}$; f) $-\sqrt{486}$; g) $-\sqrt{200}$; h) $-\sqrt{252}$. **9.** a) $6\sqrt{3}$; b) $4\sqrt{7}$; c) $5\sqrt{5}$; d) $8\sqrt{2}$; e) $5\sqrt{6}$; f) $5\sqrt{7}$; g) $6\sqrt{5}$; h) $8\sqrt{3}$. **10.** a) $7\sqrt{5}$; b) $10\sqrt{3}$; c) $8\sqrt{5}$; d) $12\sqrt{5}$; e) $14\sqrt{3}$; f) $15\sqrt{3}$; g) $18\sqrt{2}$. **11.** a) $a = 2$; b) $a = 3$; c) $a = 3$; d) $a = 7$; e) $a = 9$; f) $a = 13$. **12.** a) $n = 48$; b) $n = 150$; c) $n = 98$; d) $n = 360$; e) $n = 135$; f) $n = 68$. **13.** a) $x < y$; b) $x > y$; c) $x > y$; d) $x < y$. **14.** a) $x > y$; b) $x < y$; c) $x > y$; d) $x > y$. **15.** a) $\overline{abcd} = 1216$, deci $\sqrt{\overline{abc}} - \sqrt{\overline{cd}} = 7$; b) $\overline{abcd} = 2556$, deci $\sqrt{\overline{ab}} + \sqrt{\overline{cd}} = 21$. **16.** a) $n = 10$; b) $n = 24$; c) $n = 14$; d) $n = 6$; e) $n = 18$; f) $n = 15$. **17.** a) $2^{12}\sqrt{3}$; b) $3^{15}\sqrt{2}$; c) $5^{10}\sqrt{6}$; d) $7^{21}\sqrt{6}$; e) $3^{12} \cdot 2\sqrt{2}$; f) $5^9 \cdot 2\sqrt{6}$; g) $7^7 \cdot 5\sqrt{2}$; h) $2^{13} \cdot 3\sqrt{7}$. **18.** a) $14\sqrt{6}$; b) $12\sqrt{14}$; c) $18\sqrt{10}$. **19.** a) $A = \{18, 32, 50, 72, 98\}$, card $A = 5$; b) $B = \{12, 27, 48, 75\}$, card $B = 4$. **20.** $4(\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}) = (a + b + c)^2 \cdot 2$ sau $4 \cdot 11(a + b + c) = (a + b + c)^2 \cdot 2$, de unde rezultă că $a + b + c = 22$ și analizând obținem $\overline{abc} \in \{976, 985\}$. **Test de evaluare stadială:** **1.** i) a) $4\sqrt{2}$; b) $6\sqrt{5}$; c) $-4\sqrt{7}$; ii) a) $\sqrt{50}$; b) $-\sqrt{80}$; c) $\sqrt{600}$. **2.** $n = 10$. **3.** $\overline{ab} \in \{54, 63, 72, 81\}$.

Lecția 3. Numere iraționale. Mulțimea numerelor reale

1. infinită și neperiodică. **2.** a) A; b) A; c) A; d) F; e) A. **3.** a) F; b) F; c) F; d) A; e) A. **4.** a) A; b) A; c) A; d) F; e) A. **5.** a) F; b) F; c) F; d) A; e) A. **6.** a) F; b) F; c) A; d) F; e) A. **7.** a) F; b) F; c) A; d) F; e) A. **8.** a) Da; b) Da; c) Nu; d) Da; e) Da; f) Da; g) Da; h) Nu. **9.** a) $A = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19\}$; b) $B = \{21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30\}$. **10.** a) A; b) A; c) A; d) A. **11.** a) $A =$

$\in \{-804, 804\}$. **Test de evaluare stadială:** 1. a) $x \in \{-9, 9\}$; b) $x \in \{-2\sqrt{6}, 2\sqrt{6}\}$; c) $x \in \left\{-\frac{5\sqrt{2}}{6}, \frac{5\sqrt{2}}{6}\right\}$. 2. $x \in \{-3, 13\}$. 3. $x \in \{-5 \cdot 2^{13}, 5 \cdot 2^{13}\}$.

Teste de evaluare sumativă

Testul 1. 5. $x = \frac{\sqrt{6}}{6}$, $y = \sqrt{6}$; $m_g = 1 \in \mathbb{N}$. 6. $n = 4$. **Testul 2.** 5. $y = 4\sqrt{5} - 3$. 6. $m_{ap} = 0,6$.

Testul 3. 5. $m_{ap} = \frac{5}{13}$. 6. $y = 4\sqrt{6}$.

Fișă pentru portofoliul elevului

I. 1. F. 2. A. 3. A. II. 1. $2\sqrt{2}$. 2. $\emptyset$. 3. $\frac{1}{3}$. III. 1. A. 2. C. 3. D. IV. $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $m_g = 1 \in \mathbb{N}$.

V. a) $n = 6$; b) $x \in \left\{-\frac{3\sqrt{2}}{4}, \frac{3\sqrt{2}}{4}\right\}$.

Probleme din realitatea cotidiană

1. $\mathcal{P} = 4 \cdot 15\sqrt{2}$ dm $> 4 \cdot 15 \cdot 1,41$ dm $= 84,6$ dm $> 84,5$ dm. 2. $3,5$ m². 3. 5850 kg. 4. 34 cărți. 5. 2,5 lei. 6. 8,75. 7. $2\sqrt{34}$ dm $= \sqrt{136}$ dm $> 3\sqrt{15}$ dm $= \sqrt{135}$ dm. 8. $\mathcal{P} = 10\sqrt{5} \cdot 4$ m $< 40 \cdot 2,237$ m $= 89,48$ m $< 89,5$ m. 9. Luna a doua. 10. $245\sqrt{3}$ km $> 245 \cdot 1,73$ km $= 423,85$ km; $423,85 : 60 = 7,06\dots$, deci automobilul nu poate parcurge distanța respectivă în 7 ore. 11. $\mathcal{A}_d = 30\sqrt{3}$ m²; $\mathcal{A}_r = 30\sqrt{3}$ m², deci $\mathcal{A}_d = \mathcal{A}_r$. 12. 25 ani. 13. 7. 14. Laura, Irina, Ioana, Maria sau Maria, Irina, Ioana, Laura. 15. 94 spectatori. 16. $\mathcal{V}_c = 250\sqrt{2}$ dm³ $> 250 \cdot 1,41$ dm³ $= 352,5$ dm³ $= 352,5$ l. 17. Ștefan, Andrei și Mihai au aceeași vârstă. 18. Dan și Ion au aceeași vârstă. 19. 2 ani sau 3 ani sau 4 ani sau 6 ani. 20. Vali – 4 ani, Ion – 3 ani, Nicu – 5 ani, Dan – 9 ani sau Vali – 2 ani, Ion – 4 ani, Nicu – 5 ani, Dan – 8 ani.

GEOMETRIE

CAPITOLUL I. PATRULATERUL

Lecția 1. Patrulaterul convex

1. $MNPQ$. 3. a) A; b) F; c) F; d) A. 4. a) F; b) F; c) A; d) A. 5. C. 360°. 6. A. 7. a) $\angle D = 110^\circ$; b) $\angle A = 85^\circ$. 8. a) $\mathcal{P}_{MNPQ} = 23$ cm; b) $\mathcal{P}_{MNPQ} = 24$ cm. 9. F. 10. a) $AD = 12$ cm; b) $BC = 8,5$ cm. 11. a) $\angle M = 36^\circ$, $\angle N = 72^\circ$, $\angle P = 108^\circ$, $\angle Q = 144^\circ$; b) $\angle M = 96^\circ$, $\angle N = 24^\circ$, $\angle P = 120^\circ$, $\angle Q = 120^\circ$. 12. Notăm cu x° , $(x + 2)^\circ$, $(x + 4)^\circ$ și $(x + 6)^\circ$ măsurile celor 4 unghiuri; $x^\circ + x^\circ + 2^\circ + x^\circ + 4^\circ + x^\circ + 6^\circ = 360^\circ$ sau $4x^\circ + 12^\circ = 360^\circ$, deci $4x^\circ = 348^\circ$, așadar $x^\circ = 87^\circ$, prin urmare unghiurile au măsurile de 87° , 89° , 91° , 93° . 13. a) $DE = EF = 30$ cm, $FG = 10$ cm, $GD = 20$ cm; b) $EF = FG = 30$ cm, $GD = 7,5$ cm, $DE = 22,5$ cm. 14. a) $\angle A = 51^\circ$, $\angle B = 102^\circ$, $\angle C = 101^\circ$, $\angle D = 106^\circ$; b) $\angle A = 81^\circ$, $\angle B = 138^\circ$, $\angle C = 95^\circ$, $\angle D = 46^\circ$. 15. a) $AB = 19$ cm, $BC = 38$ cm, $CD = 32$ cm și $DA = 11$ cm; b) $AB = 30$ cm, $BC = 45$ cm, $CD = 10$ cm și $DA = 15$ cm. 16. a) $\angle D = 120^\circ$, $\angle E = 72^\circ$, $\angle F = 96^\circ$ și $\angle G = 72^\circ$; b) a) $\angle D = 30^\circ$, $\angle E = 60^\circ$, $\angle F = 120^\circ$ și $\angle G = 150^\circ$. 17. a) $\angle M = 60^\circ$, $\angle N = 70^\circ$, $\angle P = 100^\circ$, $\angle Q = 130^\circ$; b) $\angle M = 64^\circ$, $\angle N = 72^\circ$, $\angle P = 104^\circ$, $\angle Q = 120^\circ$. 18. a) $\angle D = 150^\circ$, $\angle E = 120^\circ$, $\angle F = 75^\circ$, $\angle G = 15^\circ$; b) $\angle D = 144^\circ$, $\angle E = 108^\circ$, $\angle F = 72^\circ$, $\angle G = 36^\circ$. 19. $AC < AB + BC$ și $AC < AD + DC$, deci $2AC < \mathcal{P}_{ABCD}$ și analog se arată că $2BD < \mathcal{P}_{ABCD}$, prin urmare $2(AC + BD) < 2\mathcal{P}_{ABCD}$, de unde rezultă că $AC + BD < \mathcal{P}_{ABCD}$. 20. a) $\mathcal{P}_{ABD} + \mathcal{P}_{BCD} = \mathcal{P}_{ACD} + \mathcal{P}_{ABC}$, sau $2BD = 2AC$, deci $AC \equiv BD$; b) $\mathcal{P}_{ABD} = \mathcal{P}_{ACD}$ și $AC \equiv BD$, prin urmare $AB \equiv CD$.

Test de evaluare stadială: 1. $\angle F = 85^\circ$. 2. $\angle M = 90^\circ$. 3. $AC = 9$ cm.

Lecția 2. Paralelogramul

1. a) A; b) F; c) F; d) A; e) A; f) F; g) A; h) F. 2. a) $CD = 13$ cm; b) $AD = 8$ cm. 3. a) $\angle M = 112^\circ$; b) $\angle Q = 68^\circ$. 4. a) $MO = 4$ cm; b) $NQ = 6$ cm. 5. a) $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 120^\circ$, $\angle D = 60^\circ$; b) $\angle A = 130^\circ$, $\angle B = 50^\circ$, $\angle C = 130^\circ$. 6. a) A; b) F; c) A; d) F. 7. a) $\mathcal{P}_{ABCD} = 38$ cm; b) $\mathcal{P}_{ABCD} = 48$ cm. 8. a) $\angle E = 62^\circ 55'$, $\angle F = 117^\circ 5'$, $\angle G = 62^\circ 55'$; b) $\angle D = 104^\circ 36'$, $\angle F = 104^\circ 36'$, $\angle G = 75^\circ 24'$; c) $\angle D = 109^\circ 8'$, $\angle E = 70^\circ 52'$, $\angle G = 70^\circ 52'$. 9. a) $BD = 18$ cm; b) $AC = 11$ cm. 10. a) $\angle A = 135^\circ$, $\angle B = 45^\circ$, $\angle C = 135^\circ$, $\angle D = 45^\circ$; b) $\angle A = 150^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 150^\circ$, $\angle D = 30^\circ$. 11. a) $\angle M = 108^\circ$, $\angle N = 72^\circ$, $\angle P = 108^\circ$, $\angle Q = 72^\circ$; b) $\angle M = 54^\circ$, $\angle N = 126^\circ$, $\angle P = 54^\circ$, $\angle Q = 126^\circ$. 12. $\triangle DOE \equiv \triangle FOG \Rightarrow \angle EDF \equiv \angle GFD \Rightarrow DE \parallel GF$; $\triangle DOG \equiv \triangle FOE \Rightarrow \angle DGE \equiv \angle FEF \Rightarrow DG \parallel EF$, deci $DEFG$ este paralelogram. 13. $MN \cap PQ = \{O\}$; $\triangle MON \equiv \triangle POQ \Rightarrow OM \equiv OP$ și $ON \equiv OQ \Rightarrow \triangle MOQ \equiv \triangle PON \Rightarrow \angle MQN \equiv \angle PNP \Rightarrow MQ \parallel NP$, deci $MNPQ$ este paralelogram. 14. $AE \parallel BT$ și $AB \parallel ET$, deci $ABTE$ este paralelogram. 15. $AE \equiv CF$ și $AE \parallel CF$, deci $AFCE$ este paralelogram, prin urmare $AF \parallel CE$. Analog se arată că $DE \parallel BF$, așadar $EMFN$ este paralelogram. 16. a) $AE \equiv CF$ și $AE \parallel CF$, deci $AECF$ este paralelogram; b) $AC \cap BD = \{O\}$ și $AO \equiv OC$, dar $AECF$ este paralelogram, deci $O \in EF$, prin urmare $AC \cap BD \cap EF = \{O\}$. 17. $\mathcal{P}_{ABCD} = 42$ cm. 18. $\angle ABC \equiv \angle ACB$; $AE \cap BC = \{M\}$; $\triangle ABM \equiv \triangle EBM$, deci $AB \equiv EB$ și $\angle ABM \equiv \angle EBM$; $\angle ACB \equiv \angle ECB$, prin urmare $BE \parallel CD$ și cum $BE \equiv CD$, rezultă că $BCDE$ este paralelogram. 19. $\mathcal{P}_{MON} + \mathcal{P}_{NOP} = 37$ cm, deci $MN + NP + MP + NQ = 37$ cm, de unde obținem $MN + NP = 13$ cm, prin urmare $\mathcal{P}_{MNPQ} = 26$ cm. 20. $AB + BC = 20$ cm și $AB + BC + AC + BD = 44$ cm, deci $AC + BD = 24$ cm, de unde rezultă că $AO + BO = 12$ cm, prin urmare $AB = CD = 12$ cm și $BC = AD = 8$ cm. 21. $\angle D = 60^\circ$ și $\angle A = 120^\circ$. Notăm cu M mijlocul laturii CD , deci $\triangle ADM$ este echilateral, prin urmare $AM = \frac{CD}{2}$, de unde rezultă că $\angle CAD = 90^\circ$; $\frac{\angle BAC}{\angle CAD} = \frac{1}{3}$. 22. Cum $MA \equiv MB$ și $DE \parallel AB$, rezultă că $ME \equiv MD$. Analog se arată că $MF \equiv MD$, prin urmare $ME \equiv MF$ și, deoarece $MB \equiv MC$, rezultă că $BECF$ este paralelogram. 23. Considerăm punctele $M, N \in CD$, astfel încât $DM \equiv EA$ și $DN \equiv FB$, $AM \cap BN = \{P\}$ și rezultă că $\angle APB = 90^\circ$; $AEDM$ și $BFDN$ sunt paralelograme, deci $ED \parallel AP$ și $FD \parallel BP$, prin urmare $\angle EDF = 90^\circ$. 24. $AM \cap BC = \{E\}$; $\angle CAE \equiv \angle CEA$, deci $\angle CEA \equiv \angle ECT$, prin urmare $AM \parallel NT$. Analog se arată că $AN \parallel MT$, deci $AMTN$ este paralelogram. 25. Din $\triangle BTC$ rezultă că $\angle BTC = 45^\circ$; $\triangle IBD \equiv \triangle IBC$, deci $ID \equiv IC$; $BI \cap CD = \{M\}$ și $IM \perp CD$; $\angle CIM = \frac{\angle B}{2} + \frac{\angle C}{2} = 45^\circ$, deci $\angle IDC = 45^\circ$, prin urmare $TE \parallel DI$. Analog se arată că $TD \parallel EI$, așadar $TEID$ este paralelogram. **Test de evaluare stadială:** 1. a) $\angle QMN = 100^\circ$; b) $\mathcal{P}_{MON} = 24$ cm; c) $\mathcal{P}_{MOQ} = 19$ cm. 2. $\angle A \equiv \angle B$, deci $\frac{\angle A}{2} = \frac{\angle B}{2}$, prin urmare $\angle EAB \equiv \angle FBA$, de unde rezultă că $AE \parallel BF$, deci $AEBF$ este paralelogram. 3. Triunghiurile isoscele ABC și BOC au în comun unghiul $\angle ACB$, deci $\angle BAC \equiv \angle OBC$, prin urmare $\angle BAC = 2\angle ABO$. Din $\triangle ABC$ rezultă că $\angle ABO = 22^\circ 30'$, deci $\angle ABC = 67^\circ 30' = \angle ADC$; $\angle BAD = 112^\circ 30' = \angle BCD$.

Lecția 3. Linia mijlocie în triunghi

1. a) F; b) A; c) F; d) A. 3. a) $PQ = 11$ cm; b) $EF = 30$ cm. 4. a) $\angle ABC = 50^\circ$; b) $\angle ANM = 40^\circ$. 5. a) $MN = 5,5$ cm, $NP = 5$ cm, $PM = 4,5$ cm; b) $MN = 3,5$ cm, $NP = 6$ cm, $PM = 6,5$ cm. 6. a) $AB = 12$ cm, $BC = 14$ cm, $CA = 8$ cm; b) $AB = 10$ cm, $BC = 18$ cm, $CA = 16$ cm. 7. a) $\mathcal{P}_{DEF} = 30,5$ cm; b) $\mathcal{P}_{DEF} = 36$ cm. 8. a) $\mathcal{P}_{ABC} = 149$ cm; b) $\mathcal{P}_{ABC} = 173$ cm. 9. Folosind teorema liniei mijlocii se arată că $\triangle DEF$ este echilateral, deci $\angle D = \angle E = \angle F = 60^\circ$. 10. $DE = 2NP$, $EF = 2MP$ și $FD = 2MN$, dar $MN \equiv NP \equiv PM$, prin urmare $DE \equiv EF \equiv FD$. 11. a) $\angle DPQ = 108^\circ$; b) $\angle EFD = 59^\circ$. 12. a) $DE \parallel MP$ și $EF \parallel MN$, prin urmare $MDEF$ este paralelogram; b) și c) se demonstrează analog. 13. $DMNP$ este paralelogram, deci $\angle MNP \equiv \angle D$; $\angle D = 60^\circ$, $\angle E = 80^\circ$, $\angle F = 40^\circ$. 14. a) $MN = \frac{AC}{2}$, deci $AM \equiv MN$, $\angle MAP = \angle NME = 60^\circ$, deci $\triangle AMP \equiv \triangle MNE$; b) $MN \parallel AC$ și $\angle MPC = 90^\circ$, deci $\angle PMN = 90^\circ$; c) $MN \equiv NC$, $\angle PMN \equiv \angle ENC$ și $MP \equiv NE$, deci $\triangle PMN \equiv \triangle ENC$. 15. Notăm cu P simetricul punctului M

Fișă pentru portofoliul elevului

I. 1. A. **2.** A. **3.** A. **II. 1.** 81 cm^2 . **2.** 9 cm . **3.** 27 cm^2 . **III. 1.** C. **2.** D. **3.** B. **IV.** $\triangle TAB \equiv \triangle TDC$, deci $\angle TAB \equiv \angle TDC$ și $\angle TBA \equiv \angle TCD$, dar $\angle TAD \equiv \angle TDA$ și $\angle TBC \equiv \angle TCB$, prin urmare $\angle BAD \equiv \angle CDA$ și $\angle ABC \equiv \angle DCB$, deci $\angle DAB + \angle ABC = 180^\circ$, de unde rezultă că $AD \parallel BC$, așadar $ABCD$ este trapez isoscel. **V.** a) Observăm că $\angle ADB = \angle BDC = \angle ACD = 30^\circ$, deci $\angle DAC = 90^\circ$, prin urmare $CD = 2AD = 60 \text{ cm}$; $\mathcal{P}_{ABCD} = 150 \text{ cm}$; b) În $\triangle ADO$, $DO = 2AO$, deci $CO = 2OA$, prin urmare $OC \equiv OE$ și analog se arată că $OD \equiv OF$, de unde rezultă că $CDEF$ este dreptunghi. Din $\triangle CDE$ obținem $DE = \frac{CE}{2} = 34 \text{ cm}$; $\mathcal{A}_{CDEF} = 2040 \text{ cm}^2$.

Probleme din realitatea cotidiană

1. 96 stâlpi. **2.** $\mathcal{A}_{DEFC} = 16,5 \text{ dm}^2$. **3.** $\mathcal{P}_{DMCN} = 16 \text{ dm}$. **4.** 16 m. **5.** Cantitățile sunt egale. **6.** $\mathcal{A}_{ABCD} = 44 \text{ m}^2$. **7.** 12 m^2 . **8.** $\angle A = \angle B = 120^\circ$ și $\angle C = \angle D = 60^\circ$. **9.** 800 m^2 . **10.** 5429 m^2 , 2492 m^2 . **11.** a) $d(A, CD) + d(B, CD) = 1,3 \text{ m}$; b) $d(A, CD) = 1,3 \text{ m}$. **12.** $\mathcal{A}_{AMCN} = 100 \text{ dam}^2$. **13.** $\mathcal{A}_{EFGH} = 50\% \mathcal{A}_{ABCD}$. **14.** $\mathcal{P}_{ABCD} = 9 \text{ m}$. **15.** $EF = 8 \text{ m}$. **16.** $\mathcal{A}_{ABCD} = 200 \text{ dam}^2$. **17.** 54 m^2 de parchet. **18.** $\mathcal{A} = 490 \text{ m}^2$. **19.** 108 m . **20.** $BD = 2 \text{ km}$, $DC = 4 \text{ km}$.

CAPITOLUL II. CERCUL

Lecția 12. Unghi înscris în cerc

1. C. **2.** a) $\widehat{MN} = 54^\circ$; b) $\angle MON = 48^\circ$. **3.** a) $\widehat{EF} = 60^\circ$; $\widehat{EDF} = 300^\circ$; b) $\widehat{EF} = 72^\circ$; $\widehat{EDF} = 288^\circ$. **4.** a) F; b) A. **5.** a) $\angle EDF = 20^\circ$; b) $\angle EDF = 37^\circ$; c) $\angle EDF = 48^\circ$. **6.** a) $\widehat{EF} = 30^\circ$; b) $\widehat{EF} = 52^\circ$; c) $\widehat{EF} = 90^\circ$. **7.** a) $\angle A = 77^\circ$, $\angle B = 67^\circ$ și $\angle C = 36^\circ$; b) $\angle A = 30^\circ 30'$, $\angle B = 85^\circ$ și $\angle C = 64^\circ 30'$. **8.** a) $\widehat{AB} = 170^\circ$, $\widehat{BC} = 80^\circ$ și $\widehat{CA} = 110^\circ$; b) $\widehat{AB} = 146^\circ$, $\widehat{BC} = 92^\circ$ și $\widehat{CA} = 122^\circ$. **9.** $\angle MPN = 90^\circ$. **10.** $EF = 14\sqrt{5} \text{ cm}$. **11.** a) $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 70^\circ$ și $\angle C = 50^\circ$; b) $\angle A = 63^\circ$, $\angle B = 72^\circ$ și $\angle C = 45^\circ$. **12.** a) $\widehat{AB} = 136^\circ$, $\widehat{BC} = 96^\circ$ și $\widehat{CA} = 128^\circ$; b) $\widehat{AB} = 138^\circ$, $\widehat{BC} = 102^\circ$ și $\widehat{CA} = 120^\circ$. **13.** a) $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 48^\circ$ și $\angle C = 72^\circ$; b) $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 45^\circ$ și $\angle C = 75^\circ$. **14.** a) Cum $\angle ACB = 45^\circ$, rezultă că $\angle AOB = 90^\circ$ și obținem $R = 7 \text{ cm}$; b) Analog obținem $R = 9 \text{ cm}$. **15.** a) $EF = 6\sqrt{2} \text{ cm}$; b) $EF = 5\sqrt{2} \text{ cm}$. **16.** Observăm că $\triangle OAB$ este echilateral, deci $\angle AOB = 60^\circ$, prin urmare $\angle ACB \in \{30^\circ; 150^\circ\}$. **17.** a) Cum $\angle BAO = 23^\circ$, rezultă că $\angle AOB = 134^\circ$, deci $\angle ACB = 67^\circ$. Analog obținem $\angle BAC = 53^\circ$, deci $\angle ABC = 60^\circ$; b) $\angle BAC = 53^\circ$, $\angle ABC = 51^\circ$ și $\angle BCA = 76^\circ$. **18.** Dacă $E \in \widehat{BD}$, atunci $ABED$ și $ADCF$ sunt inscriptibile, deci $\angle EAB = \angle FAC = \angle BDE$, așadar $\angle BAC \equiv \angle EAF$. **19.** Dacă notăm cu h înălțimea $\triangle OEF$, rezultă că $h = \frac{R}{2}$, prin urmare înălțimea se opune unui unghi cu măsura de 30° , deci $\angle EOF \in \{30^\circ; 150^\circ\}$ și $\angle EDF \in \{15^\circ; 75^\circ\}$. **20.** Patrulateralele $AEFC$ și $EBDF$ sunt inscriptibile; $\angle BDF + \angle BEF = 180^\circ$, deci $\angle BDF \equiv \angle AEF$; $\angle AEF + \angle ACF = 180^\circ$, prin urmare $\angle BDC + \angle ACD = 180^\circ$, de unde rezultă că $AC \parallel BD$. **21.** Construim $DM \perp AB$, $M \in AB$ și $DN \perp AC$, $N \in AC$ și observăm că $\triangle DMB \equiv \triangle DNC$, deci $\angle DBA \equiv \angle DCA$, prin urmare punctele A, B, C și D sunt conciclice. **22.** $BCEF$ este inscriptibil, deci $\angle FBE \equiv \angle ECF$ (1). Din patrulateralele inscriptibile $BDHF$ și $CDHE$ rezultă $\angle FBH \equiv \angle FDH$, respectiv $\angle ECH \equiv \angle EDH$ și folosind (1) obținem $\angle FDH \equiv \angle EDH$; analog obținem $\angle EFH \equiv \angle DFH$, de unde rezultă concluzia. **23.** Notăm cu D al doilea punct de intersecție al cercurilor circumscrise triunghiurilor AMP și CPN și observăm că $\angle ABC + \angle MDN = 180^\circ$, deci $BMDN$ este inscriptibil, prin urmare cele trei cercuri au în comun punctul D . **24.** Se arată că $\angle APN = 90^\circ$, deci $APND$ este inscriptibil, prin urmare $\angle APD \equiv \angle AND$ și $\angle PAD \equiv \angle BNC$, dar $\angle AND \equiv \angle BNC$, deci $\angle APD \equiv \angle PAD$, așadar $DP = DA = l$. **25.** Dacă DE și DF sunt diametre în cercurile circumscrise triunghiurilor ABD , respectiv ACD , rezultă că punctele E, A și F sunt coliniare. $\angle E \equiv \angle B$ și $\angle F \equiv \angle C$, deci $\angle E \equiv \angle F$, prin urmare $DE \equiv DF$. **26.** Considerăm punctul $E \in AD$, astfel încât $DE \equiv DC$ și, deoarece $\angle ADC = 60^\circ$, rezultă că $\triangle EDC$ este echilateral, deci $EC \equiv DC$, prin urmare $\triangle AEC \equiv \triangle BDC$, de unde rezultă că $AE \equiv BD$, deci $AD = BD + CD$. **27.** Fie T punctul diametral opus punctului D .

Cuprins

TESTE DE EVALUARE INIȚIALĂ	5
----------------------------------	---

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I. MULȚIMEA NUMERELOR REALE

Lecția 1. Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural. Estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional.....	8
Lecția 2. Scoaterea factorilor de sub radical. Introducerea factorilor sub radical	12
Lecția 3. Numere iraționale. Mulțimea numerelor reale	15
Lecția 4. Modulul unui număr real.....	18
Lecția 5. Compararea și ordonarea numerelor reale.....	22
Lecția 6. Reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor prin aproximări.....	26
Teste de evaluare sumativă	30
Fișă pentru portofoliul elevului.....	31
Lecția 7. Adunarea și scăderea numerelor reale.....	33
Lecția 8. Înmulțirea numerelor reale	37
Lecția 9. Puterea cu exponent număr întreg a numerelor reale	42
Lecția 10. Împărțirea numerelor reale	46
Lecția 11. Raționalizarea numitorului de forma $a\sqrt{b}$; $a, b \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$, $b > 0$	51
Teste de evaluare sumativă	56
Fișă pentru portofoliul elevului.....	58
Lecția 12. Media aritmetică și media aritmetică ponderată a n numere reale, $n \geq 2$	60
Lecția 13. Media geometrică a două numere reale pozitive	64
Lecția 14. Ecuația de forma $x^2 = a$, unde $a \in \mathbb{R}$	67
Teste de evaluare sumativă	70
Fișă pentru portofoliul elevului.....	72
Probleme din realitatea cotidiană.....	74

GEOMETRIE

CAPITOLUL I. PATRULATERUL

Lecția 1. Patrulaterul convex.....	76
Lecția 2. Paralelogramul	80
Lecția 3. Linia mijlocie în triunghi.....	84
Lecția 4. Centrul de greutate al triunghiului.....	88
Teste de evaluare sumativă	92
Fișă pentru portofoliul elevului.....	94
Lecția 5. Dreptunghiul	96
Lecția 6. Rombul	100
Lecția 7. Pătratul	104
Teste de evaluare sumativă	108
Fișă pentru portofoliul elevului.....	109
Lecția 8. Trapezul. Trapezul isoscel.....	111
Lecția 9. Linia mijlocie în trapez.....	115

Lecția 10. Perimetrul și aria triunghiului.....	119
Lecția 11. Perimetrul și aria patrulaterului	123
<i>Teste de evaluare sumativă</i>	130
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	132
<i>Probleme din realitatea cotidiană</i>	134

CAPITOLUL II. CERCUL

Lecția 12. Unghi înscris în cerc.....	137
Lecția 13. Coarde și arce în cerc	143
Lecția 14. Tangente dintr-un punct exterior la un cerc.....	147
Lecția 15. Poligoane regulate înscrise într-un cerc.....	152
Lecția 16. Lungimea cercului și aria discului.....	156
<i>Teste de evaluare sumativă</i>	159
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	161
<i>Probleme din realitatea cotidiană</i>	162

MODELE DE TESTE PENTRU EVALUAREA CUNOȘTINȚELOR	165
---	-----

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI	172
--------------------------------------	-----