

8

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

Manual pentru clasa a VIII-a

MATEMATICĂ

Adrian Zanoschi
Gheorghe Iurea
Gabriela Zanoschi

Dorel Luchian
Ioana Anton
Daniela Constantin



EDITURA **PARALELA 45**[®]
EDUCAȚIONAL

Acest manual școlar este proprietatea Ministerului Educației și Cercetării.

Acest manual școlar este realizat în conformitate cu Programa școlară aprobată prin
Ordinul ministrului educației naționale nr. 3393/28.02.2017.



119 – număr de telefon unic la nivel național pentru cazurile de abuz împotriva copiilor

116.111 – numărul de telefon de asistență pentru copii

8

Adrian Zanoschi
Gheorghe Iurea
Gabriela Zanoschi
Dorel Luchian
Ioana Anton
Daniela Constantin

Manual pentru clasa a VIII-a

MATEMATICĂ

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

Editura Paralela 45

Manualul a fost aprobat prin Ordinul ministrului educației și cercetării nr. 6400/22.09.2025.

Manualul este distribuit elevilor în mod gratuit, atât în format tipărit, cât și în format digital.

ACEST MANUAL A FOST FOLOSIT DE:						
Anul	Numele elevului care a primit manualul	Clasa	Școala	Anul școlar	Starea manualului*	
					la primire	la returnare
1.						
2.						
3.						
4.						

* Starea manualului se va înscrie folosind termenii: *nou, bun, îngrijit, nesatisfăcător, deteriorat*.

Cadrele didactice vor controla dacă numele elevului este scris corect.

Elevii nu trebuie să facă niciun fel de însemnări pe manual.

Referenți științifici:

Lect. univ. dr. Alexandru Negrescu, Universitatea Politehnica din București

Prof. gr. I Ion Tudor, Școala Gimnazială Băbana, jud. Argeș

ISBN 978-973-47-4334-6

Director de producție editorială: Ionuț Burcioiu

Redactare: Andreea Roșca

Corectură: Gabriela Grigorescu

Tehnoredactare: Carmen Rădulescu

Design copertă: Mirona Pintilie

Pregătire de tipar: Marius Badea

Credite foto: shutterstock.com, dreamstime.com, wikipedia.org

Materiale audio: Dan Andrei Deaconu

Materiale video și digitalizare:

EDITSOFT & SERVICES

Copyright © Editura Paralela 45, 2025

Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate,

iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.

COMENZI – CARTEA PRIN POȘTĂ

EDITURA PARALELA 45

Bulevardul Republicii, nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești,
jud. Argeș, cod 110177

Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918

Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492

E-mail: comenzi@edituraparelela45.ro

www.edituraparelela45.ro

CUPRINS

Instrucțiuni de utilizare a manualului în format digital și tipărit	6
Competențe generale și specifice	8

RECAPITULARE ȘI EVALUARE ÎNȚIALĂ

1. Probleme recapitulative	9
2. Teste de evaluare inițială	11

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE 1. INTERVALE DE NUMERE REALE. INECUAȚII ÎN $\mathbb{R}$

Lecția 1. Mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor lor	14
Lecția 2. Intervale numerice și reprezentarea lor pe axa numerelor; intersecția și reuniunea intervalelor	18
Lecția 3. Inecuații de forma $ax + b \geq 0$ ($\leq$, $<$, $>$), unde $a, b \in \mathbb{R}$	25
Lecția 4. Probleme care se rezolvă cu ajutorul inecuațiilor	29
Fișă de observare sistematică a activității și a comportamentului elevului	32
Recapitulare și evaluare	
1. Probleme recapitulative	33
2. Test de evaluare	34

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE 2. CALCUL ALGEBRIC ÎN $\mathbb{R}$

Lecția 1. Operații cu numere reale reprezentate prin litere	36
Lecția 2. Formule de calcul prescurtat	42
Lecția 3. Descompuneri în factori utilizând reguli de calcul în $\mathbb{R}$	46
Lecția 4. Frații algebrice	51
Lecția 5. Operații cu fracții algebrice	55
Lecția 6. Ecuații de forma $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$	60
Fișă de observare sistematică a activității și a comportamentului elevului	64
Recapitulare și evaluare	
1. Probleme recapitulative	65
2. Test de evaluare	66

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE 3. FUNCȚII	67
Lecția 1. Funcții. Funcții definite pe mulțimi finite. Funcții numerice	68
Lecția 2. Graficul unei funcții. Reprezentarea geometrică a graficului unei funcții numerice.	
Lecturi grafice	73
Lecția 3. Funcții de forma $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$ și $\mathcal{D}$ este o mulțime finită de numere reale sau un interval nedegenerat	76
Lecția 4. Elemente de statistică: indicatorii tendinței centrale a unei serii de date statistice	83
Fișă de observare sistematică a activității și a comportamentului elevului	88
Recapitulare și evaluare	
1. Probleme recapitulative	89
2. Test de evaluare	90

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE 4. ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAȚIU	91
Lecția 1. Puncte, drepte, plane: convenții de notare, reprezentări, determinarea dreptei, determinarea planului, relații între puncte, drepte și plane	92
Lecția 2. Corpuri geometrice: piramida, piramida regulată, tetraedrul regulat; reprezentare, elemente caracteristice, desfășurări	97
Lecția 3. Corpuri geometrice: prisma dreaptă, paralelipipedul dreptunghic, cubul; reprezentare, elemente caracteristice, desfășurări	102
Lecția 4. Corpuri geometrice: cilindrul circular drept, conul circular drept; reprezentare, elemente caracteristice, desfășurări	107
Lecția 5. Paralelism: drepte paralele, unghiul a două drepte	110
Lecția 6. Dreaptă paralelă cu un plan	115
Lecția 7. Plane paralele	120
Lecția 8. Aplicații: secțiuni paralele cu baza în corpurile geometrice studiate; trunchiul de piramidă și trunchiul de con circular drept (descriere și reprezentare)	124
Lecția 9. Perpendicularitate: drepte perpendiculare, dreaptă perpendiculară pe un plan	128
Lecția 10. Aplicații: înălțimea unei piramide, înălțimea unui con circular drept	132
Lecția 11. Distanța dintre două plane paralele, înălțimea prisme drepte, a paralelipipedului dreptunghic, a cilindrului circular drept, a trunchiului de piramidă și a trunchiului de con circular drept	134
Lecția 12. Plane perpendiculare, aplicații: secțiuni diagonale, secțiuni axiale în corpurile studiate	137
Lecția 13. Proiecții de puncte, de segmente și de drepte pe un plan; unghiul dintre o dreaptă și un plan, aplicație: lungimea proiecției unui segment pe un plan	140
Lecția 14. Unghi diedru, unghi plan corespunzător diedrului; unghiul a două plane; plane perpendiculare	145
Lecția 15. Teorema celor trei perpendiculare; calculul distanței de la un punct la o dreaptă; calculul distanței de la un punct la un plan; calculul distanței dintre două plane paralele	148
Fișă de observare sistematică a activității și a comportamentului elevului	152
Recapitulare și evaluare	
1. Probleme recapitulative	153
2. Test de evaluare	156

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE 5. ARII ȘI VOLUME ALE UNOR CORPURI GEOMETRICE	157
Lecția 1. Cubul. Distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul cubului. Aria laterală, aria totală și volumul cubului	158
Lecția 2. Paralelipipedul dreptunghic. Distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul paralelipipedului dreptunghic. Aria și volumul paralelipipedului dreptunghic	161
Lecția 3. Prisma dreaptă cu baza triunghi echilateral, pătrat sau hexagon regulat. Distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul prisme. Aria laterală, aria totală și volumul prisme regulate	164
Lecția 4. Piramida regulată. Distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul piramidei regulate. Aria laterală, aria totală și volumul piramidei regulate	168
Lecția 5. Trunchiul de piramidă regulată. Distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul trunchiului de piramidă regulată. Aria laterală, aria totală și volumul trunchiului de piramidă regulată	173
Lecția 6. Cilindrul circular drept. Distanțe și măsuri de unghiuri pe suprafața sau în interiorul cilindrului circular drept. Aria laterală, aria totală și volumul cilindrului circular drept	185
Lecția 7. Conul și trunchiul de con. Distanțe și măsuri de unghiuri pe suprafața sau în interiorul conului circular drept sau trunchiului de con circular drept. Aria laterală, aria totală și volumul conului circular drept, respectiv ale trunchiului de con circular drept	188
Lecția 8. Sfera: arie și volum	191
Fișă de observare sistematică a activității și a comportamentului elevului	193
Recapitulare și evaluare	
1. Probleme recapitulative	194
2. Test de evaluare	196

RECAPITULARE ȘI EVALUARE FINALĂ

1. Probleme recapitulative	197
2. Teste finale tip Evaluare Națională	201
SOLUȚII	207

Instrucțiuni de utilizare a manualului în format digital și tipărit

Varianta digitală a manualului cuprinde integral conținutul variantei tipărite și, în plus, o serie de activități multimedia interactive, care vor face învățarea mult mai plăcută și mai ușoară.

Simbolurile care indică activitățile multimedia interactive de învățare:



AMII static

Activarea acestui buton permite vizualizarea optimizată a secvenței din manual.



AMII animat

Activarea acestui buton permite vizualizarea unui filmuleț, pentru care se pot controla începerea/întreruperea (prin butonul Start/Pauză), volumul și maximizarea ecranului.



AMII interactiv

Activarea acestui buton permite vizualizarea unor secvențe educaționale cu grad înalt de interactivitate, la finalul cărora este dat un feedback imediat. Exercițiile marcate cu acest simbol pot fi de tipul: completare, trage și plasează, bifarea variantei corecte, asocierea unor termeni din mai multe coloane.

Unghi diedru, unghi plan corespunzător diedrului; unghiul a două plane; plane perpendiculare

LECȚIA 14 Unghi diedru, unghi plan corespunzător diedrului; unghiul a două plane; plane perpendiculare

Ne amintim

În clasa a VI-a am învățat că două semidrepte cu aceeași origine formează un unghi. Măsura unui unghi, în grade, poate varia de la 0° la 180° (figura 1).

Fig. 1

Fig. 2

Unghiul dreptelor a și b este, prin definiție, unul dintre cele patru unghiuri formate care este mai mic sau egal cu 90° . În figura 2, $\angle(a, b) = \angle AOB$.

Observăm și descoperim cunoștințe noi

DEFINIȚIE: Figura geometrică formată de două semiplane¹ mărginite de aceeași dreaptă se numește **unghi diedru**.

EXEMPLU:

Unghi diedru

Elementele unui unghi diedru:

- fețele diedrului sunt cele două semiplane;
- muchia diedrului este dreapta care mărginește cele două semiplane.

Pentru a defini măsura unui unghi diedru, vom folosi construcția din figura 3. Fie O un punct pe d , muchia diedrului, și semidreptele OA , inclusă într-una dintre fețele diedrului, și OB , inclusă în cealaltă față a diedrului, astfel încât $OA \perp d$ și $OB \perp d$. Unghiul AOB astfel construit se numește **unghi plan corespunzător diedrului respectiv**.

OBSERVAȚIE: Măsura unghiului AOB este aceeași, indiferent de poziția punctului O pe dreapta d .

¹ Un semiplan este mulțimea punctelor unui plan situate de aceeași parte a unei drepte din acel plan. Figura, din plan, analoagă semiplanului este semidreapta.

pentru activitate statică, de observare
a unei imagini semnificative

Cubul

Aplicăm cunoștințele

În figura 3 este reprezentat cubul $ABCD A'B'C'D'$ cu $l = AB = 6$ cm, iar O este centrul bazei $ABCD$.

a) Calculează volumul cubului $ABCD A'B'C'D'$.
b) Determină tangenta unghiului dintre CO și planul (ABC) .
c) Determină lungimea segmentului CM , unde M este mijlocul muchiei AB' .

Rezolvare:

a) $V = l^3 = 216 \text{ cm}^3$;
b) $\angle(CO, (ABC)) = \angle(CO, p_{(ABC), CO}) = \angle(CO, CO) = \angle C'OC$.
În $\triangle CCO$, $\angle C = 90^\circ \Rightarrow \tan \angle C'OC = \frac{CC'}{OC} = \frac{6}{3\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.
c) $MB' \perp (B'BC)$, $B'C \subset (B'BC) \Rightarrow MB' \perp B'C \Rightarrow \triangle MB'C$ are $\angle B' = 90^\circ \Rightarrow CM^2 = 3^2 + (6\sqrt{2})^2 = 81 \Rightarrow CM = 9$ cm.

Reține!

Într-un cub cu muchia de lungime l au loc relațiile:

- $\angle \alpha_{\text{max}} = 45^\circ$; • $\angle \beta_{\text{max}} = 60^\circ$; • $\gamma = 90^\circ$; • $d = l\sqrt{3}$, unde d este lungimea diagonalei cubului.

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. Calculează volumul unui cub cu lungimea muchiei de 2 cm.
2. Determină aria laterală a unui cub cu lungimea diagonalei cubului de $4\sqrt{3}$ cm.
3. Determină lungimea laturii unui cub cu aria totală de 24 cm^2 .
4. Calculează lungimea diagonalei unei fețe a unui cub cu aria laterală de 72 cm^2 .
5. Calculează lungimea diagonalei cubului cu volumul de 27 cm^3 .
6. Suma lungimilor tuturor muchiilor unui cub este 48 cm. Calculează aria totală a cubului.
7. Aria secțiunii diagonale a unui cub este de $36\sqrt{2} \text{ cm}^2$. Calculează suma lungimilor tuturor muchiilor cubului.
8. **Lucru în echipă:** Împreună cu colegul de bancă, rezolvați sarcinile propuse și analizați rezultatele găsite. În figura 4 este desenat un cub $ABCD A'B'C'D'$. Copiază și completează tabelul de mai jos, în care l , $d_{\text{față}}$, d , $\angle \alpha_{\text{max}}$, $\angle \beta_{\text{max}}$ și γ sunt lungimea laturii, a diagonalei unei fețe, a diagonalei cubului (măsurate în cm), aria laterală, aria totală (măsurate în cm^2), respectiv volumul cubului (măsurat în cm^3).

	l	$d_{\text{față}}$	d	$\angle \alpha_{\text{max}}$	$\angle \beta_{\text{max}}$	γ
a)	6					
b)		8				
c)		$\sqrt{2}$	$12\sqrt{3}$			
d)				24		
e)					216	
f)						64

9. În cubul $ABCD A'B'C'D'$ din figura 5, $l = AB = 6$ cm. Calculează:

a) unghiul dintre dreptele AC și $B'C$;
b) distanța de la punctul B' la dreapta AB ;
c) distanța de la punctul B' la dreapta AD .

pentru activitate interactivă

pentru activitate animată
(film sau animație scurtă)

În acest manual, conținuturile din programă sunt prezentate ca mijloace informaționale care contribuie la dezvoltarea competențelor generale și specifice, fiind acoperite integral și organizate pe unități de învățare. Fiecare unitate de învățare se încheie cu probleme recapitulative și teste de evaluare. Lecțiile de predare-învățare sunt structurate astfel încât să sprijine învățarea activă și se finalizează cu o autoevaluare, care acoperă întreaga gamă a tipologiei itemilor: obiectivi, semiobiectivi și subiectivi.

Secvențele metodice ale unei lecții sunt:

- **Ne amintim** – revizuirea cunoștințelor anterioare;
- **Observăm și descoperim cunoștințe noi** – prezentarea noilor informații;
- **Aplicăm cunoștințele** – aplicarea noilor concepte în probleme rezolvate, ce propun contexte variate;
- **Exersăm, fixăm și aprofundăm cunoștințele** – consolidarea învățării prin exerciții și probleme propuse, urmate la sfârșitul manualului de răspunsuri și soluții;
- **Reținem** – recapitulare și consolidare (acolo unde este cazul).

Aceste secvențe sunt completate cu sugestii pentru organizarea activităților de predare-învățare, ce pot include metode individuale, pe grupe sau frontale, și activități practice pentru dezvoltarea abilităților.

Manualul utilizează un suport vizual și intuitiv, bine ales, care valorifică experiențele anterioare ale elevilor și le stimulează gândirea și imaginația. De asemenea, se pune accent pe dezvoltarea competențelor de realizare a conexiunilor interdisciplinare.

În plus, manualul propune instrumente complementare de evaluare a activității elevilor: portofolii, proiecte, investigații, observarea sistematică a activității și a comportamentului elevului.

LECȚIE DE PREDARE-ÎNVĂȚARE

3 • FUNCȚII

Introducere

Noțiunea de funcție este un concept fundamental al matematicii și, în general, al științelor exacte. Apariția sa este strâns legată de incercările de rezolvare a unor probleme practice, de mecanică sau de astronomie. Termenul „funcție” a fost folosit pentru prima dată de G. Leibniz, în 1673. Ulterior, J. Bernoulli și L. Euler au privit funcțiile drept instrumente care permit studiul modalităților prin care variația unei mărimi influențează modificarea unei alte mărimi, care depinde de prima.

Care sfârșitul secolului al XIX-lea, odată cu dezvoltarea teoriei mulțimilor, s-a degajat conceptul modern de funcție, pe care îl vom prezenta și în cele ce urmează.

LECȚIA 1 Funcții. Funcții definite pe mulțimi finite. Funcții numerice

1. Rezolvăm împreună

Un bazar găsește alimente cu apă cu ajutorul a trei robinete, fiecare având debitul de 20 l/minut. Volumul de apă V (în litri) care se adună în bazin dege de timpul t (în minute) scade de la deschiderea simultană a celor trei robinete.

a) Completează tabelul.

t	1	2	3	4	5
V					

b) Dacă $t = 1, 2, 3, \dots$, $V = 5$ sunt valorile lui t din tabel, iar $V_1, V_2, \dots, V_n$ sunt valorile corespunzătoare ale lui V , arată că numerele $V_1, V_2, \dots, V_n$ sunt direct proporționale cu numerele $t_1, t_2, \dots, t_n$.

c) Reprezintă datele din tabel cu ajutorul unei diagrame cu bare verticale (de tip coloană) și al unei diagrame cu puncte.

Reținem:

a) În primul minut după deschiderea simultană a celor trei robinete, în bazin se adună $V = 5 \cdot 3 = 15$ l de apă. În al doilea minut, robinetele alimentează bazinul cu încă 10 l de apă, deci cantitatea de apă care se adună este $V = 15 + 10 = 25$ l. Continuăm să completăm tabelul pentru ca să vedem cum se schimbă valoarea lui V .

t	1	2	3	4	5
V	15	25	35	45	55

b) Observăm că $\frac{V_1}{t_1} = \frac{15}{1} = 15, \frac{V_2}{t_2} = \frac{25}{2} = 12,5, \frac{V_3}{t_3} = \frac{35}{3} \approx 11,67, \frac{V_4}{t_4} = \frac{45}{4} = 11,25, \frac{V_5}{t_5} = \frac{55}{5} = 11$. Rezultă că numerele $V_1, V_2, \dots, V_n$ sunt direct proporționale cu numerele $t_1, t_2, \dots, t_n$. Coeficientul de proporționalitate este de debitul total al celor trei robinete, 15 l/minut, și arată viteza de umplere a bazinei.

c)

DIAGRAMA CU BARE VERTICALE

DIAGRAMA CU PUNCTE

3 • FUNCȚII

Reținem!

- Funcția este o corespondență între elementele a două mulțimi nevide $f: A \rightarrow B$.
- A – domeniul de definiție, B – codomeniul.
- O funcție se poate reprezenta printr-un tabel sau printr-o diagramă, dacă domeniul de definiție este o mulțime finită.
- Fiecare element din A trebuie să aibă un corespondent în B.
- Unul element din B trebuie să fie corespunzător cu un singur element din A.
- Nu este necesar ca orice element din B să fie imaginea a unui element din A.
- Dacă sau mai multe elemente din A pot avea aceeași imagine în B.

Aplicăm cunoștințele

Considerăm mulțimea $A = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ și funcția $f: A \rightarrow A$ care asociază fiecărui element $n \in A$ ultima cifră a numărului n^2 . Reprezintă funcția f cu ajutorul unui tabel și cu ajutorul diagramei.

Reținem:

Observăm că $f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 4, f(3) = 9, f(4) = 6, f(5) = 5, f(6) = 6, f(7) = 9, f(8) = 4, f(9) = 1$. Rezultă că f este o funcție simetrică față de linia $y = x$.

Observăm și descoperim cunoștințele noi

DEFINIȚIE: O funcție al cărei domeniu de definiție și drept codomeniul două mulțimi de numere reale (submulțimi ale lui $\mathbb{R}$) se numește funcție numerică.

Legenda de corespondență a unei funcții numerice se exprimă, de obicei, analitic, adică folosind o formulă.

Exemplu: Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$ este o funcție numerică. Imaginea unui element din domeniul prin funcția f se obține înlocuind în formula de corespondență x cu respectivul element. De exemplu, $f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3, f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5, f(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7, f(4) = 2 \cdot 4 + 1 = 9$.

În general, dacă n este un număr întreg, atunci $f(n) = 1$, iar dacă n este un număr impar, atunci $f(n) = 1$. Putem exprima acest lucru scriind, cu acelasi simbol f :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \text{ este par} \\ 1, & \text{dacă } x \text{ este impar} \end{cases}$

Mulțimea valorilor acestor funcții este $\{1\}$.

Deși putem calcula $f(10) = 1$ sau $f(100) = 1$, nu putem spune că $f(10) = 1$, respectiv $f(100) = 1$, deoarece elementele 10 și 100 nu aparțin domeniului funcției f .

Unele expresii algebrice date se poate asocia funcției numerice, cu atenție la alegerea domeniului. Acesta nu trebuie să conțină elemente pentru care expresia să nu aibă sens.

Exemplu:

• Expresia $x^2 - 2x + 1$ poate asocia funcția numerică $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2x + 1$, deoarece putem calcula $f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

3 • FUNCȚII

1. Stabilite domeniul maximal de definiție al unei funcții definite prin formulă:

a) $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$ b) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ c) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

2. Se consideră funcția $f: [-2, -1, 0, 1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 2$.

a) Calculează $f(-2), f(2)$.

b) Determină mulțimea valorilor funcției.

3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x - 2$.

a) Calculează media aritmetică și media geometrică ale numerelor $f(\sqrt{2}-1)$ și $f(\sqrt{2}+1)$.

b) Calculează suma $S = f(1) + f(2) + \dots + f(10)$.

c) Calculează produsul $P = f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f\left(\frac{2}{3}\right) \cdot \dots \cdot f\left(\frac{10}{11}\right)$.

4. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 5x - 3$. Determină numerele reale x cu proprietatea că $f(x)$ este un număr din intervalul $[-2, 2]$.

a) $f(x) = 1$, dacă $x = 1$ b) $f(x) = 1$, dacă $x = 1$

5. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2+1}$ și $f(\sqrt{x^2+1})$.

a) Calculează $f(2), f(0), f(1), f(\sqrt{2}-1)$ și $f(\sqrt{2}+1)$.

b) Demonstrează că $f(x) = 0$, oriunde ar fi numărul real x .

6. Determină legea de corespondență a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, știind că:

a) $f(x) = 3x - 1, x \in \mathbb{R}$ b) $f(x) = 2x + 3, x \in \mathbb{R}$

7. O funcție se schimbă pe axa numerelor. Are placă din originea O la momentul $t_0 = 0$, se deplasează în sens pozitiv și în fiecare secundă, parcurge o distanță de cinci două unități. Funcția merge la stânga până la momentul $t_1 = 10$. Decide cu ajutorul unei funcții distanța parcursă de funcția în funcție de timpul scurs din momentul plecării, exprimat în secunde.

Autoevaluare

1. În figura de mai jos este reprezentată funcția $f: A \rightarrow B$ cu ajutorul unei diagrame. Dacă afirmația este adevărată, înlocuiește litera A. În caz contrar, înlocuiește litera F.

a) Domeniul de definiție al funcției f este mulțimea $\{x, y, z\}$. A F

b) Codomeniul funcției f este mulțimea $\{x, y, z\}$. A F

c) Mulțimea valorilor funcției f este mulțimea $\{x, y, z\}$. A F

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 1$. Unește prin săgeți fiecare număr din coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta.

a) $f(1) = \dots$ 1) 2; b) $f(0) = \dots$ 2) 0; c) $f(2) = \dots$ 3) 1; d) $f(3) = \dots$ 4) 3

3. Stabilite domeniul maximal de definiție al unei funcții definite prin formulă:

a) $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$ b) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ c) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

RECAPITULARE

RECAPITULARE ȘI EVALUARE

1. PROBLEME RECAPITULATIVE

1. Scrie legea de corespondență pentru toate funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$ și $f(x) = x^2$ care au proprietatea că $f(1)$ este număr prim.

2. Determină domeniul de definiție și mulțimea valorilor funcției pentru care reprezentarea geometrică a graficului este mulțimea $\{A, B, C, D, E\}$, unde $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$, $C = \{5, 6\}$, $D = \{7, 8\}$, $E = \{9, 10\}$.

3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$.

a) Dă exemple de un număr rațional x pentru care $f(x)$ este număr natural.

b) Dacă $x = 1$, demonstrează că $f(x) = 3$ și $f(x) = 3$ este număr natural.

c) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$. Arată că $f(x)$ este număr natural, unde x este un număr real. Stabilite valoarea de adevăr a afirmației: Dacă $f(x) = y$, atunci funcțiile f și y sunt egale.

4. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$.

a) Rezoară în mulțimea numerelor reale inecuată $\{2x + 1\}$ și $\{x^2 + 1\}$.

b) Calculează media aritmetică a numerelor $a = \sqrt{2}$ și $b = \sqrt{2} - 1$.

c) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$.

d) Determină aria triunghiului format de graficul funcției f și axele sistemului de coordonate xOy .

e) Demonstrează că $OM_1 = \frac{1}{2} OM_2$, oriunde ar fi M un punct situat pe graficul funcției f și O este originea sistemului de axe xOy .

f) Se dă funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$.

g) Determină distanța de la punctul $M(0, 1)$ la graficul funcției f .

h) Calculează $\sqrt{f(1) + f(2) + \dots + f(10)}$.

5. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$. Determină punctele $P(x, y)$ ale graficului funcției f în fiecare dintre cazurile:

a) $x = 1$ b) $y = 0$ c) $x = y$

6. Determină funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(x-1) \leq x \leq f(x)$, $f(x) = 1$, oriunde ar fi $x \in \mathbb{R}$.

7. Găsește funcția care are drept grafic:

a) dreapta AB unde $A(\sqrt{2}, 1)$ și $B(\sqrt{2}, 1)$ b) segmentul PQ unde $P(1, 1)$ și $Q(1, 1)$

8. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție care verifică următoarele condiții:

a) $f(x) = x^2 + 1$ b) $f(x) = x^2 + 1$ c) $f(x) = x^2 + 1$

d) Demonstrează că punctul $A(1, 2)$ se află pe graficul ambelor funcții.

e) Determină aria triunghiului ABC, unde A, B, C sunt punctele de pe axele absciselor care aparțin graficului funcției f .

9. a) Stabilite distanța de la punctul $M(-4, 3)$ la linia AB , unde $A(1, 2)$ și $B(1, 2)$ sunt coliniare.

b) Același calcul pentru punctele $A(1, 3)$, $B(2, 1)$ și $C(0, 1)$.

c) Determină media, mediana și amplitudinea unui set de date statistice: 6, 8, 10, 12, 9.

d) În cadrul programului educațional Săptămâna Verde, un grup de elevi împreună cu doi profesori au vizitat Grădina Botanică. Biletul pentru însoțitor are preț de 20 de lei. Pentru elevi, un bilet cu preț redus costă 8 lei.

e) Determină prețul plătit pentru achiziționarea biletelor a 11 copii și doi însoțitori.

f) Găsește primul, primul plătit pentru elevii și doi însoțitori.

g) Stind că 140 c și 150 c și c reprezintă numărul elevilor participanți, determină valoarea lui n .

EVALUARE

3 • FUNCȚII

2. TEST DE EVALUARE

1. Completează spațiul punctat cu răspunsul corect.

a) Mulțimea valorilor funcției $f: [-2, -1, 0, 1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 1$ este egală cu ...

b) Dacă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \text{ este par} \\ 1, & \text{dacă } x \text{ este impar} \end{cases}$, atunci $f(3) = \dots$

c) Punctul de abscisă -1 situat pe graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3 - x$ este ordonat egal cu ...

d) Fie funcția $f: [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1 + x^2$. Dintre punctele $A(0, 1)$, $B(\sqrt{2}, 3)$ și $C(-1, 2)$, nu se află pe graficul funcției f .

e) Unește prin săgeți fiecare număr aflat în coloana A cu răspunsul corespunzător din coloana B.

A B

1. Media seriei de date statistice 5, 3, 2, 4, 8 este egală cu ... 1) 2; 2) 0; 3) 1; 4) 3

2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$. Valoarea lui f pentru care $f(x) = 3$ este egală cu ... 1) 2; 2) 0; 3) 1; 4) 3

3. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x - 4$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2 + 1$. Valoarea sumei n a celor două funcții este egală cu ... 1) 2; 2) 0; 3) 1; 4) 3

4. Punctul de coordonate egale situat pe graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2x + 1$ este egal cu ... 1) 2; 2) 0; 3) 1; 4) 3

5. Algebre literare corespunzătoare răspunsului corect.

A B

1. Amplitudinea seriei de date statistice 5, 3, 2, 4, 8 este egală cu ... 1) 2; 2) 0; 3) 1; 4) 3

2. Domeniul maximal de definiție al funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x+2}{x-2}$ este egal cu ... 1) 2; 2) 0; 3) 1; 4) 3

3. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2 + 1$. Valoarea sumei n a celor două funcții este egală cu ... 1) 2; 2) 0; 3) 1; 4) 3

4. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x - 4$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2 + 1$. Valoarea sumei n a celor două funcții este egală cu ... 1) 2; 2) 0; 3) 1; 4) 3

5. Stind că AB este un segment cu lungimea 10, stind că punctul P este mijlocul segmentului AB , stind că punctul Q este mijlocul segmentului AP , stind că punctul R este mijlocul segmentului PQ , stind că punctul S este mijlocul segmentului RQ , stind că punctul T este mijlocul segmentului RS , stind că punctul U este mijlocul segmentului ST , stind că punctul V este mijlocul segmentului TU , stind că punctul W este mijlocul segmentului UV , stind că punctul X este mijlocul segmentului VW , stind că punctul Y este mijlocul segmentului WX , stind că punctul Z este mijlocul segmentului XY , stind că punctul A este mijlocul segmentului BZ , stind că punctul B este mijlocul segmentului AC , stind că punctul C este mijlocul segmentului BD , stind că punctul D este mijlocul segmentului CE , stind că punctul E este mijlocul segmentului DF , stind că punctul F este mijlocul segmentului EG , stind că punctul G este mijlocul segmentului GH , stind că punctul H este mijlocul segmentului GI , stind că punctul I este mijlocul segmentului HJ , stind că punctul J este mijlocul segmentului IK , stind că punctul K este mijlocul segmentului IL , stind că punctul L este mijlocul segmentului IM , stind că punctul M este mijlocul segmentului IN , stind că punctul N este mijlocul segmentului JO , stind că punctul O este mijlocul segmentului KP , stind că punctul P este mijlocul segmentului LQ , stind că punctul Q este mijlocul segmentului MR , stind că punctul R este mijlocul segmentului NS , stind că punctul S este mijlocul segmentului OT , stind că punctul T este mijlocul segmentului PU , stind că punctul U este mijlocul segmentului RV , stind că punctul V este mijlocul segmentului QT , stind că punctul W este mijlocul segmentului SV , stind că punctul X este mijlocul segmentului TU , stind că punctul Y este mijlocul segmentului WV , stind că punctul Z este mijlocul segmentului XY , stind că punctul A este mijlocul segmentului BZ , stind că punctul B este mijlocul segmentului AC , stind că punctul C este mijlocul segmentului BD , stind că punctul D este mijlocul segmentului CE , stind că punctul E este mijlocul segmentului DF , stind că punctul F este mijlocul segmentului EG , stind că punctul G este mijlocul segmentului GH , stind că punctul H este mijlocul segmentului GI , stind că punctul I este mijlocul segmentului HJ , stind că punctul J este mijlocul segmentului IK , stind că punctul K este mijlocul segmentului IL , stind că punctul L este mijlocul segmentului IM , stind că punctul M este mijlocul segmentului IN , stind că punctul N este mijlocul segmentului JO , stind că punctul O este mijlocul segmentului KP , stind că punctul P este mijlocul segmentului LQ , stind că punctul Q este mijlocul segmentului MR , stind că punctul R este mijlocul segmentului NS , stind că punctul S este mijlocul segmentului OT , stind că punctul T este mijlocul segmentului PU , stind că punctul U este mijlocul segmentului RV , stind că punctul V este mijlocul segmentului QT , stind că punctul W este mijlocul segmentului SV , stind că punctul X este mijlocul segmentului TU , stind că punctul Y este mijlocul segmentului WV , stind că punctul Z este mijlocul segmentului XY , stind că punctul A este mijlocul segmentului BZ , stind că punctul B este mijlocul segmentului AC , stind că punctul C este mijlocul segmentului BD , stind că punctul D este mijlocul segmentului CE , stind că punctul E este mijlocul segmentului DF , stind că punctul F este mijlocul segmentului EG , stind că punctul G este mijlocul segmentului GH , stind că punctul H este mijlocul segmentului GI , stind că punctul I este mijlocul segmentului HJ , stind că punctul J este mijlocul segmentului IK , stind că punctul K este mijlocul segmentului IL , stind că punctul L este mijlocul segmentului IM , stind că punctul M este mijlocul segmentului IN , stind că punctul N este mijlocul segmentului JO , stind că punctul O este mijlocul segmentului KP , stind că punctul P este mijlocul segmentului LQ , stind că punctul Q este mijlocul segmentului MR , stind că punctul R este mijlocul segmentului NS , stind că punctul S este mijlocul segmentului OT , stind că punctul T este mijlocul segmentului PU , stind că punctul U este mijlocul segmentului RV , stind că punctul V este mijlocul segmentului QT , stind că punctul W este mijlocul segmentului SV , stind că punctul X este mijlocul segmentului TU , stind că punctul Y este mijlocul segmentului WV , stind că punctul Z este mijlocul segmentului XY , stind că punctul A este mijlocul segmentului BZ , stind că punctul B este mijlocul segmentului AC , stind că punctul C este mijlocul segmentului BD , stind că punctul D este mijlocul segmentului CE , stind că punctul E este mijlocul segmentului DF , stind că punctul F este mijlocul segmentului EG , stind că punctul G este mijlocul segmentului GH , stind că punctul H este mijlocul segmentului GI , stind că punctul I este mijlocul segmentului HJ , stind că punctul J este mijlocul segmentului IK , stind că punctul K este mijlocul segmentului IL , stind că punctul L este mijlocul segmentului IM , stind că punctul M este mijlocul segmentului IN , stind că punctul N este mijlocul segmentului JO , stind că punctul O este mijlocul segmentului KP , stind că punctul P este mijlocul segmentului LQ , stind că punctul Q este mijlocul segmentului MR , stind că punctul R este mijlocul segmentului NS , stind că punctul S este mijlocul segmentului OT , stind că punctul T este mijlocul segmentului PU , stind că punctul U este mijlocul segmentului RV , stind că punctul V este mijlocul segmentului QT , stind că punctul W este mijlocul segmentului SV , stind că punctul X este mijlocul segmentului TU , stind că punctul Y este mijlocul segmentului WV , stind că punctul Z este mijlocul segmentului XY , stind că punctul A este mijlocul segmentului BZ , stind că punctul B este mijlocul segmentului AC , stind că punctul C este mijlocul segmentului BD , stind că punctul D este mijlocul segmentului CE , stind că punctul E este mijlocul segmentului DF , stind că punctul F este mijlocul segmentului EG , stind că punctul G este mijlocul segmentului GH , stind că punctul H este mijlocul segmentului GI , stind că punctul I este mijlocul segmentului HJ , stind că punctul J este mijlocul segmentului IK , stind că punctul K este mijlocul segmentului IL , stind că punctul L este mijlocul segmentului IM , stind că punctul M este mijlocul segmentului IN , stind că punctul N este mijlocul segmentului JO , stind că punctul O este mijlocul segmentului KP , stind că punctul P este mijlocul segmentului LQ , stind că punctul Q este mijlocul segmentului MR , stind că punctul R este mijlocul segmentului NS , stind că punctul S este mijlocul segmentului OT , stind că punctul T este mijlocul segmentului PU , stind că punctul U este mijlocul segmentului RV , stind că punctul V este mijlocul segmentului QT , stind că punctul W este mijlocul segmentului SV , stind că punctul X este mijlocul segmentului TU , stind că punctul Y este mijlocul segmentului WV , stind că punctul Z este mijlocul segmentului XY , stind că punctul A este mijlocul segmentului BZ , stind că punctul B este mijlocul segmentului AC , stind că punctul C este mijlocul segmentului BD , stind că punctul D este mijlocul segmentului CE , stind că punctul E este mijlocul segmentului DF , stind că punctul F este mijlocul segmentului EG , stind că punctul G este mijlocul segmentului GH , stind că punctul H este mijlocul segmentului GI , stind că punctul I este mijlocul segmentului HJ , stind că punctul J este mijlocul segmentului IK , stind că punctul K este mijlocul segmentului IL , stind că punctul L este mijlocul segmentului IM , stind că punctul M este mijlocul segmentului IN , stind că punctul N este mijlocul segmentului JO , stind că punctul O este mijlocul segmentului KP , stind că punctul P este mijlocul segmentului LQ , stind că punctul Q este mijlocul segmentului MR , stind că punctul R este mijlocul segmentului NS , stind că punctul S este mijlocul segmentului OT , stind că punctul T este mijlocul segmentului PU , stind că punctul U este mijlocul segmentului RV , stind că punctul V este mijlocul segmentului QT , stind că punctul W este mijlocul segmentului SV , stind că punctul X este mijlocul segmentului TU , stind că punctul Y este mijlocul segmentului WV , stind că punctul Z este mijlocul segmentului XY , stind că punctul A este mijlocul segmentului BZ , stind că punctul B este mijlocul segmentului AC , stind că punctul C este mijlocul segmentului BD , stind că punctul D este mijlocul segmentului CE , stind că punctul E este mijlocul segmentului DF , stind că punctul F este mijlocul segmentului EG , stind că punctul G este mijlocul segmentului GH , stind că punctul H este mijlocul segmentului GI , stind că punctul I este mijlocul segmentului HJ , stind că punctul J este mijlocul segmentului IK , stind că punctul K este mijlocul segmentului IL , stind că punctul L este mijlocul segmentului IM , stind că punctul M este mijlocul segmentului IN , stind că punctul N este mijlocul segmentului JO , stind că punctul O este mijlocul segmentului KP , stind că punctul P este mijlocul segmentului LQ , stind că punctul

COMPETENȚE GENERALE ȘI SPECIFICE

1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

- 1.1. Recunoașterea apartenenței unui număr real la o mulțime
- 1.2. Identificarea componentelor unei expresii algebrice
- 1.3. Identificarea unor dependențe funcționale în diferite situații date
- 1.4. Identificarea unor figuri plane sau a unor elemente caracteristice acestora în configurații spațiale date
- 1.5. Identificarea corpurilor geometrice și a elementelor metrice necesare pentru calcularea ariei sau a volumului acestora

2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural cuprinse în diverse surse informaționale

- 2.1. Efectuarea unor operații cu intervale numerice reprezentate pe axa numerelor sau cu mulțimi definite printr-o proprietate a elementelor ei
- 2.2. Aplicarea unor reguli de calcul cu numere reale exprimate prin litere
- 2.3. Descrierea unei dependențe funcționale într-o situație dată, folosind diagrame, tabele sau formule
- 2.4. Reprezentarea, prin desen sau prin modele, a unor configurații spațiale date
- 2.5. Prelucrarea unor date caracteristice ale corpurilor geometrice studiate în vederea calculării unor elemente ale acestora

3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

- 3.1. Utilizarea unor procedee matematice pentru operații cu intervale și rezolvarea inecuațiilor în $\mathbb{R}$
- 3.2. Utilizarea formulelor de calcul prescurtat și a unor algoritmi pentru rezolvarea ecuațiilor și a inecuațiilor
- 3.3. Reprezentarea în diverse moduri a unor funcții cu scopul caracterizării acestora
- 3.4. Folosirea unor proprietăți de paralelism sau perpendicularitate pentru analiza pozițiilor relative ale dreptelor și planelor
- 3.5. Alegerea metodei adecvate pentru calcularea unor caracteristici numerice ale corpurilor geometrice

4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată

- 4.1. Folosirea terminologiei aferente noțiunilor de mulțime, de interval numeric și de inecuații
- 4.2. Exprimarea matematică a unor situații concrete prin calcul algebric
- 4.3. Utilizarea unui limbaj specific pentru formularea unor opinii referitoare la diferite dependențe funcționale
- 4.4. Descrierea în limbaj matematic a elementelor unei configurații geometrice
- 4.5. Utilizarea unor termeni și expresii specifice pentru descrierea proprietăților figurilor și corpurilor geometrice

5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date

- 5.1. Interpretarea unei situații date utilizând intervale și inecuații
- 5.2. Interpretarea unei situații date utilizând calcul algebric
- 5.3. Analizarea unor funcții în context intra și interdisciplinar
- 5.4. Alegerea reprezentărilor geometrice adecvate în vederea descrierii unor configurații spațiale și a calculării unor elemente metrice
- 5.5. Analizarea condițiilor necesare pentru ca o configurație geometrică spațială să verifice anumite cerințe date

6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

- 6.1. Rezolvarea unor situații date, utilizând intervale numerice sau inecuații
- 6.2. Interpretarea matematică a unor probleme practice prin utilizarea ecuațiilor sau a formulelor de calcul prescurtat
- 6.3. Modelarea cu ajutorul funcțiilor a unor fenomene din viața reală
- 6.4. Modelarea unor situații practice în limbaj geometric, utilizând configurații spațiale
- 6.5. Interpretarea informațiilor referitoare la distanțe, arii și volume după modelarea printr-o configurație spațială a unei situații date din cotidian

1. PROBLEME RECAPITULATIVE

- 1 Calculează:
 a) $\sqrt{49} + 2 \cdot \sqrt{25}$; b) $(15 - \sqrt{81}) : (-\sqrt{36})$; c) $\sqrt{5184}$;
 d) $\sqrt{1,7} + \sqrt{0,25}$; e) $\sqrt{17^2 - 15^2} + \sqrt{144}$; f) $\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} - \sqrt{441}$.
- 2 Dacă $A = \{-5; -\sqrt{64}; 0,1(3); \sqrt{7}; -\sqrt{72}; 10\}$, determină $A \cap \mathbb{N}$, $A \cap \mathbb{Z}$ și $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.
- 3 Introdu factorii sub radical: a) $6\sqrt{5}$; b) $-3\sqrt{7}$; c) $\frac{1}{2}\sqrt{72}$; d) $-\frac{2}{3}\sqrt{27}$; e) $x\sqrt{2}, x > 0$.
- 4 Scoate factorii de sub radical: a) $\sqrt{8}$; b) $\sqrt{250}$; c) $-\sqrt{108}$; d) $-2\sqrt{98}$; e) $\sqrt{4a^2}, a < 0$.
- 5 Estimează cu aproximație de o zecime prin lipsă lungimea diagonalei unui pătrat cu latura de 2 cm.
- 6 Determină cardinalul mulțimii $M = \{n \in \mathbb{N} \mid \sqrt{31 - 2n} \in \mathbb{Q}\}$.
- 7 Compară numerele:
 a) $x = \sqrt{15}, y = 4$; b) $x = -\sqrt{19}, y = -3\sqrt{2}$; c) $x = 3\sqrt{11}, y = 7\sqrt{2}$; d) $x = 3 - \sqrt{2}, y = \sqrt{2}$.
- 8 Raționalizează numitorii: a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$; b) $\frac{-10}{\sqrt{2}}$; c) $\frac{6}{5\sqrt{3}}$; d) $\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$; e) $\frac{4}{\sqrt{80}}$.
- 9 Dacă $E(x) = 3x - 1$, demonstrează că $E(\sqrt{8}) - 2E(\sqrt{2}) \in \mathbb{Q}$.
- 10 Calculează: a) $\sqrt{7} - |1 - \sqrt{7}|$; b) $2\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} - \sqrt{20}$.
- 11 Efectuează: a) $2\sqrt{7} + \sqrt{63}$; b) $5\sqrt{8} - 2(1 + 4\sqrt{2})$;
 c) $5(\sqrt{2} - \sqrt{3}) - 2(2\sqrt{2} - 3\sqrt{3})$; d) $(\sqrt{3} + 1)\sqrt{6} - 3(\sqrt{2} - 2)$.
- 12 Calculează: a) $\sqrt{2}(2 + \sqrt{2}) - \frac{4}{\sqrt{2}}$; b) $(\sqrt{2} + 1)(2 + \sqrt{2}) - \sqrt{18}$;
 c) $\left(\sqrt{5} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) : \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{-1}$; d) $\left(\frac{2}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{8}}\right) : \sqrt{72}^{-1}$.
- 13 Dacă $a = 6 + 2\sqrt{5} - 2\sqrt{(\sqrt{5} - 3)^2}$ și $b = \left(\sqrt{7} + \frac{2}{\sqrt{7}}\right) \cdot 3\sqrt{7} - \left(3\sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \cdot \sqrt{3}$, demonstrează că $b = a\sqrt{5}$.
- 14 Demonstrează că următoarele numere sunt numere raționale:
 a) $(\sqrt{48} + 5\sqrt{27} - 3\sqrt{147}) : \sqrt{3}$; b) $\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{15}} + \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{\sqrt{35}} + \frac{\sqrt{9} - \sqrt{7}}{\sqrt{63}}$.
- 15 Determină numerele raționale a și b , știind că $\sqrt{3}(a + b\sqrt{3}) - 5 = 2\sqrt{12}$.
- 16 Determină numerele naturale x care verifică: a) $\sqrt{8} - 2\sqrt{32} + 3\sqrt{50} = 9\sqrt{x}$; b) $\frac{30}{\sqrt{x}} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.
- 17 Calculează media aritmetică și media geometrică ale numerelor:
 a) $x = 18; y = 4$; b) $x = 2\sqrt{3}; y = 6\sqrt{3}$; c) $x = 3 + \sqrt{5}; y = |\sqrt{5} - 3|$.
- 18 Calculează media aritmetică ponderată a numerelor 2 și 5 cu ponderile 3, respectiv 4.
- 19 Rezolvă în mulțimea numerelor reale următoarele ecuații:
 a) $2x - 5 = 1$; b) $11 - 3x = -10$; c) $\frac{x}{2} - x = 3$;
 d) $x^2 = 7$; e) $|x - 2| = 5$; f) $x(1 + \sqrt{2}) = 8 + x$.
- 20 Determină valoarea lui m pentru care următoarele ecuații sunt echivalente:
 $5(2x + 1) - 3(3x + 2) = 2$ și $x(m + 1) - 4m = x^2$.
- 21 Găsește valoarea numărului real a , știind că perechea $(2, 5)$ este soluție a ecuației $ax + y = 7$.

22 Rezolvă sistemele următoare:

a) $\begin{cases} x + y = 4 \\ 3x - 2y = 7 \end{cases};$

b) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases};$

c) $\begin{cases} x\sqrt{2} + y\sqrt{3} = 7 \\ x\sqrt{3} + 2y\sqrt{2} = 4\sqrt{6} \end{cases}.$

23 Găsește perechea de numere reale (a, b) , știind că $(-1, 1)$ este soluție a sistemului $\begin{cases} ax + by = 1 \\ bx + 2ay = 1 \end{cases}$.

24 Suma a șapte numere naturale consecutive este 77. Determină numărul din mijloc.

25 Într-un bloc sunt apartamente cu două și cu trei camere, în total 20 de apartamente și 49 de camere.

a) Justifică dacă este posibil să fie 10 apartamente cu trei camere.

b) Calculează numărul apartamentelor cu două camere.

26 Calculează lungimea segmentului AB , având drept capete punctele $A(-1, 1)$ și $B(2, 5)$.

27 Demonstrează că punctele $A(1, 9)$, $B(-1, 5)$ și $C(0, 7)$ sunt coliniare.

28 Fie ABC un triunghi isoscel având $AB = AC = 17$ cm și $BC = 16$ cm.

a) Calculează lungimea înălțimii din A .

b) Demonstrează că $\sin B < 0,9$.

29 Fie $ABCD$ un dreptunghi având perimetrul de 20 cm și punctele M, N pe latura AD cu $AM = MN = ND = 2$ cm.

a) Determină măsura unghiului BND .

b) Demonstrează că $BMNC$ este trapez isoscel cu diagonalele perpendiculare.

30 Fie $ABCD$ pătrat cu $S_{ABCD} = 36$ cm², M este mijlocul lui AB și $DM \cap AC = \{P\}$.

a) Calculează aria triunghiului MAD .

b) Determină lungimea segmentului AP .

31 Se consideră romb $ABCD$ având $AB = 12$ cm, $\angle B = 5\angle A$, iar $BM \perp AD$, $DN \perp BC$, cu $M \in AD$, $N \in BC$.

a) Demonstrează că $BM = 6$ cm.

b) Calculează aria rombului.

c) Justifică că punctele M, O, N sunt coliniare, unde $\{O\} = AC \cap BD$.

32 În figura 1, $ABCD$ este un trapez dreptunghic, $AB \parallel CD$, $\angle A = \angle D = 90^\circ$, în care $DC = 4$ cm, $BC = 20$ cm și $\sin B = 0,6$. Notăm $AD \cap BC = \{M\}$.

a) Determină lungimea liniei mijlocii a trapezului.

b) Calculează aria triunghiului BCD .

c) Determină lungimea segmentului MD .

33 În figura 2, $ABCD$ este un paralelogram având $\angle B = 2\angle A$. Prelungim latura AB cu $BM = BC$, iar $NM \perp AM$, $NM \cap BC = \{N\}$.

a) Demonstrează că triunghiul BMC este echilateral.

b) Arată că drepte AC și DN sunt paralele.

34 Fie $ABCD$ un trapez având $AB \parallel CD$, $AB = 20$ cm, $CD = 15$ cm, $BC = 14$ cm.

Notăm $AC \cap BD = \{O\}$ și construim $OM \parallel BC$, unde $M \in AB$.

a) Determină valoarea raportului $\frac{AO}{AC}$.

b) Arată că $OM = 8$ cm.

c) Stabilește ce procent din aria triunghiului AOB reprezintă aria triunghiului DOC .

35 Se consideră un triunghi isoscel ABC având baza $BC = 6$ cm și $AB = 9$ cm. Punctul M aparține laturii AC astfel încât $BC = BM$.

a) Justifică asemănarea triunghiurilor BMC și ABC .

b) Calculează perimetrul triunghiului ABM .

36 În figura 3, $ABCDEF$ este un hexagon regulat înscris într-un cerc de centru O și raza de 12 cm. Calculează:

a) lungimea cercului;

b) măsura unghiului ACD ;

c) aria triunghiului AEC .

37 Fie $ABCD$ un dreptunghi având $AB = 6$ cm și $AC = 4\sqrt{3}$ cm. Perpendiculara din D pe AC intersectează latura AB în punctul N și diagonala AC în punctul M .

a) Determină lungimea segmentului DM .

b) Calculează valoarea raportului $\frac{AN}{NB}$.

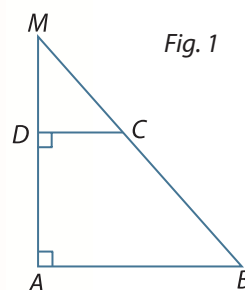


Fig. 1

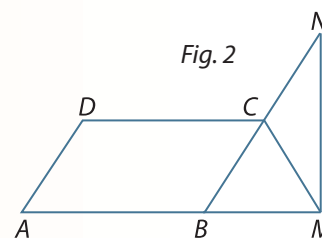


Fig. 2

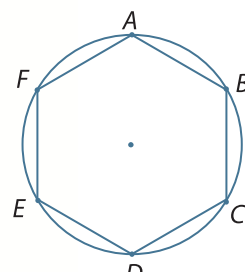


Fig. 3

2. TESTE DE EVALUARE ÎNȚĂLĂ

Test de evaluare inițială – algebră

Timp de lucru: 45 de minute.

I. Completează spațiile punctate, astfel încât să obții afirmații adevărate.

20 de puncte

- (5p) 1. Rezultatul calculului $2(\sqrt{3}-1)-\sqrt{12}$ este egal cu ...
- (5p) 2. Soluția ecuației $\frac{x}{2}-\frac{x-1}{3}=\frac{5}{6}$ este numărul ...
- (5p) 3. Dacă $A(1, 2)$ și $B(-2, 6)$, atunci lungimea segmentului AB este ...
- (5p) 4. Numărul natural n pentru care $\sqrt{5n}=2\sqrt{10}$ este ...

II. Unește prin săgeți fiecare enunț aflat în coloana A cu rezultatul corespunzător din coloana B.

20 de puncte

- | | A | B |
|---------|--|--------|
| (5p) 1. | Media geometrică a numerelor $a = 6 + \sqrt{27}$ și $b = 5(2 - \sqrt{3}) + 2(\sqrt{3} - 2)$ este numărul ... | a) 5; |
| (5p) 2. | Dacă $A = \{\sqrt{1}; \sqrt{3}; \sqrt{5}; \dots; \sqrt{49}\}$, atunci $\text{card}(A \cap \mathbb{Q})$ este egal cu ... | b) 7; |
| (5p) 3. | Valoarea lui m pentru care $(1, -3)$ este soluție a sistemului $\begin{cases} 3x+2y=-3 \\ mx-y=2 \end{cases}$ este ... | c) 3; |
| (5p) 4. | Numărul de numere întregi cuprinse între $-\sqrt{2}$ și $2\sqrt{3}$ este egal cu ... | d) 4; |
| | | e) -1. |

III. Alege litera corespunzătoare răspunsului corect.

20 de puncte

- (5p) 1. Ordinea crescătoare a numerelor $x = 2\sqrt{5}$, $y = \sqrt{19}$ și $z = 3\sqrt{2}$ este:
A. x, y, z ; **B.** y, z, x ; **C.** z, x, y ; **D.** z, y, x .
- (5p) 2. Dacă m și n sunt numere reale astfel încât $3m - n = 4$ și $m + 2n = 6$, atunci $2m + n$ este egal cu:
A. 6; **B.** 7; **C.** 8; **D.** 5.
- (5p) 3. Valoarea lui a pentru care ecuațiile $5x - 3(2x - 1) = 1$ și $a(x - 1) + x^2 = 3$ sunt echivalente este:
A. 1; **B.** -1; **C.** 2; **D.** 0.
- (5p) 4. În tabelul de mai jos este reprezentată o dependență funcțională:

x	-1	1	a
$y = 3x + 1$	-2	4	10

Valoarea lui a este:

- A.** 2; **B.** 5; **C.** 3; **D.** 0.

La subiectele IV și V scrie rezolvările complete.

- IV. Se consideră numerele $x = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{27}}\right) : 0, (5)$ și $y = \left(\sqrt{6} : \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} - \frac{3}{\sqrt{3}}\right) \cdot \sqrt{3} + 5$. **15 puncte**

- (5p) a) Demonstrează că $x = \sqrt{3}$.
- (5p) b) Stabilește dacă $\sqrt{(x-1) \cdot y} \in \mathbb{N}$.
- (5p) c) Determină numărul întreg n pentru care $n < y < n + 1$.
- V. La o florărie sunt 84 de flori, lalele și trandafiri, grupate în buchete. Numărul buchetelor de câte cinci trandafiri coincide cu numărul buchetelor de câte șapte lalele. **15 puncte**
- (5p) a) Justifică dacă pot fi exact 40 de trandafiri la florărie.
- (5p) b) Stabilește câte lalele sunt la florărie.
- (5p) c) Determină ce sumă s-a obținut din vânzarea tuturor florilor, dacă prețul unui buchet de trandafiri este de 40 de lei și cel al unui buchet de lalele de 35 de lei.

Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota se obține împărțind punctajul final la 10.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4	IV.a	IV.b	IV.c	V.a	V.b	V.c
Punctajul																		
Nota																		

Test de evaluare inițială – geometrie

Timp de lucru: 45 de minute.

I. Completează spațiile punctate, astfel încât să obții afirmații adevărate. 20 de puncte

- (5p) 1. Un cerc are raza de 6 cm. Lungimea cercului este egală cu ... cm.
 (5p) 2. Rombul $ABCD$ are măsura $\angle BAC = 30^\circ$. Măsura unghiului ABC este ... °.
 (5p) 3. Lungimea unei baze a unui trapez este de 12 cm, iar lungimea liniei mijlocii este de 10 cm. Lungimea celeilalte baze este egală cu ... cm.
 (5p) 4. Calculând $8 \cos 60^\circ \sin 30^\circ$, vei obține ...

II. Unește prin săgeți fiecare enunț aflat în coloana A cu rezultatul corespunzător din coloana B. 20 de puncte

- | | A | B |
|------|---|------------------|
| (5p) | 1. Perimetrul unui triunghi echilateral este $12\sqrt{3}$ cm. Lungimea înălțimii triunghiului este egală cu ... cm. | a) 12;
b) 18; |
| (5p) | 2. Dacă $\triangle ABC \sim \triangle MNP$, $AB = 12$ cm, $AC = 16$ cm, $MN = 9$ cm, atunci $MP = ...$ cm. | c) 9; |
| (5p) | 3. Perimetrul hexagonului regulat înscris într-un cerc cu aria de 9π cm ² este egal cu ... cm. | d) 6; |
| (5p) | 4. În $\triangle ABC$ cunoaștem: $\angle A = 90^\circ$, $BC = 15$ cm și $\sin B = 0,6$. Lungimea laturii AC este de ... cm. | e) 8. |

III. Alege litera corespunzătoare răspunsului corect. 20 de puncte

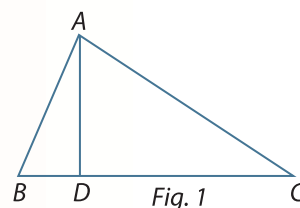
- (5p) 1. Punctele A, B se află pe cercul de centru O astfel încât $\angle AOB = 60^\circ$. Dacă M este un punct pe arcul mare AB , atunci $\angle AMB$ are măsura:
 A. 60° ; B. 30° ; C. 120° ; D. 220° .
 (5p) 2. În triunghiul isoscel ABC , $AB = AC = 12$ cm și $\angle B = 75^\circ$. Distanța de la B la AC este egală cu:
 A. 12 cm; B. 18 cm; C. 6 cm; D. $6\sqrt{2}$ cm.
 (5p) 3. Într-un pătrat, aria și lungimea unei diagonale se exprimă prin același număr real. Perimetrul pătratului este egal cu:
 A. $\sqrt{2}$; B. 4; C. 2; D. $4\sqrt{2}$.
 (5p) 4. Pe laturile AB și AC ale triunghiului ABC se consideră punctele P , respectiv Q astfel încât $PQ \parallel BC$, $AB = 16$ cm, $AP = 12$ cm și $QC = 3$ cm. Lungimea laturii AC este egală cu:
 A. 9 cm; B. 12 cm; C. 8 cm; D. 18 cm.

La subiectele IV și V scrie rezolvările complete.

- IV. În figura 1 este reprezentat triunghiul dreptunghic ABC având ipotenuza $BC = 12$ cm. Punctul D este proiecția ortogonală a punctului A pe BC , iar $DC = 2BD$.

15 puncte

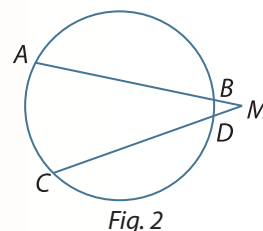
- (5p) a) Demonstrează că $BD = 4$ cm.
 (5p) b) Determină lungimea segmentului AD .
 (5p) c) Determină $\cos C$.



- V. În figura 2, AB și CD sunt două coarde ale unui cerc, iar M este intersecția dreptelor AB și CD . Se știe că $AB = 18$ cm, $MB = 6$ cm, $MD = 8$ cm și $\angle BAC = 80^\circ$.

15 puncte

- (5p) a) Demonstrează că $\angle CDB = 100^\circ$.
 (5p) b) Justifică asemănarea triunghiurilor MDB și MAC .
 (5p) c) Determină lungimea coardei CD .



Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota se obține împărțind punctajul final la 10.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4	IV.a	IV.b	IV.c	V.a	V.b	V.c
Punctajul																		
Nota																		

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE 1

INTERVALE DE NUMERE REALE. INECUAȚII ÎN $\mathbb{R}$

- L1. Mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor lor
- L2. Intervale numerice și reprezentarea lor pe axa numerelor; intersecția și reuniunea intervalelor
- L3. Inecuații de forma $ax + b \geq 0$ ($\leq, <, >$), unde $a, b \in \mathbb{R}$
- L4. Probleme care se rezolvă cu ajutorul inecuațiilor

Recapitulare și evaluare

- 1. Probleme recapitulative
- 2. Test de evaluare

Introducere

Un concept semnificativ pentru matematica modernă este cel de **mulțime**, care ocupă o poziție-cheie la intersecția subdomeniilor tradiționale ale matematicii. În pofida faptului că mulțimile erau folosite implicit încă de la Aristotel, ca un concept elementar, teoria mulțimilor a apărut și s-a dezvoltat abia spre finalul secolului al XIX-lea, la inițiativa matematicianului german **Georg Cantor** (1845-1918).

Inecuațiile modelează situații întâlnite în viața cotidiană sau în diverse ramuri ale științelor.

LECTIA 1 Mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor lor



Ne amintim

- ♦ În matematică, o **mulțime** constituie o colecție bine definită de obiecte diferite, numite **elementele** mulțimii. Mulțimea care nu are niciun element se numește **mulțimea vidă** ($\emptyset$).
- ♦ Dacă elementele unei mulțimi sunt numere, atunci spunem că este o **mulțime numerică**. Mulțimile numerice studiate până acum sunt $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ și submulțimile lor.
- ♦ O mulțime poate fi definită fie sintetic, prin **enumerarea elementelor** sale între acolade, fie prin intermediul unei **diagramme Venn-Euler**.
- ♦ **Cardinalul** unei mulțimi finite este numărul elementelor acelei mulțimi.

EXAMPLE:

$$2 \in \mathbb{N}; -3 \notin \mathbb{N}; -3 \in \mathbb{Z};$$

$$\frac{3}{5} \in \mathbb{Q}; \frac{14}{3} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z};$$

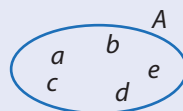
$$\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; 1 - \sqrt{5} \notin \mathbb{Q};$$

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

$$A = \{a; b; c; d; e\}$$



Rezolvăm împreună

- 1 Scrie, prin enumerarea elementelor, următoarele mulțimi:
 - a) mulțimea tuturor literelor din cuvântul „matematica”;
 - b) mulțimea tuturor pătratelor perfecte mai mici decât 50;
 - c) mulțimea perechilor ordonate de numere naturale care au suma 7.

Rezolvare:

- a) Observăm că în cuvântul „matematica” există litere care se repetă; vom avea grijă să menționăm aceste litere o singură dată în mulțime. Mulțimea cerută este $\{m, a, t, e, i, c\}$.
- b) Prin calcul, avem $0^2 = 0$, $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, $5^2 = 25$, $6^2 = 36$, $7^2 = 49$ și $8^2 = 64 > 50$. Așadar, mulțimea căutată este $\{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49\}$.
- c) Căutăm perechile ordonate de forma (a, b) cu a și b numere naturale și $a + b = 7$. Obținem mulțimea: $\{(0, 7), (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1), (7, 0)\}$.

- 2 Dintre mulțimile descrise mai jos, alege și motivează care mulțime poate fi definită prin enumerarea elementelor sale:

- a) mulțimea manualelor școlare pe care le folosești în clasa a opta;
- b) mulțimea cărților școlare pe care le folosești în clasa a opta;
- c) mulțimea titlurilor aflate la vânzare în toate librăriile din România.

Rezolvare:

- a) Mulțimea titlurilor manualelor școlare folosite în clasa a opta are un număr relativ mic de elemente, prin urmare acestea pot fi scrise prin enumerare.



b) În plus, față de manualele școlare identificate la subpunctul anterior, mulțimea cărților școlare folosite în clasa a opta mai poate cuprinde auxiliare, dicționare, cărți de literatură recomandate de profesori, enciclopedii etc. Scrierea acestora prin enumerare este, încă, posibilă, deși procesul necesită timp (și efort) mai mare.

c) Deși, teoretic, este posibilă, scrierea prin enumerare a tuturor titlurilor ce se află la vânzare în toate librăriile din România este impracticabilă. Acest lucru este cauzat atât de numărul foarte mare de elemente ale acestei mulțimi, cât și de dificultatea crescută în a identifica, corect și complet, aceste elemente. Prin urmare, nu este recomandat ca această mulțime să fie definită prin enumerarea elementelor sale.

Observăm și descoperim cunoștințe noi

Pentru mulțimile cu un număr mare de elemente și, mai ales, pentru mulțimile infinite, este recomandabil și, de cele mai multe ori, mai eficient să identificăm și să indicăm o formă comună a tuturor elementelor din mulțimea respectivă.

Reține!

- ♦ O mulțime M poate fi definită (scrisă, descrisă) analitic, indicând o **proprietate p , caracteristică elementelor** mulțimii. În acest sens, scriem:

$$M = \{x \mid x \text{ are proprietatea } p\}$$

și citim: M este mulțimea tuturor elementelor x care au proprietatea p .

- ♦ Este posibil ca elementele unei mulțimi să aibă două sau mai multe proprietăți caracteristice; în acest caz, mulțimea se definește precizând **toate** proprietățile comune ale elementelor sale, separate prin virgulă sau prin conjuncția „și”.
- ♦ Dacă elementele unei mulțimi au mai multe proprietăți caracteristice, este posibil, pentru simplificarea scrierii și pentru claritate, să fie menționată una dintre aceste proprietăți **înainte** de bara verticală.

Portofoliu

Adaugă la portofoliul personal modurile de definire a unei mulțimi însoțite de exemple proprii.

Aplicăm cunoștințele

- 1** Scrie, prin precizarea unei (unor) proprietăți caracteristice, următoarele mulțimi:

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\};$$

$$B = \{0, 10, 20, 30, 40, 50, \dots\};$$

$$C = \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ 8 & 16 & 32 & 64 \end{matrix} \right\}.$$

Rezolvare:

Pentru fiecare dintre mulțimile date putem preciza proprietățile caracteristice în mai multe moduri. Spre exemplu:

$$A = \{c \mid c \text{ este cifră în baza } 10\} \text{ sau } A = \{c \mid c \in \mathbb{N} \text{ și } c \leq 9\} \text{ sau } A = \{c \in \mathbb{N} \mid c < 10\};$$

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } x : 10\} \text{ sau } B = \{x \in \mathbb{N} \mid x : 10\} \text{ sau } B = \{10n \mid n \in \mathbb{N}\};$$

$$C = \{y \mid y = 2^n, n \in \mathbb{N} \text{ și } n \leq 6\} \text{ sau } C = \{2^n \mid n \in \mathbb{N} \text{ și } n \leq 6\}.$$

- 2** Considerăm mulțimile: $A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n < 6\}$, $B = \{x \mid x = 2^a \text{ și } a \in A\}$ și $C = \{5k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

a) Scrie, prin enumerarea elementelor, mulțimile A și B .

b) Arată că mulțimile B și C sunt disjuncte.

Rezolvare:

a) Mulțimea A conține toate numerele naturale nenule mai mici decât 6; prin urmare, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Pentru a afla elementele mulțimii B , este necesar să calculăm toate puterile de forma 2^a , cu a element al mulțimii A ; așadar $B = \{2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5\}$, adică $B = \{2, 4, 8, 16, 32\}$.

b) Observăm că mulțimea C conține toți multiplii naturali ai lui 5, deci $C = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, \dots\}$. Reamintim că două mulțimi sunt disjuncte atunci când intersecția lor este vidă, adică cele două mulțimi nu au niciun element comun. Remarcăm cu ușurință că niciun element al mulțimii B nu este multiplu de 5, prin urmare $B \cap C = \emptyset$, adică mulțimile B și C sunt disjuncte.

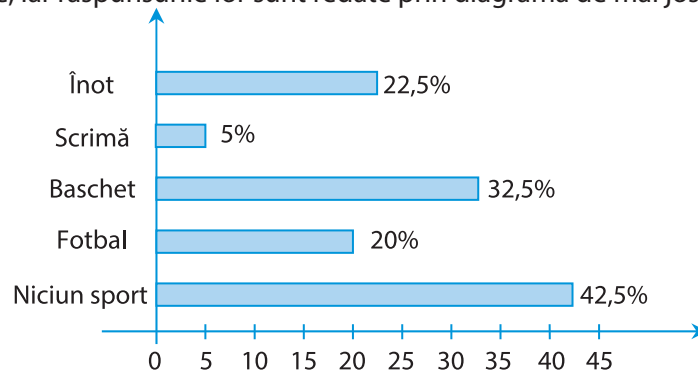


Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

- 1** Elimină „intrusul” din cutia de mai jos și apoi scrie, cu ajutorul unei proprietăți comune, mulțimea obținută.



- 2** Cei 120 de elevi ai claselor a opta dintr-o școală au fost întrebați cu privire la activitățile sportive pe care le practică cu regularitate, iar răspunsurile lor sunt redată prin diagrama de mai jos.



Scrie, prin enumerarea elementelor, mulțimile următoare:

$A = \{s \mid s - \text{sport practicat de cel mult 30 de elevi}\};$ $B = \{s \mid s - \text{sport practicat de cel puțin 20 de elevi}\}.$

- 3** **Lucru în echipe:** Împreună cu colegul de bancă, rezolvați următorul exercițiu și analizați rezultatele găsite.

Scrie, prin enumerarea elementelor, următoarele mulțimi:

$A = \{c \mid c \text{ este consoană în cuvântul „ornitorinc”}\};$ $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x : 3 \text{ și } x \leq 21\};$

$C = \{p \mid p \text{ este număr prim cuprins între 12 și 40}\};$ $D = \{x \mid x \in \mathbb{N}^* \text{ și } 2^x < 16\}.$

- 4** Scrie următoarele mulțimi indicând o proprietate comună a elementelor lor:

- a)** mulțimea numerelor naturale pare;
- b)** mulțimea pătratelor perfecte de cel mult trei cifre;
- c)** mulțimea numerelor reale mai mici decât modulul lor;
- d)** mulțimea numerelor naturale care dau restul 5 prin împărțire la 7.

- 5** Stabilește valoarea de adevăr pentru fiecare dintre propozițiile următoare:

$P_1: \frac{2}{3} \in \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 1\};$ $P_2: \sqrt{5} \notin \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\};$ $P_3: -3 \in \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| = 3\};$ $P_4: 7 \in \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}.$

- 6** Asociază elementele de pe cele două coloane pentru a obține mulțimi egale:

A

- a)** $\{x \in \mathbb{N}^* \mid x : 8 \text{ și } x \leq 8\};$
- b)** $\{3^n \mid n \in \mathbb{N} \text{ și } n \leq 3\};$
- c)** $\{x \in \mathbb{N}^* \mid x \text{ divide } 8\};$
- d)** $\{n^3 \mid n \in \mathbb{N} \text{ și } n \leq 3\}.$

B

- 1.** $\{1, 3, 9, 27\};$
- 2.** $\{1, 2, 4, 8\};$
- 3.** $\{8\};$
- 4.** $\{0, 1, 8, 27\};$
- 5.** $\{1, 2, 4, 8, 27\};$
- 6.** $\{0, 8\}.$



7 Fie mulțimile $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{2, 4, 6\}$. Scrie, prin enumerarea elementelor, mulțimea $F = \left\{ \frac{b}{a} \mid a \in A \text{ și } b \in B \right\}$ și apoi determină $\text{card } F$.

8 Determină cardinalul fiecăreia dintre următoarele mulțimi:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 100\};$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 10\};$$

$$C = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \mid \text{fracția } \frac{17}{n} \text{ este supraunitară} \right\};$$

$$D = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid n \leq 10 \text{ și fracția } \frac{n}{18} \text{ este ireductibilă} \right\}.$$

9 Fie mulțimea $M = \left\{ -2, (3); -\sqrt{5}; -\sqrt{1, (7)}; 0; \frac{9}{3}; \pi - 4; \frac{\sqrt{75}}{3}; \frac{12}{14}; 1 - \sqrt{3} \right\}$. Scrie, prin enumerarea elementelor, următoarele mulțimi: $A = \{x \in M \mid x \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x \in M \mid x \in \mathbb{Q}\}$, $C = \{x \in M \mid x \notin \mathbb{Q}\}$, $D = \{x \in M \mid x < 0\}$.

10 Considerăm mulțimea $M = \{x \mid x = 3n + 2, n \in \mathbb{N}\}$.

a) Scrie trei elemente ale mulțimii M .

b) Stabilește dacă 100, 251 și 330 aparțin mulțimii M .

c) Determină cel mai mare număr natural de trei cifre care aparține mulțimii M .

11 Determină elementele fiecăreia dintre următoarele mulțimi:

$$A = \{a \mid a \text{ cifră în baza 10 și } \overline{34a} : 6\};$$

$$B = \{(a, b) \mid a, b \text{ cifre în baza 10 și } \overline{1ab} : 15\};$$

$$C = \{\overline{ab} \mid a, b \text{ cifre nenule în baza 10 și } \overline{ab} = 2 \cdot \overline{ba}\}.$$

12 Determină elementele fiecăreia dintre următoarele mulțimi:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \frac{6}{x} \in \mathbb{N} \right\}; \quad B = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{6}{1-x} \in \mathbb{N} \right\}; \quad C = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \frac{12}{2x-1} \in \mathbb{Z} \right\}; \quad D = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{3x+10}{x+2} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Din oficiu: 1 punct

AUTOEVALUARE

Timp de lucru: 40 de minute

1 Scrie fiecare dintre mulțimile de mai jos cu ajutorul unei proprietăți comune a elementelor ei. **2 puncte**

$$A = \{-1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6\};$$

$$B = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{20} \right\};$$

$$C = \{1, 27, 81, 9\}.$$

2 Scrie fiecare dintre mulțimile de mai jos prin enumerarea elementelor ei:

2 puncte

$$A = \{a \in \mathbb{N} \mid 1 \leq \sqrt{a} < 3\};$$

$$B = \{b \in \mathbb{Z} \mid 30 < b^2 \leq 100\};$$

$$C = \left\{ c \mid c - \text{cifră în baza 10 și } \frac{\overline{18c}}{4} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} \right\};$$

$$D = \{d \in \mathbb{N} \mid 2^{d+4} < 8^4 \text{ și } d \not\equiv 2\}.$$

La problemele 3, 4 și 5, alege litera corespunzătoare răspunsului corect.

3 Cardinalul mulțimii $\{p \in \mathbb{N} \mid p \leq 30 \text{ și } p \text{ este număr prim}\}$ este egal cu:

1 punct

a) 8;

b) 10;

c) 14;

d) 30.

4 Suma elementelor mulțimii $\left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{5x-13}{x+1} \in \mathbb{Z} \right\}$ este egală cu:

2 puncte

a) -12;

b) 0;

c) 12;

d) 18.

5 Se consideră mulțimile $M = \{5n - 2 \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ și $N = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$. Afirmatia „ $M \cap N = \emptyset$ ” este:

2 puncte

a) adevărată;

b) falsă.

Justifică răspunsul tău.



LECȚIA 2

Intervale numerice și reprezentarea lor pe axa numerelor;
intersecția și reuniunea intervalelor

În viața cotidiană suntem deseori puși în situația de a folosi date numerice care nu pot fi exprimate cu ajutorul noțiunilor învățate până acum (prin intermediul mulțimilor). De pildă, pentru a gestiona eficient timpul între momentul în care ne trezim și momentul în care mergem din nou la somn, este util să estimăm cât mai exact durata activităților obligatorii, cât timp trebuie să alocăm diferitelor sarcini, în funcție de priorități și de resursele de care dispunem. Folosim, pentru aceasta, **intervale** de timp de pe parcursul zilei.

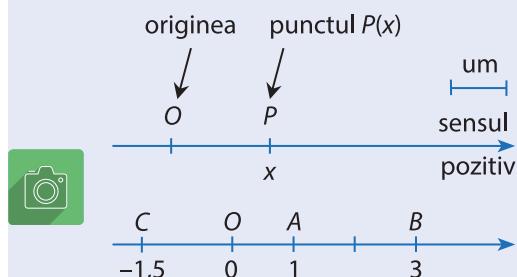
Alte exemple de utilizare a conceptului de „interval”, esențial pentru a organiza și analiza eficient informațiile, sunt intervalele standardelor de evaluare a performanței (la muncă sau pe plan academic), intervalele de temperatură măsurată pe parcursul unei luni calendaristice, intervalele aferente unui buget personal, intervalele de concediu/vacanță, intervalele de acces într-o instituție, intervalul de zbor în care un avion are permisiune de decolare sau de aterizare și lista poate continua cu nenumărate alte exemplificări.



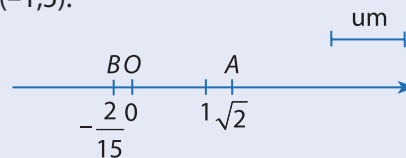
Ne amintim

- ♦ **Axa numerelor** (sau **axa reală**) reprezintă o dreaptă pe care am fixat un punct O (originea), un sens pozitiv și o unitate de măsură.
- ♦ Oricărui număr real x îi corespunde un unic punct P pe axa numerelor și reciproc; în acest caz scriem $P(x)$ și citim „punctul P de coordonată x ”.
- ♦ De regulă, folosim aproximări ale numerelor reale pentru reprezentarea punctelor corespunzătoare pe axa numerelor, dacă situația o impune (de exemplu, pentru numere iraționale sau pentru unele numere raționale).
- ♦ Mulțimea numerelor reale ($\mathbb{R}$) se identifică cu axa numerelor și spunem că această axă este **reprezentarea geometrică** a mulțimii $\mathbb{R}$.

EXEMPLE:



Identificăm pe axa reală punctele: $O(0)$, $A(1)$, $B(3)$, $C(-1,5)$.



Folosind aproximarea $\sqrt{2} \approx 1,4$, am poziționat punctul $A(\sqrt{2})$ între reprezentările corespunzătoare numerelor reale 1 și 1,5. Similar, $B\left(-\frac{2}{15}\right)$ a fost poziționat între $-\frac{1}{3}$ și 0.



Rezolvăm împreună

1 Reprezintă pe axa numerelor elementele mulțimilor de mai jos:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x + 1 = 4\};$

b) $B = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{2}{x} \in \mathbb{N}\right\};$

c) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 < x \leq 8\}.$

Rezolvare:

a) Rezolvăm întâi ecuația: $2x + 1 = 4 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$. Prin urmare,

$A = \left\{\frac{3}{2}\right\}$ și avem de reprezentat pe axa reală punctul $P\left(\frac{3}{2}\right)$.

Alegem convenabil unitatea de măsură, marcăm punctele corespunzătoare pentru 1 um și 2 um și la jumătatea distanței dintre aceste două puncte se află punctul $P\left(\frac{3}{2}\right)$.

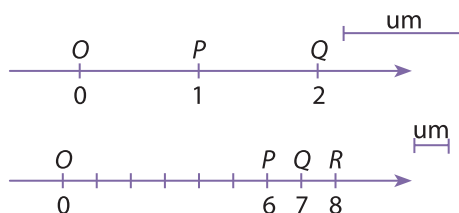


b) Determinăm întâi mulțimea, impunând condiția $\frac{2}{x} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x \in \{1, 2\}$.

Așadar, $B = \{1, 2\}$ și avem de reprezentat două puncte: $P(1)$ și $Q(2)$.

c) Rescriem mulțimea C prin enumerarea elementelor: $C = \{6, 7, 8\}$ și reprezentăm pe axa reală cele trei puncte corespunzătoare: $P(6)$, $Q(7)$ și $R(8)$.

Remarcăm importanța alegerii eficiente a unei unități de măsură pentru numerele reale pe care trebuie să le reprezentăm pe axă.



2 Realizează pe axa reală un desen sugestiv pentru a ilustra elementele mulțimii $I = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$.

Rezolvare:

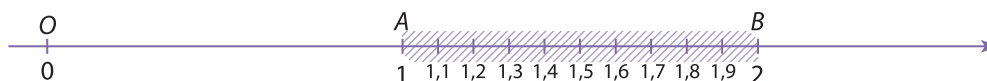
Observăm imediat că mulțimea I nu poate fi scrisă prin enumerarea tuturor elementelor sale; totuși putem preciza cel mai mic element al său (1) și cel mai mare element al său (2). Pentru început vom reprezenta pe axa reală punctele $A(1)$ și $B(2)$, corespunzătoare acestor două valori:



Alte numere reale care aparțin mulțimii I sunt $1,1; 1,2; 1,3; \dots; 1,9$ și marcăm și cele nouă puncte aferente acestor valori:



Realizăm că între punctele deja desenate se mai află o infinitate de alte puncte, toate corespunzătoare elementelor lui I ; de fapt **toate** punctele de pe axa reală situate între A și B corespund elementelor mulțimii I , motiv pentru care vom hașura această porțiune a axei reale:



Din punct de vedere geometric, porțiunea evidențiată pe axa numerelor este un segment închis, având capetele A și B .

Observăm și descoperim cunoștințe noi

Submulțimile mulțimii numerelor reale, care conțin o infinitate de numere reale ce nu pot fi scrise prin enumerare, impun necesitatea unor notații sugestive pentru a putea fi utilizate în probleme într-un mod precis și eficient.

Notarea și definirea acestora sunt strâns legate de reprezentarea numerelor reale pe axa numerică, prin analogie cu noțiunile geometrice: *segment*, *semidreaptă* și *dreaptă*.

Intervale mărginite

Mulțimea tuturor numerelor reale cuprinse între două numere reale date se numește **interval mărginit** de numere reale.

Cele două numere date se numesc **capetele** sau **extremitățile intervalului**.

Intervalul mărginit se notează scriind cele două numere date (obligatoriu în ordine crescătoare, separate prin virgulă sau punct și virgulă) între paranteze rotunde sau pătrate.

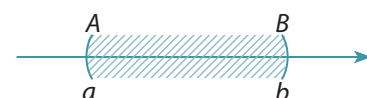
EXEMPLE: – intervalul $(1; 2)$ are capetele 1 și 2;

– intervalul $(-\sqrt{3}; 0,1)$ are capetele $-\sqrt{3}$ și $0,1$.

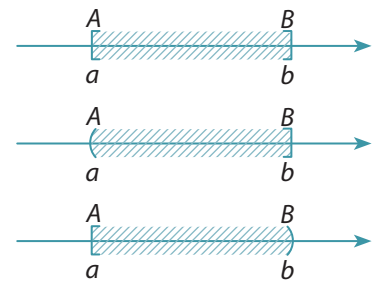
Elementele unui interval mărginit (adică o infinitate de numere reale ce nu pot fi scrise în totalitate) se reprezintă pe axa reală prin hașurarea porțiunii delimitate de cele două puncte corespunzătoare capetelor intervalului; se obține astfel un segment de dreaptă.

Intervalul mărginit având capetele $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a < b$, poate avea una dintre formele: (a, b) , $[a, b]$, $[a, b)$ sau $(a, b]$, pe care le definim astfel:

• $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ este **intervalul deschis în ambele capete**, a și b , și are drept reprezentare geometrică segmentul deschis (AB) (**nu** conține capetele);



- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ este **intervalul închis în ambele capete**, a și b , și are drept reprezentare geometrică segmentul închis $[AB]$ (conține ambele capete);
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ este **intervalul deschis la stânga** (în a) și **închis la dreapta** (în b) și are drept reprezentare geometrică segmentul semideschis $(AB]$ (**nu** conține A , dar conține B);
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ este **intervalul închis la stânga** (în a) și **deschis la dreapta** (în b) și are drept reprezentare geometrică segmentul semideschis $[AB)$ (conține A , dar **nu** conține B).



Există un caz special, când capetele a și b sunt egale. Atunci au loc: $[a; a] = \{a\}$ (interval redus la un punct), $(a; a] = \emptyset$, $[a; a) = \emptyset$ și $(a; a) = \emptyset$.

Intervale nemărginite

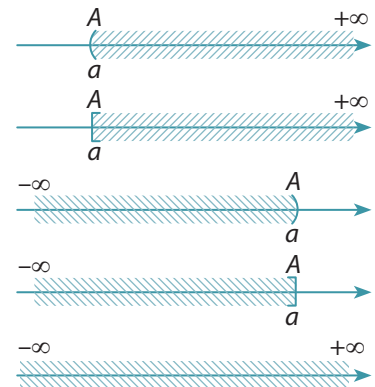
Axa reală, fiind o dreaptă din punct de vedere geometric, este nemărginită în ambele sensuri și, pentru a evidenția acest aspect, folosim două simboluri $-\infty$ (minus infinit) și $+\infty$ (plus infinit), astfel:



Atunci când cel puțin unul dintre capetele unui interval este $-\infty$ sau $+\infty$, spunem că **intervalul** este **nemărginit**, iar reprezentarea acestuia prin hașurare pe axa numerelor marchează fie o semidreaptă, fie o dreaptă.

Tipurile de intervale nemărginite sunt următoarele (pentru $a \in \mathbb{R}$ fixat):

- $(a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ este **intervalul deschis nemărginit la dreapta** și are drept reprezentare geometrică semidreapta deschisă (**nu** conține A);
- $[a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$ este **intervalul închis nemărginit la dreapta** și are drept reprezentare geometrică semidreapta închisă (conține capătul A);
- $(-\infty; a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$ este **intervalul deschis nemărginit la stânga** și are drept reprezentare geometrică semidreapta deschisă (**nu** conține A);
- $(-\infty; a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$ este **intervalul închis nemărginit la stânga** și are drept reprezentare geometrică semidreapta închisă (conține capătul A).



Mulțimea numerelor reale poate fi scrisă sub formă de interval nemărginit în ambele capete: $\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$.

Portofoliu

Adaugă la portofoliul personal toate tipurile de intervale, mărginite sau nemărginite, însoțite de exemple proprii ilustrate cu ajutorul axei reale.



Aplicăm cunoștințele

1 Pe o cutie de iaurt este precizată masa: $250 \text{ g} \pm 5\%$. Exprimă cu ajutorul unui interval între ce valori se plasează cantitatea de iaurt din acea cutie.

Rezolvare:

Mai întâi trebuie să aflăm cantitatea minimă și pe cea maximă posibilă de iaurt, conform etichetei. Astfel, în cutie se află minimum $250 - \frac{5}{100} \cdot 250 = 250 - 12,5 = 237,5 \text{ g}$ de iaurt și maximum $250 + \frac{5}{100} \cdot 250 = 250 + 12,5 = 262,5 \text{ g}$ de iaurt. Informațiile se pot rescrie cu ajutorul intervalului închis $[237,5; 262,5]$.

2 Scrie sub formă de interval mulțimile de mai jos și precizează tipul de interval obținut.

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x + 1 \leq 5\};$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 1 > 3\};$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x - \sqrt{2} \leq \sqrt{2}\};$$

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 10 \geq \frac{x}{3} \geq 7\right\}.$$

Rezolvare:

Pentru mulțimea A , trebuie să aflăm numerele reale x cu proprietatea că $-3 < x + 1 \leq 5$; întrucât scopul nostru este legat de x , scădem 1 din toți cei trei membri și obținem $-4 < x \leq 4$. Așadar $A = (-4; 4]$, adică un interval deschis la stânga (în -4) și închis la dreapta (în 4).

Similar, avem $2x - 1 > 3 \mid +1 \Leftrightarrow 2x > 4 \mid :2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$, deci $B = (2; +\infty)$ este un interval deschis la stânga (în 2) și nemărginit la dreapta. Din $3x - \sqrt{2} \leq \sqrt{2} \mid +\sqrt{2} \Leftrightarrow 3x \leq 2\sqrt{2} \mid :3 > 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{2\sqrt{2}}{3}$ obținem $C = \left(-\infty; \frac{2\sqrt{2}}{3}\right]$, un interval nemărginit la stânga și închis la dreapta (în $\frac{2\sqrt{2}}{3}$). La final, $10 \geq \frac{x}{3} \geq 7 \mid \cdot 3 > 0 \Leftrightarrow 30 \geq x \geq 21$ conduce spre intervalul $D = [21; 30]$, care este interval închis și mărginit în ambele capete.

Observăm și descoperim cunoștințe noi

Întrucât intervalele sunt mulțimi, putem efectua cu acestea operații cunoscute deja, cum sunt reuniunea și intersecția. Dacă I și J sunt intervale de numere reale, atunci:

$I \cup J = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in I \text{ sau } x \in J\}$ este **reuniunea intervalelor I și J** ;

$I \cap J = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in I \text{ și } x \in J\}$ este **intersecția intervalelor I și J** .

Pentru orice număr real $a > 0$ fixat au loc:

- $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < a\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -a < x < a\} = (-a; a)$;
- $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq a\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -a \leq x \leq a\} = [-a; a]$.

Portofoliu

Adaugă la portofoliul personal intervalele de mai sus, însoțite de exemplele proprii.

Aplicăm cunoștințele

1 Folosind reprezentarea pe axa numerelor, efectuează:

a) $(-2; 3) \cup [0; 5]$;

b) $(-2; 3) \cap [0; 5]$;

c) $(-2; 3) \cap \mathbb{Z}$;

d) $[0; 5] \cap \mathbb{N}^*$.

Rezolvare:

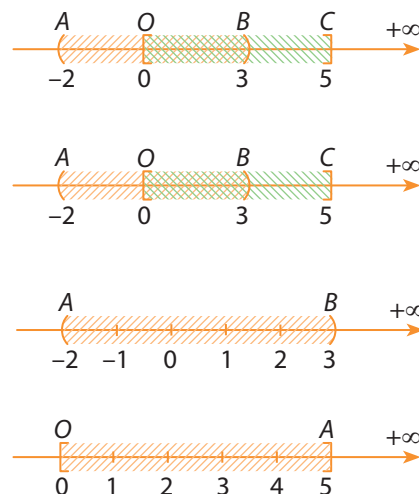
Pentru fiecare caz în parte este necesar să poziționăm corect (în ordine crescătoare) capetele intervalelor implicate pe axa reală, iar apoi să evidențiem cele două intervale prin hașurare diferențiată sau cu ajutorul culorilor.

a) $-2 < 0 < 3 < 5$, deci vom poziționa mai întâi pe axa reală cele patru puncte corespunzătoare celor patru capete. Am hașurat diferit segmentele corespunzătoare celor două intervale și apoi am evidențiat porțiunile lor comune și necomune (reuniunea), de unde: $(-2; 3) \cup [0; 5] = (-2; 5]$.

b) Într-o manieră similară procedăm și evidențiem porțiunea comună a celor două segmente, de unde: $(-2; 3) \cap [0; 5] = [0; 3]$.

c) De această dată reprezentăm pe axa reală intervalul mărginit $(-2, 3)$ marcând capetele sale, $A(-2)$ și $B(3)$, și apoi alegem pe axă punctele aferente tuturor numerelor întregi cuprinse între -2 și 3 , adică $-1, 0, 1$ și 2 . Așadar, $(-2; 3) \cap \mathbb{Z} = \{-1; 0; 1; 2\}$. Observăm că, deși capetele intervalului sunt numere întregi, ele nu aparțin intersecției, deoarece intervalul este deschis.

d) Similar, alegem pe axa numerelor punctele reprezentative pentru capetele intervalului, adică originea $O(0)$ și punctul $A(5)$ și apoi marcăm toate punctele de coordonate naturale nenule care aparțin segmentului $[OA]$ (inclusiv capetele). Obținem $[0; 5] \cap \mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.



2 Determină numerele naturale n pentru care intersecția intervalelor $[2; 2n - 1]$ și $(n + 1; 5]$ este nevidă.

Rezolvare:

În primul rând, pentru a exista cele două intervale, trebuie ca $2 < 2n - 1 \Leftrightarrow 3 < 2n \Leftrightarrow \frac{3}{2} < n$ și $n + 1 < 5 \Leftrightarrow n < 4$, așadar $n \in \{2, 3\}$.

Pentru $n = 2$ cele două intervale sunt $[2; 3]$ și $(3; 5]$, cu intersecția vidă.

Pentru $n = 3$, intersecția celor două intervale este $[2; 5] \cap (4; 5] = (4, 5]$.

Prin urmare, soluția problemei este $n = 3$.

3 Dacă $I = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 3\}$ și $J = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 3| \leq 2\}$, reprezintă geometric intervalele I și J și efectuează $I \cap J$.

Rezolvare:

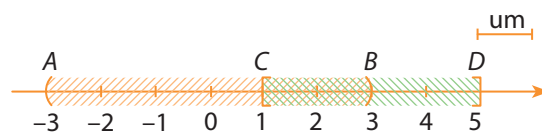
Activitate frontală:

$|x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3$, de unde $I = (-3; 3)$ și reprezentarea sa geometrică este segmentul deschis având capetele $A(-3)$ și $B(3)$.

$|x - 3| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x - 3 \leq 2 \mid + 3 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 5$, de unde $J = [1; 5]$ și reprezentarea sa geometrică este segmentul închis având capetele $C(1)$ și $D(5)$.

Activitate independentă:

Pentru a ilustra grafic și a efectua $I \cap J$, reprezentăm pe axa numerelor punctele $A(-3)$, $C(1)$, $B(3)$ și $D(5)$, hașurăm diferențiat segmentele corespunzătoare celor două intervale și observăm că porțiunea dublu hașurată este segmentul cu capetele în C și B (închis în C și deschis în B), deci $I \cap J = [1; 3)$.



Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1 Un turneu internațional de scrimă începe la ora 9:00 și durează oficial patru ore. Scrimerii au obligația să se legitimeze începând cu ora 7:30, dar nu mai târziu de jumătate de oră înainte de începerea turneului. Scrie cu ajutorul intervalelor:

a) perioada de timp în care se pot legitima scrimerii;

b) perioada de desfășurare a turneului.

2 La un test de matematică compus din 30 de întrebări, Maria primește 10 puncte din oficiu și câte 2,5 puncte pentru fiecare răspuns corect. Scrie în ce interval se poate regăsi punctajul total obținut de Maria, știind că are cel puțin un răspuns corect și cel puțin două răspunsuri greșite.

3 Graficul alăturat reprezintă variația temperaturilor dintr-o anumită zi înregistrate la o stație meteo. Scrie în ce interval se încadrează temperaturile (exprimate în grade Celsius) înregistrate între ora 10:00 și ora 19:00.

4 Scrie sub formă de interval fiecare dintre mulțimile de mai jos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 5\};$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 0\};$$

$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\};$$

$$G = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 99\};$$

$$I = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} \leq x < 1 + \sqrt{3}\};$$

$$K = \{x \in \mathbb{R} \mid 0,25 < x\};$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 10 < x < 12\};$$

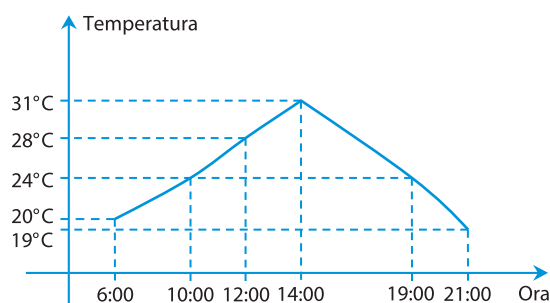
$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 4\};$$

$$F = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -5\};$$

$$H = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -21\};$$

$$J = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{3} \geq x > -\frac{13}{7}\right\};$$

$$L = \{x \in \mathbb{R} \mid \pi \geq x\}.$$



5 Reprezintă pe axa reală următoarele intervale:

a) $I_1 = (-3; 5)$;

b) $I_2 = [2; 3]$;

c) $I_3 = (-1; \sqrt{2})$;

d) $I_4 = [3; 3 + \sqrt{101})$;

e) $I_5 = (-\infty; 4]$;

f) $I_6 = (-\sqrt{2}; +\infty)$;

g) $I_7 = \left(-\infty; \frac{7}{3}\right)$;

h) $I_8 = \left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

6 Scrie și reprezintă pe axa reală câte un interval care:

a) conține numărul $3\sqrt{2}$;

b) conține exact 3 numere întregi;

c) nu conține numere întregi.

7 Precizează, pentru fiecare afirmație de mai jos, dacă este adevărată (A) sau falsă (F).

a) $-3 \in [-4; 5]$;

b) $\sqrt{2} \in (1; 2)$;

c) $-11 \in (-11; 0]$;

d) $\frac{1}{2} \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$;

e) $\sqrt{12} \notin [2\sqrt{3}; +\infty)$;

f) $1 - \sqrt{3} \notin (-\infty; -1)$;

g) $-3\sqrt{5} \in (-\infty; -5\sqrt{3}]$;

h) $\frac{5}{3} \in (-1; 2)$.

8 Precizează, pentru fiecare afirmație de mai jos, dacă este adevărată (A) sau falsă (F).

a) $\{1; 2\} = [1; 2]$;

b) $\{0; 3\} \subset [0; 3]$;

c) $(-2; -1) \subset [-2; -1]$;

d) $\mathbb{N} \subset (0; +\infty)$;

e) $[-3; +\infty) \subset (-4; +\infty)$;

f) $(-\infty; \sqrt{2}) \subset (-\infty; 2)$.

9 Asociază fiecărei mulțimi din coloana A, mulțimea egală cu ea, care se află în coloana B.

A

a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{-4}{2}\right\}$;

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x - 1 \geq 3\}$;

c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{10}{2} < x \leq 10\right\}$;

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}\}$;

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x\}$;

f) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1,5 > x > -3\}$.

B

1. $[4; +\infty)$;

2. $(5; 10]$;

3. $[3; +\infty)$;

4. $(-3; -1,5)$;

5. $(-\infty; -2)$;

6. $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$;

7. $(-\infty; 2)$;

8. $(3; +\infty)$.



10 Precizează, pentru fiecare dintre intervalele de mai jos, cel mai mare număr întreg care aparține respectivului interval:

a) $(-\infty; 3)$;

b) $(1 - \sqrt{2}; 4]$;

c) $(-\infty; -\sqrt{5})$;

d) $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$;

e) $\left(-\infty; \frac{13}{3}\right]$;

f) $\left(-3, -\frac{11}{5}\right)$.

11 Precizează, pentru fiecare dintre intervalele de mai jos, cel mai mare număr întreg negativ care nu aparține intervalului considerat:

a) $[-3; 5]$;

b) $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$;

c) $\left(\frac{11}{5}; +\infty\right)$;

d) $[-2\sqrt{3}; 1]$;

e) $(1 - \sqrt{5}; +\infty)$.

12 a) Determină cea mai mică valoare întreagă a lui n pentru care $-\sqrt{5} \in (-\infty, n]$.

b) Determină cea mai mare valoare întreagă a lui n pentru care $-\pi \in (2n; +\infty)$.

13 a) Arată că numărul $a = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{37 \cdot 38}$ nu aparține intervalului $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

b) Arată că numărul $b = 7\sqrt{5} - \sqrt{45}$ aparține intervalului $[8; 9]$.

14 Considerăm intervalul $I = \left(-\sqrt{2}; \frac{a}{2}\right)$, unde a este un număr întreg. Determină a pentru care intervalul I conține exact un număr întreg.

15 Scrie, prin enumerarea elementelor sau cu ajutorul intervalului, fiecare dintre următoarele mulțimi:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| = 1\}$;

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x + 2| = 3\}$;

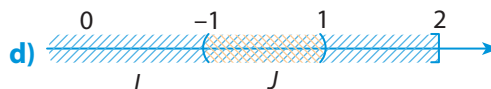
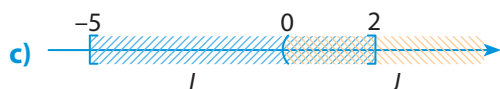
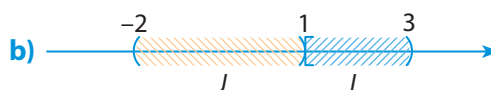
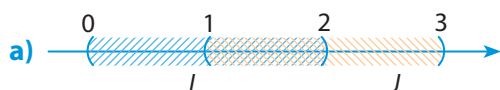
c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x + 1| = 1\}$;

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 2\}$;

e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| < 3\}$;

f) $F = \{x \in \mathbb{R} \mid |3x - 1| < 5\}$.

16 Pentru fiecare dintre situațiile ilustrate mai jos, identifică intervalele I și J și apoi efectuează $I \cup J$ și $I \cap J$:



17 Determină mulțimile:

a) $(-3; 2) \cup (-2; 3);$

b) $[-2; 2] \cup [0; 5];$

c) $(-\sqrt{2}; 1] \cup (1; \sqrt{2});$

d) $(-1; 3) \cup (-\infty; 1);$

e) $[-1; 3] \cup [0; +\infty);$

f) $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right).$

18 Determină mulțimile:

a) $(-3; 2) \cap (-2; 3);$

b) $[-2; 2] \cap [0; 5];$

c) $(-\sqrt{2}; 1] \cap (1; \sqrt{2});$

d) $(-1; 3) \cap (-\infty; 1);$

e) $[-1; 3] \cap [0; +\infty);$

f) $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cap \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right).$

19 Determină mulțimile:

a) $(2; 10) \cup \{10\};$

b) $(-2; 3) \cap \mathbb{N};$

c) $\left(-\frac{12}{5}; \frac{24}{5}\right) \cap \mathbb{Z};$

d) $[-\sqrt{3}; \sqrt{15}] \cap \mathbb{Z}^*;$

e) $[-\sqrt{2}; \sqrt{3}] \cup \{-1; 0; 1\};$

f) $\left(-\frac{4}{5}; \frac{10}{5}\right) \cap \{-2; -1; 0; 1; 2\}.$

20 **a)** Determină cea mai mare valoare a numărului întreg n pentru care $(-\infty; 1 - n] \cup [\sqrt{2}; +\infty) = \mathbb{R}.$

b) Determină cea mai mică valoare a numărului întreg n pentru care $(-\infty; 2\sqrt{3}) \cap (n + 2; +\infty) = \emptyset.$

21 Considerăm mulțimile $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq \frac{x+1}{3} \leq 1\right\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| \leq 3\}.$

a) Scrie mulțimile A și B cu ajutorul intervalelor.

b) Determină $A \cup B$ și $A \cap B.$

c) Arată că numărul $a = \frac{4+\sqrt{2}}{3}$ aparține mulțimii $A.$

22 Considerăm mulțimile: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |1 - 2x| \leq 1\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in (-2; 4]\}.$ Determină:

a) mulțimile A și $B;$

b) mulțimile $A \cup B$ și $A \cap B;$

c) suma și produsul elementelor din mulțimea $B.$

23 Considerăm mulțimile $A = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{6}{2x+1} \in \mathbb{N}\right\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 1\}.$ Determină mulțimile A, B și $A \cap B.$

24 Considerăm mulțimile $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| \leq 2\}$ și $B = \left\{y \in \mathbb{Z} \mid \frac{8}{3y-1} \in \mathbb{Z}\right\}.$ Determină mulțimile A, B și $A \cap B.$

25 Considerăm mulțimile $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |3-x| \leq 4\}$ și $B = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{2x-1}{x-3} \in \mathbb{Z}\right\}.$ Determină mulțimile A și B și apoi $\text{card}(A \cap B).$

26* Fie $x \in [-2; 3]$ și $y \in [1; 2].$ Arată că:

a) $2y-3 \in [-1; 1]$ și $\frac{3x-8}{2} \in \left[-7; \frac{1}{2}\right];$

b) $|x+y-2| \leq 3.$

27* Dacă $x \in [1; 3]$ și $y = x+2,$ arată că:

a) $3x+y \in [6; 14];$

b) $\sqrt{x^2+5y} \in [4; 6).$

28* Fie $x \in [-1; 2].$ Arată că valoarea expresiei $E = |x+1| + |x-2|$ nu depinde de $x.$

Din oficiu: 1 punct

AUTOEVALUARE

Timp de lucru: 40 de minute

La problemele 1, 2 și 3, alege litera corespunzătoare răspunsului corect.

- 1** Suma tuturor numerelor întregi din intervalul $\left[-\frac{17}{4}; \frac{1}{2} + \sqrt{3}\right]$ este egală cu: **2 puncte**
 a) -18; b) -7; c) 7; d) 18.
- 2** Cel mai mare număr întreg care nu aparține intervalului $(-5\sqrt{3}; +\infty)$ este: **1 punct**
 a) $-5\sqrt{3}$; b) -9; c) -8; d) -5.
- 3** Afirmatia „Produsul tuturor elementelor mulțimii $\{n \in \mathbb{N}^* | n : 2\} \cap (-\infty; 7\sqrt{2}]$ este egal cu 48.” este: **2 puncte**
 a) adevărată; b) falsă.
- 4** Unește prin săgeți fiecare enunț din coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta. **2 puncte**
- | | |
|---|---------------------------|
| a) $(-\infty; 3] \cap (1; +\infty) = \dots$ | 1) $(-5; 10]$ |
| b) $[2; 10] \cup (-5; 7) = \dots$ | 2) $\emptyset$ |
| c) $(-5; 4) \cup [4; 5) = \dots$ | 3) $(\sqrt{2}; \sqrt{3})$ |
| d) $(\sqrt{2}; +\infty) \cap (-\infty; \sqrt{3}) = \dots$ | 4) $(1; 3]$ |
| | 5) $(-5; 5)$ |
- 5** Fie mulțimile $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x - 1| \leq 2\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |1 - x| < 3\}$. Determină $A, B, A \cup B$ și $A \cap B$. **2 puncte**

LECȚIA 3 Inecuații de forma $ax + b \geq 0$ ($\leq, <, >$), unde $a, b \in \mathbb{R}$ 

Ne amintim

- Inecuația de gradul întâi are una dintre formele $ax + b \geq 0$ sau $ax + b \leq 0$ sau $ax + b < 0$ sau $ax + b > 0$, unde a, b sunt numere reale, $a \neq 0$.
- O soluție a inecuației este o valoare a necunoscutei x pentru care se obține o propoziție adevărată.
- A rezolva o inecuație înseamnă a determina mulțimea tuturor soluțiilor ei.
- Două inecuații pentru care mulțimile soluțiilor sunt egale se numesc inecuații echivalente. Ele se obțin una din cealaltă aplicând proprietățile relației de inegalitate în mulțimea numerelor reale.
- Proprietățile relației de inegalitate**
 Oricare ar fi numerele reale a și b , avem:
 - $a \leq b \mid +c, c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a+c \leq b+c, c \in \mathbb{R}$
 (dacă adunăm în ambii membri ai unei inecuații același număr real, obținem o inecuație echivalentă cu cea dată)
 - $a+b \leq c \Leftrightarrow a \leq c-b$
 (dacă trecem un termen dintr-un membru în altul schimbându-i semnul, obținem o inecuație echivalentă cu cea inițială)
 - $a \leq b \mid \cdot c, c > 0 \Leftrightarrow a \cdot c \leq b \cdot c, c > 0$ $a \leq b \mid :c, c > 0 \Leftrightarrow a:c \leq b:c, c > 0$
 (dacă înmulțim sau împărțim ambii membri ai unei inecuații cu un număr pozitiv, se păstrează sensul inecuației și se obține o inecuație echivalentă cu cea dată)
 - $a \leq b \mid \cdot c, c < 0 \Leftrightarrow a \cdot c \geq b \cdot c, c < 0$ $a \leq b \mid :c, c < 0 \Leftrightarrow a:c \geq b:c, c < 0$
 (dacă înmulțim sau împărțim ambii membri ai unei inecuații cu un număr negativ, se schimbă sensul inecuației și se obține o inecuație echivalentă cu cea dată)



Rezolvăm împreună

- 1** Rezolvă, în mulțimea numerelor reale, inecuația: $2x + 4 \geq x + 6$.

Rezolvare:

Separăm termenii care conțin necunoscuta de termenii liberi obținând inecuația echivalentă $2x - x \geq 6 - 4$. Efectuăm calculele în fiecare membru și avem inecuația $x \geq 2$. Ținând cont că x este număr real, obținem $x \in [2, \infty)$,

deci mulțimea soluțiilor este $S = [2; \infty)$.

Astfel: $2x + 4 \geq x + 6 \Leftrightarrow 2x - x \geq 6 - 4 \Leftrightarrow x \geq 2, x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in [2; \infty) \Leftrightarrow S = [2; \infty)$.

2 Rezolvă, în mulțimea numerelor reale, inecuațiile:

a) $\frac{4x-1}{7} < \frac{2x+3}{3};$

b) $\frac{7\sqrt{3}-3\sqrt{7}}{3x+7} \leq 0;$

c) $|2x+9| \leq 7.$

Rezolvare:

a) Eliminând numitorul obținem inecuația echivalentă: $3(4x-1) < 7(2x+3)$. Folosim distributivitatea înmulțirii față de adunare/scădere: $12x-3 < 14x+21$. Separăm termenii care conțin necunoscuta de termenii liberi și obținem: $12x-14x < 21+3$. Efectuăm calculele în fiecare membru: $-2x < 24$. Împărțim ambii membri prin (-2) care, fiind negativ, schimbă sensul inegalității și avem inecuația echivalentă $x > -12$. Cum x este număr real, mulțimea soluțiilor este $S = (-12, \infty)$.

b) Stabilim semnul numărătorului $7\sqrt{3}-3\sqrt{7} = \sqrt{147}-\sqrt{63} > 0$. Pentru ca fracția să fie negativă trebuie ca numitorul să fie negativ (egalitatea cu 0 nu poate avea loc): $3x+7 < 0$, de unde obținem $x < -\frac{7}{3}$, cu $x \in \mathbb{R}$, care conduce la $S = \left(-\infty, -\frac{7}{3}\right)$.

c) Conform proprietăților modulului $-7 \leq 2x+9 \leq 7, x \in \mathbb{R}$, obținem o **dublă inegalitate**. Scădem din fiecare membru 9 și avem $-16 \leq 2x \leq -2$. Împărțim prin 2: $-8 \leq x \leq -1, x \in \mathbb{R}$, de unde $S = [-8, -1]$.

Constatăm că toate inecuațiile de mai sus se aduc la una dintre formele $ax+b \geq 0$ sau $ax+b \leq 0$ sau $ax+b < 0$ sau $ax+b > 0$, cu $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

Reține!

- ♦ Dacă a și b sunt numere reale date, cu $a \neq 0$, inecuația care poate fi adusă la una dintre formele $ax+b \geq 0$ sau $ax+b \leq 0$ sau $ax+b < 0$ sau $ax+b > 0$ se numește **inecuație de gradul întâi cu o necunoscută, x** .
- ♦ Numărul $a \in \mathbb{R}^*$ se numește coeficientul necunoscutei, iar $b \in \mathbb{R}$ se numește termenul liber.
- ♦ Numărul real x se numește necunoscuta sau variabila inecuației.

Algoritmul pentru rezolvarea inecuațiilor de forma $ax+b \geq 0, a, b, x \in \mathbb{R}$

Pasul 1: Scădem b din ambii membri și avem inecuația echivalentă $ax \geq -b$.

Pasul 2: Împărțim ambii membri prin $a \neq 0$.

- dacă $a > 0$, inecuația echivalentă este $x \geq -\frac{b}{a}$;
- dacă $a < 0$, inecuația echivalentă este $x \leq -\frac{b}{a}$.

Pasul 3: Cum x este real, scriem soluția sub forma unui interval:

- pentru $a > 0 \Rightarrow S = \left[-\frac{b}{a}, \infty\right);$
- pentru $a < 0 \Rightarrow S = \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right].$

Celelalte inecuații de gradul întâi se rezolvă similar. Dacă domeniul lui x nu este $\mathbb{R}$, ci M , o submulțime a lui $\mathbb{R}$, inecuația poate fi rezolvată în $\mathbb{R}$, după care mulțimea soluțiilor se obține intersectând M cu intervalul obținut.

Aplicăm cunoștințele

1 Rezolvă inecuația: $2\sqrt{2}x+6 \geq 4x+3\sqrt{2}, x \in \mathbb{N}$.

Rezolvare:

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}x-4x \geq -6+3\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x(\sqrt{2}-2) \geq 3(\sqrt{2}-2) | :(\sqrt{2}-2) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x \leq +3 | :2$$

$$x \leq \frac{3}{2}, x \in \mathbb{N} \Leftrightarrow S = \{0, 1\}$$

→ se separă termenii care conțin necunoscuta de termenii liberi;

→ se scoate factorul comun;

→ se împarte fiecare membru al inecuației la coeficientul

necunoscutei $\sqrt{2}-2 < 0 \Rightarrow$ se schimbă sensul inecuației;

→ se scrie mulțimea soluțiilor, ținând cont că x este număr natural.

- 2** Rezolvă inecuația $\frac{2-\sqrt{3}}{x-1} > 0$ în mulțimea numerelor reale.

Rezolvare:

$$2 - \sqrt{3} > 0$$

→ stabilim semnul numărătorului;

$$\frac{2-\sqrt{3}}{x-1} > 0 \Leftrightarrow x-1 > 0$$

→ deoarece fracția este pozitivă, numărătorul este pozitiv și numitorul trebuie să fie pozitiv;

$$x > 1, x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in (1; +\infty)$$

→ se obține intervalul în care se găsește x , respectiv soluția inecuației.

Temă de investigație

Rezolvarea inecuațiilor în viața cotidiană

Probleme:

Timpul alocat studiului:

Situație: Îți propui să studiezi minimum 2 ore pe zi pentru a te pregăti pentru examene.

Inecuație: $t \geq 2$ și $t \leq 8$.

Rezolvare: Determină timpul alocat studiului pentru a respecta acest program: $t \in [2, 8]$.

Interpretare: Orice perioadă de studiu care este de cel puțin 2 ore pe zi îți va permite să te pregătești eficient pentru examene.

Calorii zilnice:

Situație: Pentru a menține o dietă echilibrată, trebuie să consumi între 1800 și 2200 de calorii pe zi.

Inecuație: $1800 \leq x \leq 2200$.

Rezolvare: Determină valorile calorice care respectă acest interval: $x \in [1800, 2200]$.

Interpretare: Consumul zilnic de calorii trebuie să fie între 1800 și 2200 de calorii pentru a menține echilibrul dietei.

Sarcina ta:

- 1. Scrie propriile tale exemple:** Creează două probleme cu inecuații inspirate din viața ta cotidiană. Scrie situația, inecuația corespunzătoare, rezolvarea și interpretarea soluției.
- 2. Rezolvă problemele colegilor:** Dacă ai colegi care participă la această activitate, schimbă problemele create și rezolvă-le reciproc.



Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

- Determină câte două soluții numere întregi pentru fiecare dintre inecuațiile următoare:
 - $2x + 1 \geq 5$;
 - $3x - 1 < 2$;
 - $11x - 6 \leq 0$;
 - $-x + 4 > -2$.
- Determină care dintre elementele mulțimii $A = \{-5, 0, \sqrt{7}\}$ este soluție a inecuației:
 - $x < 3$;
 - $-x \leq 2$;
 - $2x + 3 \geq 7$;
 - $-4x - 1 > 11$.
- Rezolvă, în mulțimea numerelor naturale $\mathbb{N}$, inecuațiile:
 - $x + 4 < 8$;
 - $2x + 5 \leq 11$;
 - $-x + 3 > -5$;
 - $-4x + 1 \geq -11$.
- Determină soluțiile întregi ale inecuațiilor:
 - $7x + 3 \geq 2x + 18$;
 - $2x - 5 > -4x + 7$;
 - $x + 9 \leq -x + 11$;
 - $-4x - 5 \geq 3x + 9$.
- Determină soluțiile reale ale inecuațiilor:
 - $2x + 1 < x + 4$;
 - $5x - 6 \geq 2x + 3$;
 - $-5x + 2 > -x + 3$;
 - $3x - \sqrt{3} > x + \sqrt{3}$;
 - $\frac{x}{2} - 1 \leq \frac{3x}{2} + 1$;
 - $x - \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2}$.
- Rezolvă în $\mathbb{R}$ inecuațiile și reprezintă pe axa numerelor reale mulțimea soluțiilor lor:
 - $5(x - 4) + 6 \geq 2(x + 3) + 1$;
 - $9 - 2(x + 3) > 2(x - 2) - 1$;
 - $3(2x + 1) + 2(x - 4) \leq 3(x + 11) - 8$;
 - $7(4x - 3) - 9(3x - 4) > 5 - 2(x + 1)$;
 - $4 + 3(x - \sqrt{3}) < x - 3\sqrt{3}$;
 - $4(3x - \sqrt{2}) + 2\sqrt{2} > 2(5x + 2\sqrt{2})$.

7 Rezolvă în $\mathbb{R}$ inecuațiile și reprezintă pe axa numerelor soluțiile acestora folosind aproximări convenabile ale capetelor finite:

a) $\frac{5x-2}{3} \geq 0;$

b) $\frac{4x-3}{-2} > 0;$

c) $\frac{2-3x}{6} < 0;$

d) $\frac{x+2}{3} + \frac{3x-1}{2} \leq 0;$

e) $\frac{x+1}{4} < \frac{x-2}{3};$

f) $\frac{2x+3}{6} + \frac{x-1}{4} \geq \frac{5x-1}{12}.$

8 Rezolvă în $\mathbb{R}$ inecuațiile:

a) $x(\sqrt{5}-5) < \sqrt{5}-5;$

b) $(1-\sqrt{2})x \geq 4-4\sqrt{2};$

c) $(2-\sqrt{7})x \leq 5(\sqrt{7}-2);$

d) $2x-11 > x\sqrt{5}+1-6\sqrt{5};$

e) $3\sqrt{2}-2x \leq \sqrt{8} \cdot x - \sqrt{2}-4;$

f) $7(x+\sqrt{3})-x\sqrt{27} > 9.$

9 Rezolvă în $\mathbb{R}$ inecuațiile:

a) $|x| \leq 4;$

b) $|x+2| < 3;$

c) $|2x+1| \leq 7;$

d) $|3x-2| < 4;$

e) $2 \cdot (3-|x|) \geq 4;$

f) $(2x+5)^2 \leq 9.$

10 **Lucru în echipă:** Împreună cu colegul de bancă, rezolvați sarcinile propuse și analizați rezultatele găsite.

Fie inecuația $2x+6 \geq 2$.

a) Determină mulțimea soluțiilor inecuației pentru $x \in \mathbb{N}^*$.

b) Rezolvă inecuația pentru $x \in \mathbb{Z}$.

c) Rezolvă inecuația, știind că $x \in \mathbb{Z}_-$.

d) Rezolvă inecuația în $\mathbb{R}$.

11 Alege litera corespunzătoare răspunsului corect.

Maria afirmă: „Inecuația $2x-5 < x+1$, $x \in \mathbb{N}$, are 6 soluții.” Afirmatia Mariei este:

a) adevărată;

b) falsă.

12* Determină mulțimea valorilor reale ale lui x în fiecare dintre următoarele cazuri (unde prin $[a]$ înțelegem partea întreagă a numărului real a):

a) $[x] = 0;$

b) $[x-2] = 1;$

c) $[2x+3] = -5;$

d) $[x^2] = 3.$

13 Fie expresia $E(x) = \frac{2-5x}{-4}$. Determină valorile reale ale lui x , știind că este îndeplinită una dintre următoarele condiții:

a) $E(x)$ ia valori nenegative;

b) $E(x)$ ia valori în intervalul $(1, \infty)$;

c) $E(x)$ ia valori negative;

d) $E(x)$ ia valori în intervalul $(-\infty, -1]$.

14 Determină mulțimile:

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2+x < 3x+4 < x+20\};$

$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x+1 \in (2x-7; 3x+3]\};$

$C = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x^2+9)(x^2-4) < 0\};$

$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2-x}{|x+5|} \geq 0\right\}.$

15 Determină valorile reale ale lui m , astfel încât inecuația $5(x+3)-x-4 \leq 2(2x+6)+m$ să nu aibă soluții reale.

16 Determină mulțimea valorilor reale ale lui x , astfel încât numerele reale a , de mai jos, să fie bine definite:

a) $a = \sqrt{x-3};$

b) $a = \sqrt{2-x};$

c) $a = \frac{7}{\sqrt{x-3}};$

d) $a = \frac{3+2x}{5-x};$

e) $a = \frac{x+2}{\sqrt{2-x}};$

f) $a = \sqrt{3-3x} + \sqrt{2x-2}.$



Din oficiu: 1 punct

AUTOEVALUARE

Timp de lucru: 40 de minute

Determină soluțiile reale ale inecuațiilor:

3 puncte

1 $2(x+3)-4 \geq x-6;$

2 $\frac{-5}{2x-\sqrt{3}} \geq 0;$

3 $|2x-7| \leq 3.$

4 Fie $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < 2x-1 \leq 3\}$. Calculează produsul elementelor mulțimii A .

2 puncte

5 Se consideră expresia $E(x) = \frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{x-2}$. Determină:

4 puncte

a) $x \in \mathbb{N}$ pentru care $E(x)$ este pozitivă;

b) $x \in \mathbb{R}$ pentru care $E(x) \in (-\infty, 0]$.

LECȚIA 4 Probleme care se rezolvă cu ajutorul inecuațiilor

Inecuațiile sunt un instrument matematic util, care ne ajută să rezolvăm probleme din viața reală. Ele ne permit să exprimăm și să analizăm situații în care avem o limită sau o restricție, cum ar fi bugetul disponibil, capacitatea maximă a unei săli sau cantitatea minimă de material necesară pentru un proiect.

De exemplu, dacă un elev are 50 de lei și vrea să cumpere mai multe caiete, de câte 8 lei fiecare, putem folosi o inecuație pentru a determina câte caiete poate cumpăra: $8x \leq 50$, unde x reprezintă numărul de caiete. Rezolvând inecuația, aflăm că elevul poate cumpăra cel mult 6 caiete.

Astfel, inecuațiile ne ajută să luăm decizii informate și să înțelegem mai bine relațiile dintre diferite cantități.

În această lecție vom explica cum să formulăm și să rezolvăm probleme folosind inecuații.



Ne amintim

Etapile rezolvării unei probleme cu ajutorul inecuațiilor sunt:

- alegerea necunoscutei și notarea acesteia cu o literă;
- obținerea inecuației pe baza datelor problemei;
- rezolvarea inecuației;
- interpretarea rezultatului (formularea răspunsului și eventual verificarea acestuia).



Rezolvăm împreună

1 Un test are 25 de întrebări. Pentru fiecare răspuns corect se primesc 6 puncte, iar pentru fiecare răspuns omis sau greșit se scad 2 puncte. Calificarea la următoarea etapă presupune obținerea a cel puțin 100 de puncte la acest test. Care este numărul minim de întrebări la care trebuie să răspundă corect Andrei pentru a fi promovat la etapa următoare?

Rezolvare:

1. Alegerea necunoscutei: Andrei a dat x răspunsuri corecte, $x \in \mathbb{N}, x \leq 25$.	Un test are 25 de întrebări. Pentru fiecare răspuns corect se primesc 6 puncte,	a) Fie $x, x \in \mathbb{N}$, numărul răspun- surilor corecte ale lui Andrei. Pentru ele va primi $6x$ puncte.
2. Obținerea inecuației: $6x - 2(25 - x) \geq 100, x \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$	iar pentru fiecare răspuns omis sau greșit se scad 2 puncte.	b) Numărul răspunsurilor omise sau greșite este $25 - x$. Ele vor aduce o penalizare de $2(25 - x)$ puncte.
3. Rezolvarea inecuației: $\Leftrightarrow 6x - 50 + 2x \geq 100, x \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 8x \geq 150, x \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x \geq \frac{75}{4},$ $x \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x \geq 18,75, x \in \mathbb{N}.$ 4. Interpretarea rezultatului Valoarea minimă a lui $x = 19$.	Calificarea la următoarea etapă presu- pune obținerea a cel puțin 100 de puncte la acest test. Care este numărul minim de întrebări la care trebuie să răspundă corect Andrei pentru a fi promovat la etapa următoare?	c) Punctajul lui Andrei este $6x - 2(25 - x)$ puncte. d) $6x - 2(25 - x) \geq 100, x \in \mathbb{N}.$
5. Formularea răspunsului Andrei trebuie să răspundă corect la cel puțin 19 întrebări.		

2 Hathi tocmai a sosit în noua rezervație de elefanți Chiang Mai, alăturându-se celorlalți 10 elefanți de acolo. Cei 10 elefanți au vârstele exprimate prin numere impare consecutive, iar Hathi are vârsta mai mică decât dublul vârstei celui mai tânăr elefant. Știind că suma vârstelor tuturor celor 11 elefanți este 384 ani, determină vârsta maximă a lui Hathi.

3 O urnă conține bile roșii și albe. Bilele roșii sunt cu 10 mai puține decât bilele albe. Probabilitatea de a extrage o bilă roșie este mai mică decât $\frac{2}{7}$. Care este numărul maxim de bile albe din urnă?

Problema 2	Etapale rezolvării	Problema 3
Hathi are x ani, $x \in \mathbb{N}$; cel mai tânăr elefant dintre cei 10 are y ani, $y \in \mathbb{N}$, y impar.	1. Alegerea necunoscutei/ necunoscutelor și specifica-rea domeniului în care se află	În urnă sunt: x bile albe, $x \in \mathbb{N}$, $x > 10$, $(x - 10)$ bile roșii.
$x < 2y$; $x + y + (y + 2) + \dots + (y + 18) = 384$.	2. Obținerea relațiilor și formarea inecuației	Numărul total de bile este $x + (x - 10) = 2x - 10$. Probabilitatea = $= \frac{\text{numărul cazurilor favorabile}}{\text{numărul cazurilor posibile}} =$ $= \frac{x - 10}{2x - 10};$ $\frac{x - 10}{2x - 10} < \frac{2}{7}.$
$x + 10y + 90 = 384 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x + 10y = 294$ $\left. \begin{array}{l} x < 2y \Leftrightarrow x + 10y < 12y \end{array} \right\} \Rightarrow$ $\Rightarrow 294 < 12y \Leftrightarrow y > \frac{294}{12} = 24,5$.	3. Rezolvarea inecuației	$7x - 70 < 4x - 20 \Leftrightarrow 3x < 50 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x < \frac{50}{3} \Leftrightarrow x < 16,6$.
Dacă x este maxim, atunci y este minim, $y \in \mathbb{N}$, y - impar $\Rightarrow y = 25 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ vârsta maximă a lui Hathi este de 44 ani.	4. Interpretarea rezultatelor și formularea răspunsului	$x \in \mathbb{N}$ și $10 < x < 16,6$; x maxim $\Rightarrow x = 16$. În urnă sunt cel mult 16 bile albe.



Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

- Se împăduresc 10 ha de pădure. Care este numărul minim de puieți ce trebuie plantați, astfel încât să fie cel puțin 3 copaci pe 4 m²?
- Se amestecă 30 g soluție cu concentrația de 12% cu soluție cu concentrația de 15%. Care este cantitatea minimă de soluție cu concentrația de 15% care trebuie adăugată, astfel încât noul amestec să aibă concentrația de cel puțin 13,2%?
- Determină cea mai mică valoare a numărului real m , astfel încât inecuația $m(x - 1) + x(3 - 2m) \leq 7$ să admită soluția $x_0 = 1$.
- Estimează cu o eroare de o miime numerele $a = 3,045$, $b = 3,45$, $c = 3,4(5)$ și $d = 3,45$ și ordonează-le descrescător.
- Determină cele mai mari 5 numere naturale consecutive a căror sumă este cel mult 210.
- În tabelul de mai jos sunt prezentate rezultatele obținute de elevii unei clase la un test.

Nota	4	5	6	7	8	9	10
Număr de elevi	1	1	3	8	6	7	4

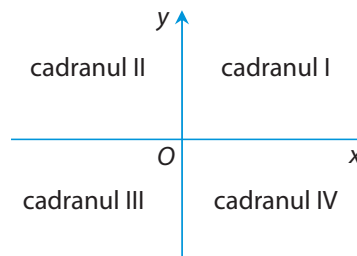
Conform indicațiilor din tabel, numărul elevilor care au obținut note mai mari sau egale cu 8 la test este egal cu:

- a) 11; b) 13; c) 17; d) 19.

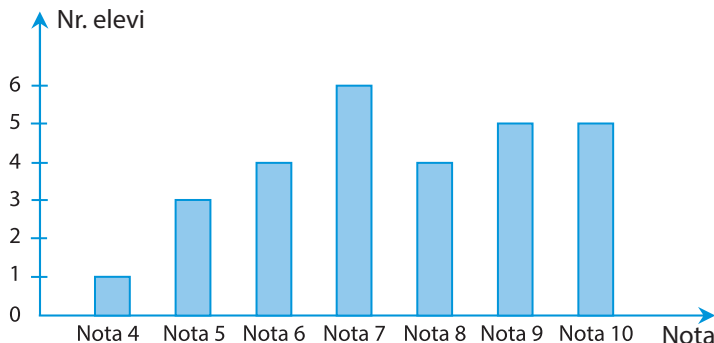
- Laturile triunghiului ABC au lungimile $AB = 3,2(4)$ cm, $BC = 3,2(4)$ cm și $AC = 3,24$ cm. Ordonează crescător măsurile unghiurilor triunghiului ABC .

8 Axele unui sistem ortogonal xOy împart planul în patru cadrane care se numerează ca în figura de mai jos. Determină valorile reale ale lui a , astfel încât fiecare dintre punctele specificate să fie în cadrantul corespunzător:

- a) $A(a, 2a + 2)$ se află în cadrantul I;
- b) $B(-a, 5 + a)$ se află în cadrantul II;
- c) $C(a, a)$ se află în cadrantul III;
- d) $D(2a + 1, 5 - a)$ se află în cadrantul IV;
- e) $E(2, 7 - a)$ se află în cadranele I sau IV;
- f) $F(4 - a, 9)$ se află în cadranele II sau III.



9 În diagrama de mai jos sunt prezentate rezultatele obținute de elevii clasei a VIII-a la testul de matematică.



Știm că jumătate din numărul elevilor acestei clase a obținut cel puțin nota 8 la test.

- a) Câți elevi sunt în clasă?
- b) Completează diagrama după ce ai determinat câți elevi au obținut cel mult nota 6.

10 Antrenorul promite jucătorilor echipei sale că vor primi o bonificație dacă media numărului de goluri din fiecare repriză a meciului va fi de cel puțin 25. Înscriind în primele trei reprize 20, 27, respectiv 23 de goluri, care este numărul minim de goluri pe care trebuie să le înscrie în repriza a patra pentru a-și primi bonificația?

11 Pentru a merge în excursia visată, Ana depune suma S la bancă într-un depozit cu dobânda de 5% pe an cu capitalizare. Care este valoarea minimă a lui S , astfel încât peste 3 ani Ana să aibă în cont cel puțin 9261 de lei?

Din oficiu: 1 punct

AUTOEVALUARE

Timp de lucru: 40 de minute

Pentru a-și urma dieta, Matei trebuie să-și limiteze consumul de zahăr la cel mult 40 g pe zi. Un biscuit, b , are 5 g de zahăr, iar o salată de fructe, s , are 7 g de zahăr. Ilinca îi aduce lui Matei trei piersici, fiecare având câte 12 g de zahăr, și două banane, care conțin câte 16 g de zahăr fiecare.

1 Dacă Matei consumă zahăr doar din biscuiți și salată de fructe, care dintre următoarele inegalități este adevărată pentru a respecta dieta pe parcursul unei zile? **3 puncte**

- a) $\frac{5}{b} + \frac{7}{s} < 40$;
- b) $\frac{5}{b} + \frac{7}{s} \leq 40$;
- c) $5b + 7s < 40$;
- d) $5b + 7s \leq 40$.

2 Poate Matei să mănânce 9 biscuiți într-o zi și să-și respecte dieta? Justifică. **2 puncte**

3 Dacă Matei a mâncat într-o zi 3 salate de fructe, câți biscuiți mai poate mânca, astfel încât să se încadreze în consumul impus? **1 punct**

4 Dă un exemplu de o combinație de cel puțin trei dintre alimentele menționate care să se încadreze în dieta zilnică a lui Matei. **1 punct**

5 Dă un exemplu de o combinație de alimente dintre cele menționate care să nu se încadreze în dieta zilnică a lui Matei. **2 puncte**



Proiect

Utilizarea inecuațiilor în viața cotidiană

Accesează pe Internet pagina Institutului Național de Sănătate Publică (<https://insp.gov.ro>) și consultă Ghidul de Prevenție referitor la intervențiile preventive adresate stilului de viață (alimentație și activitate fizică).

Problemă: Identifică 2-3 recomandări pentru un stil de viață sănătos în acord cu vârsta și dezvoltarea unui adolescent de vârsta ta. Evidențiază în enunțarea acestora conceptul de interval și rezolvarea de inecuații.

Sarcini de lucru:

1. Identifică, sub formă de interval, necesarul caloric al unui adolescent de vârsta ta pentru a menține o dietă echilibrată.
2. Realizează jurnalul caloric al unei zile obișnuite, pe intervale orare.
3. Compară datele din jurnalul tău cu nivelurile de aport caloric din ghid.

Resurse: pagină web a INSP, ghid publicat, recomandări OMS.

Modalitatea de prezentare: Formularea unei rezoluții cu ajutorul limbajului matematic utilizat în acest capitol (intervale, inecuații, soluții).

Modalități de evaluare: Interevaluare între colegii de clasă.

Recomandări:

1. Identifică propriile tale exemple, inspirate din viața cotidiană. Scrie pentru acestea, situația-problemă, inecuația corespunzătoare, rezolvarea și interpretarea soluției.
2. Fă schimb de probleme cu alți colegi din clasă și realizează propria ta rezolvare.



FIȘĂ DE OBSERVARE SISTEMATICĂ A ACTIVITĂȚII ȘI A COMPORTAMENTULUI ELEVULUI

Autoevaluarea activității elevului în procesul de învățare este un instrument util atât cadrului didactic, cât și elevului, pentru a putea determina implicarea acestuia pe parcursul unui capitol.

Copiază pe o foaie de hârtie următorul tabel, completează-l, solicită observațiile profesorului și adaugă-l la portofoliul personal.

Răspunsuri	Autoevaluarea elevului Da/Nu/Parțial	Observațiile profesorului
Am participat activ la fiecare lecție.		
Am recapitulat înainte de fiecare lecție noțiunile învățate anterior.		
Am pus întrebări atunci când am avut nelămuriri.		
Am răspuns la întrebările profesorului sau ale colegilor.		
Am colaborat cu colegii la activitățile desfășurate.		
Am obținut la testul de recapitulare și evaluare nota		

1. PROBLEME RECAPITULATIVE

- 1 Determină mulțimile: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} < x \leq \sqrt{3}\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -\sqrt{2} < x \leq \sqrt{3}\}$, $C = \{x \in \mathbb{N}^* \mid -\sqrt{2} < x \leq \sqrt{3}\}$.
- 2 Arată că mulțimile $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x - 1| = 1\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 3| \leq 1\}$ sunt disjuncte.
- 3 Calculează media aritmetică a elementelor întregi ale mulțimii $I = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\sqrt{30}}{2} < x \leq \frac{\sqrt{15}}{3}\right\}$.
- 4 Determină cardinalul mulțimii $\{\sqrt{1}; \sqrt{2}; \sqrt{3}; \dots; \sqrt{70}\} \cap \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{4} < \frac{x+1}{12} < \frac{1}{3}\right\}$.
- 5 Efectuează:
 - a) $(-3; -\sqrt{2}) \cap \left(-\sqrt{5}; -\frac{1}{4}\right]$;
 - b) $(3\sqrt{5}; 7\sqrt{2}) \cup (5\sqrt{3}; 4\sqrt{7}]$.
- 6 Determină numerele reale a și b , astfel încât $(a; 3) \cap (1; 5) = (2; 3)$ și $[-1; b] \cap (0; 2) = (0; 1]$.
- 7 Dintre intervalele $(7; +\infty)$, $(-3; 9)$, $[-7; 0]$ și $[-3; +\infty)$, cel care conține cele mai multe numere întregi negative este:
 - a) $(7; +\infty)$;
 - b) $(-3; 9)$;
 - c) $[-7; 0]$;
 - d) $[-3; +\infty)$.
- 8 Mulțimea $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid 5 \leq |x| < 8\}$ este:
 - a) $[5; 8)$;
 - b) $(-8; -5] \cup [5; 8)$;
 - c) $\{-7; -6; -5; 5; 6; 7\}$.
 - d) $\mathbb{Z}$.
- 9 Determină cardinalul mulțimii $A \cap \mathbb{N}$, unde $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x(\sqrt{3} - 2) \geq -3 \cdot |\sqrt{3} - 2|\}$.
- 10 Suma numerelor întregi din intervalul $(-3, 4)$ este egală cu:
 - a) 1;
 - b) 7;
 - c) 4;
 - d) 3.
- 11 Estimează cu o eroare de o zecime numerele $a = \frac{2}{3}$, $b = 0,5$, $c = 0,1(7)$ și $d = \frac{1}{4}$ și ordonează-le crescător.
- 12 Determină următoarele mulțimi și apoi reprezintă-le pe axa numerelor folosind estimări convenabile ale elementelor lor:
 - a) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{4\sqrt{3} - 7}{2x + 3} \geq 0\right\}$;
 - b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0,2 \cdot x - 1,5 > 0\}$;
 - c) $C = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x\sqrt{2} - 2\sqrt{3} \leq 0\}$;
 - d) $D = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid |x - \sqrt{2}| \leq 3\}$;
 - e) $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2, (3)x + 0, (6) \geq 1, 2(6)\}$;
 - f) $F = \left\{x \in \mathbb{R}^* \mid \frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{|2x + 1| - \sqrt{2}} \geq 0\right\}$.
- 13 Determină perechile ordonate de numere întregi (x, y) pentru care $|x - y| \leq 2$ și $|1 + y| = 0$.
- 14 Fie mulțimile $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x^2 + 1}{7 - |4x + 1|} \geq 0\right\}$ și $B = \{x \in A \cap \mathbb{Z} \mid -x \in A\}$. Determină:
 - a) mulțimea A și precizează dacă este finită sau infinită;
 - b) mulțimea B și precizează cardinalul ei.
- 15 Precizează:
 - a) cel mai mare număr întreg care este soluție a inecuației: $\frac{2 + 3x}{4} < \frac{3 - x}{6}$;
 - b) cel mai mic număr întreg care este soluție a inecuației: $2(3 + 4x) - 5(x + 2) > 0$;
 - c) cel mai mic număr întreg care este soluție a inecuației $\frac{7 - \sqrt{3}}{2x + \pi} > 0$ (estimează valoarea numărului irațional π la $\frac{22}{7}$);
 - d) cel mai mare număr întreg care este soluție a inecuației $\frac{5\sqrt{3} - 3\sqrt{5}}{x\sqrt{15} - 4} < 0$, estimând corespunzător $\sqrt{15}$.

- 16** Se consideră punctele $A(5, 12)$ și $B(m, 4)$ în sistemul cartezian xOy . Determină valorile numărului real m , astfel încât distanța AB să fie cel mult 10.
- 17** Determină $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{n}{3} < \frac{15}{n} < \frac{n}{2}$.
- 18** Un copac cu înălțimea de 5 m crește lunar cu 4% din înălțimea sa. Demonstrează că după 5 luni înălțimea copacului este mai mare de 6 m.
- 19** Vrem să obținem 3 kg de soluție salină cu o concentrație de cel puțin 0,6%. Care este cantitatea minimă de sare pe care o folosim?

2. TEST DE EVALUARE

Timp de lucru: 45 de minute.

I. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

30 de puncte

- (5p)** 1. Care dintre următoarele numere întregi este soluție a inecuației $-3x - 7 \leq -7x - 27$?
A. -6; **B.** -3; **C.** 1; **D.** 4.
- (5p)** 2. Dacă $-7 \leq -2x + 13 \leq 15$, $x \in \mathbb{R}$, atunci mulțimea soluțiilor este:
A. $x \in [5, 6]$; **B.** $x \in [-6, -5]$; **C.** $x \in [-1, 10]$; **D.** $x \in [-5, 6]$.
- (5p)** 3. Numărul numerelor întregi din intervalul $[-4, 2]$ este:
A. 6; **B.** 2; **C.** 4; **D.** 7.
- (5p)** 4. Cel mai mic număr întreg care verifică inecuația $\frac{x}{-3} < \frac{x+1}{2}$ e:
A. 5; **B.** 2; **C.** 0; **D.** -3.
- (5p)** 5. Rotunjirea la cel mai apropiat întreg a numărului $3\sqrt{5}$ este:
A. 6; **B.** 5; **C.** 7; **D.** 8.
- (5p)** 6. Mulțimea soluțiilor reale ale inecuației $|2x - 3| < 5$ este:
A. $[-3, -2]$; **B.** $[-3, -1]$; **C.** $(-1, 4)$; **D.** $(-4, -2]$.

II. Scrie rezolvările complete.

60 de puncte

- (10p)** 1. Fie mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 2 > 4\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x < -6\}$.
a) Calculează $A \cap [-7; 3]$.
(20p) **b)** Calculează suma dintre cel mai mare număr întreg negativ din mulțimea A și cel mai mic număr natural din mulțimea A .
2. Ecologiștii au stabilit că numărul broaștelor, y , trebuie să fie mai mare sau egal cu triplul numărului de șerpi, x , pentru a fi menținut un ecosistem sănătos în pădurea Trei Brazi. În plus, numărul broaștelor și al șerpilor în total trebuie să fie cel puțin 400.
- (10p)** **a)** Pot fi 200 de șerpi în ecosistemul sănătos?
(20p) **b)** Care este numărul minim de broaște într-un ecosistem sănătos?

Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota se obține împărțind punctajul final la 10.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	I.5	I.6	II.1a	II.1b	II.2a	II.2b
Punctajul										
Nota										

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE 2

CALCUL ALGEBRIC ÎN $\mathbb{R}$

- L1. Operații cu numere reale reprezentate prin litere
- L2. Formule de calcul prescurtat
- L3. Descompuneri în factori utilizând reguli de calcul în $\mathbb{R}$
- L4. Frații algebrice
- L5. Operații cu fracții algebrice
- L6. Ecuații de forma $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$

Recapitulare și evaluare

- 1. Probleme recapitulative
- 2. Test de evaluare

LECȚIA 1 Operații cu numere reale reprezentate prin litere

Rezolvăm împreună

1 Efectuează următoarele operații cu numere reale:

$$a = 1234 \cdot 7 + 1234 \cdot 3;$$

$$b = 13\sqrt{7} - 15\sqrt{7};$$

$$c = \sqrt{5}(3\sqrt{10} + \sqrt{3}) - (15\sqrt{2} - \sqrt{15}); \quad d = (a^5)^2 : a^7 \cdot a^{-3}, \text{ unde } a \in \mathbb{R}^*.$$

Rezolvare:

Am putea să efectuăm înmulțirile și apoi adunarea, însă aceste operații pot fi anevoioase, de aceea scoatem factor comun pe 1234, obținând: $a = 1234 \cdot (7 + 3) = 1234 \cdot 10 = 12340$.

În mod similar, scoatem factor comun pe $\sqrt{7}$ și obținem: $b = (13 - 15) \cdot \sqrt{7} = -2\sqrt{7}$.

Pe baza distributivității și a regulilor de desfacere a parantezelor, obținem:

$$c = 3\sqrt{50} + \sqrt{15} - 15\sqrt{2} + \sqrt{15} = \underline{3 \cdot 5\sqrt{2}} + \underline{2\sqrt{15}} - \underline{15\sqrt{2}} = 2\sqrt{15}.$$

Conform regulilor de calcul cu puteri, $d = a^{2 \cdot 5} : a^7 \cdot a^{-3} = a^{10-7} \cdot a^{-3} = a^3 \cdot a^{-3} = a^0 = 1$.

2 În figura alăturată este reprezentat un teren de fotbal de formă dreptunghiulară, având lățimea l și lungimea L , exprimate în metri.

a) Exprimă aria și perimetrul terenului în funcție de lungime și lățime.

b) Pentru $l = 60$ m și $L = 105$ m, determină aria suprafeței de joc.

Rezolvare:

a) Terenul având formă dreptunghiulară, putem folosi formulele cunoscute: $P = 2l + 2L = 2(l + L)$ și $A = l \cdot L$.

b) Vom determina aria suprafeței de joc (aria dreptunghiului) prin înlocuire în formula ariei a valorilor $l = 60$ m și $L = 105$ m, obținând $A = 60 \cdot 105 \text{ m}^2 = 6300 \text{ m}^2$.

Ne amintim

- ♦ termeni asemenea
- ♦ operații cu numere reale
- ♦ ordinea efectuării operațiilor



Observăm și descoperim cunoștințe noi

Există mărimi, în geometrie, fizică, chimie și nu numai, care se exprimă folosind litere, având o anumită semnificație. Domeniul matematicii care utilizează preponderent literele în calcule este algebra, iar literele respective înlocuiesc, de fapt, numere reale. În acest capitol vă veți familiariza cu utilizarea literelor în calcule.

În clasa a șaptea s-a constatat că, într-un calcul cu radicali, termenii asemenea se pot reduce. Vom extinde regulile respective pentru calcule cu numere reale reprezentate prin litere.

Termenii utilizați în continuare au forma:

$$\text{Termen} = \text{Coeficient} \cdot \text{Parte literală}$$

unde **coeficientul** este un număr real, iar **partea literală** reprezintă un produs de puteri de numere reale reprezentate prin litere, care au exponenții numere naturale.

În tabelul de mai jos sunt identificați coeficienții și părțile literale pentru termenii $-6x^2$ și $\frac{3}{4}a^2b$.



Termenul	Coeficientul	Partea literală
$-6x^2$	-6	x^2
$\frac{3}{4}a^2b$	$\frac{3}{4}$	a^2b

• Coeficientul este legat de partea literală prin operația de înmulțire (înțelesă implicit). (De exemplu: $-6x^2 = -6 \cdot x^2$.)

• Atunci când lipsește partea literală, termenul se numește **termen liber**.

• Termenii care au aceeași parte literală se numesc **termeni asemenea**.

Exemple de perechi de termeni asemenea: $(2x^5; -7x^5)$; $(-3a^2b; \frac{1}{2}a^2b)$.

Nu sunt termeni asemenea: $(-2x; 3y)$; $(x^2; x)$; $(a^2b; ab^2)$.

Numim **expresie algebrică** o sumă a unor termeni (în înțelesul anterior). Ulterior, în cadrul lecției 5, vom extinde noțiunea de expresie algebrică și pentru sume în care intervin fracții algebrice.

Variabilele unei expresii algebrice sunt literele care apar în scrierea termenilor expresiei. Astfel, $E(x) = -3x^2 + 2x + 7$ este o expresie algebrică care depinde de o singură variabilă, x , iar $F(x, y) = 4x - 3y^2 + 1$ este o expresie care depinde de două variabile, x și y .

Valoarea numerică a unei expresii se obține prin înlocuirea variabilei/variabilelor cu numere reale precizate și efectuarea calculelor.



Aplicăm cunoștințele

1 Se consideră expresia algebrică $E(x) = 2x + 1$. Calculează:

- a) $E(0)$; b) $E\left(-\frac{1}{2}\right)$; c) $E(\sqrt{2}) - E(-\sqrt{2})$.

Rezolvare:

a) Înlocuindu-l pe x cu 0, obținem: $E(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$.

b) În mod similar: $E\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = -1 + 1 = 0$.

c) Deoarece $E(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} + 1$ și $E(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} + 1$, rezultă că $E(\sqrt{2}) - E(-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} + 1 - (-2\sqrt{2} + 1) = 4\sqrt{2}$.

2 Se consideră expresia algebrică $E(a, b) = 3a^2 + 2b - ab$. Calculează:

- a) $E(1, 0)$; b) $E(2, -1)$; c) $E(-1, \sqrt{2})$.

Rezolvare:

a) Înlocuim în expresie pe a cu 1, pe b cu 0 și obținem: $E(1, 0) = 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 0 - 1 \cdot 0 = 3$.

b) În mod similar: $E(2, -1) = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot (-1) - 2 \cdot (-1) = 12 - 2 + 2 = 12$.

c) Pentru $a = -1$ și $b = \sqrt{2}$, obținem: $E(-1, \sqrt{2}) = 3 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot \sqrt{2} - (-1) \cdot \sqrt{2} = 3 + 3\sqrt{2}$.



Observăm și descoperim cunoștințe noi

Dacă am avea de calculat numerele $a = (\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)$ sau $b = 1998 \cdot 2002$, cu relativă ușurință am obține $a = 1$ și $b = 3999996$. De fapt, există un tipar: odată efectuat produsul expresiilor $E(x) = x - 2$ și $F(x) = x + 2$, este suficient să-l înlocuim pe x cu $\sqrt{5}$ pentru a-l obține pe a sau cu 2000 pentru a-l obține pe b . Apare astfel necesitatea de a efectua calcule cu numere reale reprezentate prin litere.

Introducem în continuare operațiile cu expresii algebrice.

Adunarea și scăderea expresiilor algebrice presupune reducerea termenilor asemenea folosind metoda factorului comun.

Astfel: $c_1L \pm c_2L = (c_1 \pm c_2)L$, unde L este partea literală comună, iar c_1, c_2 sunt coeficienții.



Aplicăm cunoștințele

1 Calculează: a) $12x^2 - 7x^2$; b) $3a^2b - 4a^2b$; c) $-7x + 2x + 6x$.

Rezolvare:

a) Fiind numai termeni asemenea, îi vom reduce scoțând factor comun astfel: $12x^2 - 7x^2 = (12 - 7)x^2 = 5x^2$.

b) În mod similar: $3a^2b - 4a^2b = (3 - 4)a^2b = -a^2b$.

c) Procedând analog: $-7x + 2x + 6x = (-7 + 2 + 6)x = x$.

2 Calculează: a) $10x + 3a - 8x$; b) $2x^2 - x + 1 + (3x - 5x^2)$; c) $3a + 7b + c - (5b - 4a + c)$.

Rezolvare:

a) Vom evidenția termenii asemenea prin subliniere: $\underline{10x} + 3a - \underline{8x} = (10 - 8)x + 3a = 2x + 3a$ (care nu mai pot fi reduși, nefiind termeni asemenea).

b) Procedând ca la punctul anterior, obținem: $\underline{2x^2} - \underline{x} + 1 + \underline{3x} - \underline{5x^2} = (2 - 5)x^2 + (-1 + 3)x + 1 = -3x^2 + 2x + 1$.

c) Și în acest caz reducem termenii asemenea: $\underline{3a} + \underline{7b} + \underline{c} - \underline{5b} + \underline{4a} - \underline{c} = (3 + 4)a + (7 - 5)b = 7a + 2b$. Constatăm că au dispărut termenii cu partea literală c ; întrucât aveau coeficienții +1 și -1, aceștia s-au redus.

Observăm și descoperim cunoștințe noi

Înmulțirea a două expresii algebrice se realizează astfel:

• Dacă expresiile conțin fiecare câte un termen, atunci înmulțim coeficienții între ei și părțile literale între ele:

$$(c_1 L_1) \cdot (c_2 L_2) = c_1 c_2 L_1 L_2,$$

unde c_1, c_2 sunt coeficienții și L_1, L_2 sunt părțile literale.

• Dacă o expresie conține doar un termen și cealaltă o sumă/diferență de termeni, atunci, folosind distributivitatea înmulțirii față de operațiile de adunare și de scădere, înmulțim termenul primei expresii cu fiecare dintre termenii celeilalte expresii, conform regulii de mai sus, și adunăm rezultatele obținute:

$$F \cdot (T_1 \pm T_2 \pm \dots \pm T_k) = F \cdot T_1 \pm F \cdot T_2 \pm \dots \pm F \cdot T_k,$$

unde $k \in \mathbb{N}^*$ și $F, T_1, T_2, \dots, T_k$ sunt termenii care formează expresiile.

• Dacă ambele expresii sunt sume/diferențe de mai mulți termeni, atunci, folosind distributivitatea înmulțirii față de operațiile de adunare și de scădere, înmulțim fiecare termen al unei expresii cu fiecare termen al celeilalte expresii, adunăm rezultatele și reducem termenii asemenea:

$$(A_1 \pm A_2 \pm \dots \pm A_p)(B_1 \pm B_2 \pm \dots \pm B_k) = A_1 B_1 \pm A_1 B_2 \pm \dots \pm A_p B_k,$$

unde $p, k \in \mathbb{N}^*$, iar $A_1, A_2, \dots, A_p$ și $B_1, B_2, \dots, B_k$ sunt termenii care formează expresiile.

Aplicăm cunoștințele

1 Calculează:

a) $(2x) \cdot (-5x^2);$

b) $(-7ab^2) \cdot (-2a^3b);$

c) $3a(2a^2 - 5);$

d) $x(x^2 - x + 2).$

Rezolvare:

a) Vom înmulți coeficienții între ei și părțile literale între ele, astfel: $(2x) \cdot (-5x^2) = 2(-5)x^{1+2} = -10x^3.$

b) În mod asemănător: $(-7ab^2) \cdot (-2a^3b) = (-7)(-2)a^{1+3}b^{2+1} = 14a^4b^3.$

c) Conform regulilor de mai sus: $3a \cdot (2a^2 - 5) = (3a) \cdot (2a^2) - 3a \cdot 5 = 6a^3 - 15a.$

d) Folosind distributivitatea înmulțirii față de adunare/scădere, avem:

$$x(x^2 - x + 2) = x \cdot x^2 - x \cdot x + x \cdot 2 = x^3 - x^2 + 2x.$$

2 Calculează:

a) $(a+b)(a-b);$

b) $(x^2+x)(x-1);$

c) $(2x-1)(x^2-2x-1).$

Rezolvare:

a) Avem: $(a+b)(a-b) = a \cdot a - a \cdot b + b \cdot a - b \cdot b = a^2 - \cancel{ab} + \cancel{ba} - b^2 = a^2 - b^2.$

b) În mod similar: $(x^2+x)(x-1) = x^2 \cdot x - x^2 \cdot 1 + x \cdot x - x \cdot 1 = x^3 - \cancel{x^2} + \cancel{x^2} - x = x^3 - x.$

c) Procedăm în același mod:

$$(2x-1)(x^2-2x-1) = 2x \cdot x^2 - 2x \cdot 2x - 2x \cdot 1 - 1 \cdot x^2 + 1 \cdot 2x + 1 \cdot 1 = 2x^3 - 4x^2 - 2x - x^2 + 2x + 1 = 2x^3 - 5x^2 + 1.$$

Observăm și descoperim cunoștințe noi

Împărțirea expresiilor algebrice se realizează astfel:

• Dacă expresiile E și F au fiecare câte un termen, atunci se poate efectua împărțirea $E : F$ dacă partea literală a expresiei F nu conține litere diferite față de cele care formează partea literală a expresiei E și exponenții literelor care apar în expresia F sunt mai mici sau egali cu exponenții literelor similare din expresia E .

În acest caz, împărțirea se face împărțind coeficienții între ei (ca numere reale) și părțile literale între ele (ca puteri cu aceeași bază).

• Dacă expresia E conține o sumă/diferență de termeni, iar expresia F conține numai un termen și fiecare termen din E se poate împărți la F , atunci împărțirea $E : F$ se realizează împărțind fiecare termen din E la F și adunând rezultatele.



Aplicăm cunoștințele

1 Efectuează împărțirile:

a) $(12x^3) : (3x)$;

b) $(7a^2b) : (-a)$;

c) $(5a^2b^3c) : (-2ab^2)$.

Rezolvare:

a) Constatăm că sunt îndeplinite condițiile pentru efectuarea împărțirii, deci $(12x^3) : (3x) = (12 : 3) \cdot x^{3-1} = 4x^2$.

b) În mod analog, $(7a^2b) : (-a) = (7 : (-1)) \cdot a^{2-1}b = -7ab$.

c) Și în acest caz putem efectua împărțirea, obținând $(5a^2b^3c) : (-2ab^2) = [5 : (-2)] \cdot a^{2-1} \cdot b^{3-2} \cdot c = -2,5abc$.

2 Efectuează:

a) $(x^3 + 2x^2) : x$;

b) $(6ab^2 - 4a^3b) : (-2ab)$;

c) $(x^5 + 4x^3 - 6x^2) : (-x^2 - 2x^2)$.

Rezolvare:

a) Sunt îndeplinite condițiile pentru a putea efectua împărțirile, deci vom împărți fiecare termen din paranteză la x , obținând: $(x^3 + 2x^2) : x = x^3 : x + 2x^2 : x = x^2 + 2x$.

b) Conform regulilor anterioare, rezultă: $(6ab^2 - 4a^3b) : (-2ab) = (6ab^2) : (-2ab) - (4a^3b) : (-2ab) = -3b + 2a^2$.

c) În a doua paranteză avem doi termeni asemenea; îi reducem, apoi procedăm ca mai înainte:

$$(x^5 + 4x^3 - 6x^2) : (-3x^2) = (x^5) : (-3x^2) + (4x^3) : (-3x^2) - 6x^2 : (-3x^2) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x + 2.$$



Observăm și descoperim cunoștințe noi

Ridicarea la putere a numerelor reale reprezentate prin litere se realizează ridicând la acea putere atât coeficientul, cât și partea literală.

Într-un șir de operații cu numere reale reprezentate prin litere, se efectuează mai întâi ridicările la putere, apoi înmulțirile și împărțirile în ordinea în care apar și, la final, adunările și scăderile în ordinea apariției lor.

Atunci când există paranteze, se aplică regulile de mai sus calculelor din paranteza rotundă, aflată în interior, transformăm parantezele din interior către exterior și repetăm procedeul de câte ori este necesar.



Aplicăm cunoștințele

1 Completează căsuțele cu răspunsul corespunzător:

a) $(2x^3)^5 = \square x^{15}$;

b) $\left(-\frac{1}{2}x\right)^2 = \frac{1}{4}\square$;

c) $(-\sqrt{3}a^2b^5)^3 = -3\sqrt{3}\square$.

Rezolvare:

Aplicăm regulile prezentate mai sus:

a) $(2x^3)^5 = 2^5 \cdot (x^3)^5 = 32x^{15}$, deci în căsuță se va trece numărul 32;

b) $\left(-\frac{1}{2}x\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot x^2 = \frac{1}{4}x^2$, așadar se va completa cu x^2 ;

c) $(-\sqrt{3}a^2b^5)^3 = (-\sqrt{3})^3 (a^2)^3 (b^5)^3 = -3\sqrt{3}a^6b^{15}$, prin urmare în căsuță se va trece a^6b^{15} .

2 Calculează, respectând ordinea efectuării operațiilor:

a) $10x^2 - (7x - 6x^2 : 3x \cdot 2)^2$;

b) $4 + \{6x - 2x[(x^2)^3 : x^4 : x + 1]\} : (-x)$.

Rezolvare:

a) În paranteza rotundă efectuăm mai întâi împărțirea, apoi înmulțirea, iar în final scăderea: Obținem:

$$10x^2 - (7x - 6x^2 : 3x \cdot 2)^2 = 10x^2 - (3x)^2 = 10x^2 - 9x^2 = x^2.$$

b) Începem prin a efectua ridicarea la putere, apoi împărțirile din paranteza pătrată, pe care am transformat-o în paranteză rotundă: $4 + [6x - 2x(x^6 : x^4 : x + 1)] : (-x) = 4 + [6x - 2x(x + 1)] : (-x) = 4 + (6x - 2x^2 - 2x) : (-x) = 4 + (4x - 2x^2) : (-x) = 4 - 4 + 2x = 2x$.

Reține!

Operațiile cu numere reale reprezentate prin litere au la bază următoarele reguli:

- ♦ Adunările și scăderile sumelor algebrice se efectuează reducând termenii asemenea.
- ♦ Înmulțirile termenilor se realizează înmulțind coeficienții între ei și părțile literale între ele.
- ♦ Împărțirile, atunci când sunt posibile, se efectuează împărțind coeficienții între ei și părțile literale între ele.
- ♦ Ridicarea la putere se realizează ridicând atât coeficientul, cât și partea literală, la acea putere.
- ♦ Într-un șir de operații cu numere reale reprezentate prin litere, se efectuează mai întâi ridicările la putere, apoi înmulțirile și împărțirile în ordinea în care apar și, la final, adunările și scăderile în ordinea apariției lor.
- ♦ Atunci când există paranteze, se aplică regula anterioară calculului din paranteza rotundă, se transformă parantezele și se repetă raționamentul de câte ori este necesar.



Știi că...

- Cuvântul **algebră** provine din limba arabă (*al-jabr*). Al-Horezmi a elaborat începutul acestei ramuri a matematicii prin celebra sa lucrare *Cartea adunării și scăderii după metodele indiene*.
- Cuvântul *algorithm* are ca origine numele matematicianului persan Al-Horezmi. Algoritmul desemnează o metodă/procedură în care se prezintă pașii de urmat în rezolvarea unei probleme.



Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1 Lucru în echipe: Lucrând în echipe de câte doi elevi, copiați și completați tabelul, prima coloană fiind completată ca model.

Coeficientul	6	-3			
Partea literală	x^2	a^2b			
Termenul	$6x^2$		$\sqrt{3}x^2y$	$-\frac{1}{2}xyz^2$	a

2 Identifică perechile care conțin termeni asemenea:

- a)** $(1, 3x)$; **b)** $(2x^4, -3x^4)$; **c)** $(x^2, -2x^3)$; **d)** $(a^2b, -5a^2b)$.

3 Calculează:

- a)** $11x^2 - 9x^2$; **b)** $2a - \frac{a}{3}$; **c)** $4x - 11x + 7x$; **d)** $0,2a^3 + 1,3a^3 - 1,6a^3$;
e) $\frac{x}{2} - \frac{2x}{3}$; **f)** $3\sqrt{3}x^3 - \sqrt{12}x^3$; **g)** $10ab - 12ab + ab$; **h)** $-7x^2y + 2\sqrt{9}x^2y$.

4 Calculează:

- a)** $7x - 9x + 1$; **b)** $2a - 3b + 6b + 4a$; **c)** $3x^2 - x + 1 - (-x^2 + 2x)$;
d) $a + 2b - c + (-3a + b - 2c)$; **e)** $5x - 2y + x$; **f)** $3x - (2x - y) - 2y$;
g) $1 - (2 - x^2) + (-x^2)$; **h)** $2x^3 - 3x^2 - (3x^3 - 2x^2)$.

5 Calculează:

- a)** $11 - [4x - (-2x + 3) + (-2x - 1)]$; **b)** $2a^2 - 4 - [-3a^2 - (-5a + 1)]$.

6 Fie $a = x^2 - 2x$, $b = -2x^2 + 5x + 11$ și $c = -x^2 + 3x + 9$.

- a)** Pentru $x = -1$, ordonează crescător numerele a , b , c .
b) Calculează $b - (a - c)$.

7 Se consideră expresia algebrică $E(x) = 3x + 6$.

- a)** Determină suma $E(0) + E(-2)$.
b) Verifică egalitatea $E(1 - \sqrt{2}) = 15 - E(\sqrt{2})$.

- 8** Efectuează înmulțirile:
- a) $x^2 \cdot x^6$; b) $(3x) \cdot (4x^2)$; c) $(2x^3) \cdot (-5x^2)$; d) $\left(-\frac{x^2}{2}\right) \cdot (-4y)$.
- 9** Calculează:
- a) $(3xy^2) \cdot (-2x^2yz)$; b) $(-\sqrt{2}x) \cdot (\sqrt{3}xy)$; c) $x^3 \cdot (2x^2) \cdot (5x)$; d) $(3x^2y) \cdot (-2xz) \cdot (4y^2z^3)$.
- 10** Efectuează calculele de mai jos:
- a) $5(x+1)$; b) $x(x-6)$; c) $(a+3b)(-a)$;
d) $3x^2(2x-5)$; e) $2x^2y(3xy^2-2y)$; f) $\sqrt{2}ab(\sqrt{6}a-\sqrt{8}b)$.
- 11** Calculează:
- a) $(x+3)(x+1)$; b) $(2x+1)(5-x)$; c) $(x+2)(4-2x+x^2)$;
d) $(2x-3y)(x+2y)$; e) $(a-b)(a+b-1)$; f) $(x-y-z)(x-y+z)$.
- 12** Calculează:
- a) $x^{10} : x^8$; b) $(12a^6) : (-3a^3)$; c) $(-4x^2y^3) : (-6xy^2)$; d) $(10x^2 - 15xy) : (-5x)$.
- 13** Efectuează calculele:
- a) $7(x-1) - 6x$; b) $3(x+2) - 2(2x-4)$; c) $(x^3 - 2x^2) : x - x^2$; d) $(x^2 + 2x^2) : (-3x) - (1 - 5x)$.
- 14** Calculează, folosind regulile de calcul cu puteri:
- a) $(5x^2)^2$; b) $(-\sqrt{2}x)^4$; c) $\left(-\frac{1}{2}a^2b\right)^3$; d) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x^3y^2z\right)^4$.
- 15** Se consideră expresia $E(x) = 5x - x\{1 - x[6(x-4) + 2(10-3x)]\}$.
- a) Demonstrează că $E(x) = 4x - 4x^2$.
b) Determină valorile naturale ale lui n pentru care $E(n) \geq 0$.
- 16** Se consideră expresia $E(x) = (-\sqrt{3}x)^2 + x(2-x) - 2(x+3)$.
- a) Demonstrează că $E(x) = 2x^2 - 6$, pentru orice număr real x .
b) Determină valorile întregi ale lui n pentru care $E(n)$ este număr natural prim.
- 17** Un bloc de locuințe este construit cu parter și mai multe etaje. La parter sunt trei apartamente cu câte patru camere fiecare și la fiecare etaj sunt câte x apartamente cu câte trei camere fiecare.
- a) Determină numărul apartamentelor din bloc, știind că acesta are două etaje.
b) Dacă blocul are n etaje, $n \in \mathbb{N}^*$, determină numărul camerelor din bloc.

Din oficiu: 1 punct**AUTOEVALUARE****Timp de lucru: 20 de minute**

- 1** Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F. **3 puncte**
- a) Termenii $-\frac{1}{2}x^2y$ și $3xy^2$ sunt termeni asemenea. A F
b) Termenul liber din expresia $9 - 3x + x^2$ este 9. A F
c) Dacă $E(x) = x^3 - 2x + 1$, atunci $E(\sqrt{2}) = 1$. A F
- 2** Unește prin săgeți fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta. **4 puncte**
- Se consideră numerele reale $a = x + 2$ și $b = x^2 - 2x + 4$, unde $x \in \mathbb{R}$.
- a) Calculând $b + 2a - x^2$ se obține ... 1) 1;
b) Rezultatul calculului $x^3 - a \cdot b$ este ... 2) 4;
c) Efectuând $x^2 : [2 + (b-4) : x]^2 + 3$, $x \neq 0$, se obține ... 3) 8;
d) O valoare a lui x pentru care $a = b$ este ... 4) -8;
5) 0.
- 3** Fie $E(x) = x^2 - x + 1$, unde $x \in \mathbb{R}$. Determină valoarea numărului real k , știind că $E(x) \cdot E(-x) = kE(-x^2)$, pentru orice număr real x . **2 puncte**

LECȚIA 2 Formule de calcul prescurtat

Rezolvăm împreună

- 1 Calculează:
- $(\sqrt{7} + \sqrt{2})(\sqrt{7} - \sqrt{2})$;
 - $(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2$;
 - $(3 - \sqrt{11})^2$.

Rezolvare:

a) Folosind distributivitatea înmulțirii față de operațiile de adunare și de scădere, obținem:

$$(\sqrt{7} + \sqrt{2})(\sqrt{7} - \sqrt{2}) = \sqrt{7}(\sqrt{7} - \sqrt{2}) + \sqrt{2}(\sqrt{7} - \sqrt{2}) = 7 - \sqrt{14} + \sqrt{14} - 2 = 5;$$

$$b) (\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 = (\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3}) = \sqrt{5}(\sqrt{5} + \sqrt{3}) + \sqrt{3}(\sqrt{5} + \sqrt{3}) = 5 + \sqrt{15} + \sqrt{15} + 3 = 8 + 2\sqrt{15};$$

$$c) (3 - \sqrt{11})^2 = (3 - \sqrt{11})(3 - \sqrt{11}) = 3(3 - \sqrt{11}) - \sqrt{11}(3 - \sqrt{11}) = 9 - 3\sqrt{11} - 3\sqrt{11} + 11 = 20 - 6\sqrt{11}.$$

2 O persoană deține o suprafață de teren având forma pătratului $AMNP$ cu latura de lungime L (figura alăturată). Pentru a-și construi o locuință, a delimitat suprafața pătratică $ABCD$ cu latura de lungime l . Determină prin două metode aria suprafeței colorate rămase.

Rezolvare:

O primă modalitate de a afla aria suprafeței colorate constă în a scădea din aria pătratului $AMNP$, aria pătratului $ABCD$. Deci, $\mathcal{A}_{\text{colorată}} = L^2 - l^2$. (1)

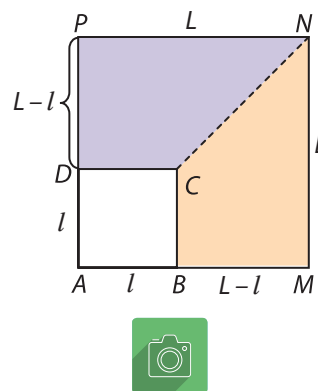
O altă modalitate de a determina aria suprafeței colorate constă în a aduna ariile trapezelor dreptunghice $BCNM$ și $DCNP$. Constatând că trapezele au lungimile bazelor egale cu l , respectiv L și înălțimea egală cu $L - l$, obținem:

$$\mathcal{A}_{BCMN} = \frac{(BC + MN) \cdot BM}{2} = \frac{(L + l) \cdot (L - l)}{2} = \mathcal{A}_{DCNP}.$$

În aceste condiții, aria suprafeței colorate este egală cu:

$$\mathcal{A}_{\text{colorată}} = \frac{2(L + l)(L - l)}{2} = (L + l)(L - l). \quad (2)$$

Fiind vorba despre aceeași suprafață colorată, din relațiile (1) și (2) deducem egalitatea $(L + l)(L - l) = L^2 - l^2$.



Ne amintim

- ♦ înmulțirea și ridicarea la putere a sumelor/diferențelor de numere iraționale

Observăm și descoperim cunoștințe noi

Formulele de calcul prescurtat sunt egalități generale care pot fi adaptate și particularizate în diferite situații. Astfel, o primă formulă este $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, oricare ar fi numerele reale a și b . Relația afirmă că produsul dintre suma și diferența a doi termeni este egal cu diferența pătratelor termenilor. Pentru a justifica formula, efectuăm calculele în membrul stâng:

$$(a + b)(a - b) = a(a - b) + b(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2.$$

Următoarele formule sunt cunoscute sub numele de **pătratul binomului**:

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\ (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2, \end{aligned}$$

Dicționar:

binom = sumă algebrică formată din doi termeni.

oricare ar fi numerele reale a și b .

Demonstrarea formulelor se realizează astfel:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a(a + b) + b(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a(a - b) - b(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$



Aplicăm cunoștințele

- 1 Calculează: **a)** $(x+2)(x-2)$; **b)** $(x-1)(x+1)(x^2+1)$; **c)** $98 \cdot 102$.

Rezolvare:

a) $(x+2)(x-2) = x^2 - 2^2 = x^2 - 4$; **b)** $(x-1)(x+1)(x^2+1) = (x^2-1^2)(x^2+1) = (x^2-1)(x^2+1) = (x^2)^2 - 1^2 = x^4 - 1$;
c) $98 \cdot 102 = (100-2)(100+2) = 100^2 - 2^2 = 10000 - 4 = 9996$.

- 2 Calculează: **a)** $(x+1)^2$; **b)** $(3x+4)^2$; **c)** $(x-5)^2$; **d)** $(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2$.

Rezolvare:

Aplicând formulele învățate, obținem:

a) $(x+1)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 = x^2 + 2x + 1$; **b)** $(3x+4)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 4 + 4^2 = 9x^2 + 24x + 16$;
c) $(x-5)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 - 10x + 25$; **d)** $(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2 = \sqrt{7}^2 - 2 \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3}^2 = 10 - 2\sqrt{21}$.

- 3 Dacă x este număr real nenul, astfel încât $x + \frac{1}{x} = \sqrt{5}$, calculează:

- a)** $x^2 + \frac{1}{x^2}$; **b)** $x^4 + \frac{1}{x^4}$; **c)** $x^3 + \frac{1}{x^3}$.

Rezolvare:

a) Cu formula pătratului binomului, din $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = \sqrt{5}^2$ obținem $x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 5$, așadar $x^2 + \frac{1}{x^2} = 3$.

b) Pornind de la egalitatea $x^2 + \frac{1}{x^2} = 3$, rezultă $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = 9$, adică $x^4 + 2 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} = 9$, deci $x^4 + \frac{1}{x^4} = 7$.

c) Nu cunoaștem (încă) formula pentru cubul binomului, de aceea vom calcula în două moduri produsul $\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$. Pe de o parte, $\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = \sqrt{5} \cdot 3 = 3\sqrt{5}$, iar pe de altă parte, $\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = x^3 + \frac{x}{x^2} + \frac{x^2}{x} + \frac{1}{x^3} = x^3 + \frac{1}{x} + x + \frac{1}{x^3} = x^3 + \frac{1}{x^3} + \sqrt{5}$. Egalând cele două relații, obținem $x^3 + \frac{1}{x^3} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$, de unde rezultă că $x^3 + \frac{1}{x^3} = 2\sqrt{5}$.

Reține!

Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, atunci: ♦ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$; ♦ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; ♦ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.



Observăm și descoperim cunoștințe noi

Raționalizarea numitorului unei fracții

Dacă am fi nevoiți să aproximăm numărul real $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$, acest lucru ar ridica dificultăți, deoarece ar trebui să

împărțim 2 la $\sqrt{3}-1 \approx 1,73... - 1$. Amplificând însă fracția inițială cu $\sqrt{3}+1$, am obține:

$$\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \sqrt{3}+1, \text{ care se aproximează cu ușurință la } 2,7320...$$

Raționalizarea numitorului unei fracții este operația de amplificare convenabilă a fracției, astfel încât aceasta să se transforme într-o fracție cu numitorul număr rațional.

Cantitatea prin care vom amplifica poartă numele de **conjugata numitorului**.

În clasa a VII-a am constatat că, pentru a raționaliza un numitor de forma $n\sqrt{a}$, $n \in \mathbb{Z}^*$, $a > 0$, al unei fracții, o vom amplifica cu $\sqrt{a}$.

Pentru $a, b > 0$, **conjugata expresiei $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ este $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ și reciproc**, deoarece $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$, conform formulei produsului sumei cu diferența.



Aplicăm cunoștințele

1 Raționalizează numitorii următoarelor fracții:

a) $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$;

b) $\frac{1}{\sqrt{10}+3}$;

c) $\frac{12}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$.

Rezolvare:a) Conjugata expresiei de la numitor este $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ și, amplificând, obținem:

$$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{5-3} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}.$$

b) Putem scrie numitorul sub forma $\sqrt{10}+3=\sqrt{10}+\sqrt{9}$, deci conjugata va fi $\sqrt{10}-\sqrt{9}=\sqrt{10}-3$. Amplificând,

$$\text{obținem } \frac{1}{\sqrt{10}+3} = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{9}}{\sqrt{10}+\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{9}}{(\sqrt{10}+\sqrt{9})(\sqrt{10}-\sqrt{9})} = \frac{\sqrt{10}-3}{10-9} = \sqrt{10}-3.$$

c) Scriind numitorul sub forma $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}=\sqrt{18}+\sqrt{12}$, se impune amplificarea cu $\sqrt{18}-\sqrt{12}=3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$,

$$\text{prin urmare } \frac{12}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{18}-\sqrt{12}}{\sqrt{18}+\sqrt{12}} \cdot \frac{12}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} = \frac{12(\sqrt{18}-\sqrt{12})}{18-12} = 2(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}).$$

Mai eficient ar fi fost să amplificăm de la început cu $3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$:

$$\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} \cdot \frac{12}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} = \frac{12(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})}{(3\sqrt{2})^2-(2\sqrt{3})^2} = \frac{12(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})}{18-12} = 2(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}) = 6\sqrt{2}-4\sqrt{3}.$$

2 Efectuează: a) $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{2}{\sqrt{2}}$;

b) $\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}$.

Rezolvare:

Raționalizând numitorul fiecărei fracții, obținem:

$$\text{a) } \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} - \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}+1-\sqrt{2}=1;$$

$$\text{b) } \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{4-3} = \sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3} = -1+\sqrt{4}=1.$$

Reține!

Pentru $n \in \mathbb{Z}^*$ și $a, b \in (0, \infty)$, cu $a \neq b$, raționalizarea numitorului se realizează astfel:

♦ $\frac{\sqrt{a}}{n\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{n \cdot a};$

♦ $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b};$

♦ $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}.$

Portofoliu

Formulele de calcul prescurtat sunt foarte importante și îți vor fi utile și în anii următori. Adaugă la portofoliul personal aceste relații, însoțite de câte un exemplu de aplicare a fiecăreia.

Proiect

În figura alăturată este reprezentat pătratul $ABCD$ având lungimea laturii $AB = a + b + c$. Prin paralele cu laturile opuse, pătratul a fost împărțit în nouă suprafețe. Urmărind modelul prezentat în secțiunea „Rezolvăm împreună”, problema 2, deduceți formula: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$, numită „pătratul unui trinom”.

	a	b	c	B
a	S_1	S_2	S_3	
b	S_4	S_5	S_6	
c	S_7	S_8	S_9	
D				C

**Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele****1** Completează spațiile libere cu răspunsul corespunzător:

a) $(x+3)(x-3) = \dots;$

b) $(5-x)(5+x) = \dots;$

c) $(2x+7)(2x-7) = \dots;$

d) $\left(x + \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right) = \dots;$

e) $(x\sqrt{2}+y)(x\sqrt{2}-y) = \dots;$

f) $(xy^2-z)(xy^2+z) = \dots$

2 Calculează:

a) $(x+2)^2;$

b) $(x+3)^2;$

c) $(7x+1)^2;$

d) $(x^2+5x)^2;$

e) $\left(x^3 + \frac{1}{2}\right)^2;$

f) $(\sqrt{5}x+3y)^2.$

3 Calculează:

a) $(x-3)^2;$

b) $(5-x)^2;$

c) $(3x-4)^2;$

d) $(x^2-x)^2;$

e) $\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2;$

f) $(4x-0,5y)^2.$

4 Completează spațiile libere pentru a obține egalități adevărate:

a) $(x+4)^2 = x^2 + 8x + \dots;$

b) $(x-2)^2 = \dots - 4x + \dots;$

c) $(x+3)(\dots) = x^2 - 9.$

5 Efectuează:

a) $(x+1)^2 - 2x;$

b) $(x-3)^2 + x(6-x);$

c) $(x+1)(x^2+1)(x-1) + 1.$

6 Stabilește dacă următoarele numere sunt raționale:

a) $(\sqrt{2}+1)^2 + (\sqrt{2}-1)^2;$

b) $(\sqrt{11}+\sqrt{7})(\sqrt{11}-\sqrt{7});$

c) $(2-\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5}+1)^2;$

d) $\left(\sqrt{7} + \frac{1}{2}\right)^2 - \sqrt{7}\left(1 - \frac{\sqrt{7}}{4}\right);$

e) $(\sqrt{3}+2)^2 - (\sqrt{3}-2)^2 + 2\sqrt{48};$

f) $(\sqrt{21}-4)(\sqrt{21}+4).$

7 Utilizând formulele învățate, calculează rapid:

a) $103 \cdot 97;$

b) $\sqrt{26^2 - 24^2};$

c) $201^2.$

8 Raționalizează numitorii fracțiilor:

a) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}};$

b) $\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}};$

c) $\frac{1}{\sqrt{11}-\sqrt{10}};$

d) $\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}};$

e) $\frac{1}{3-2\sqrt{2}};$

f) $\frac{3}{\sqrt{7}-2}.$

9 Calculează:

a) $\sqrt{12} - \frac{2}{2-\sqrt{3}};$

b) $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} - \frac{3}{\sqrt{3}};$

c) $\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{2}{2+\sqrt{2}};$

d) $\frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{7}}.$

10 Efectuează:

a) $2^{-1} : \frac{1}{4} + \frac{4}{\sqrt{3}+1} - \left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot 3;$

b) $\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}} - \left(\frac{1}{\sqrt{20}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) : 5^{-1} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}.$

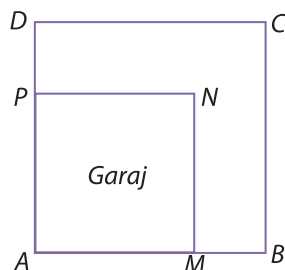
11 Determină media aritmetică a numerelor reale x și y , știind că $x-y = \sqrt{8}$ și $x^2 - y^2 = 24$.**12** Se consideră numerele reale x și y îndeplinind simultan condițiile: $x > y > 0$; $x+y = 3$ și $x^2 + y^2 = 5$. Determină $x \cdot y$ și $x-y$.**13** Determină valoarea numărului natural x din proporția $\frac{\sqrt{11}+\sqrt{3}}{2x} = \frac{x}{\sqrt{11}-\sqrt{3}}.$ **14** Lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic, exprimate în centimetri, sunt egale cu $1-x$, $2-x$ și $3-x$. Stabilește valoarea de adevăr a afirmației: „Ipotenuza triunghiului are lungimea egală cu 5 cm”.**15** Dacă $E(x) = (x+3)^2 - (2-x)^2 - 8x$, calculează media geometrică a numerelor $a = E(\sqrt{6})$ și $b = E(-\sqrt{6})$.**16** **a)** Dacă x este cifră nenulă, demonstrează că $\overline{x5^2} = 100n + 25$, unde $n = x \cdot (x+1)$.**b)** Calculează, folosind rezultatul anterior, 15^2 , 25^2 , 75^2 și 95^2 .**17** Compară numerele A și B , unde $A = 14^2 - 13^2 + 12^2 - 11^2 + \dots + 2^2 - 1^2$, iar $B = 20^2 - 19^2 + 18^2 - 17^2 + 16^2 - 15^2$.**18** Demonstrează că $(3x+1)^2 + (2-x)^2 + (x-1)^2 \geq 6$, oricare ar fi numărul real x .

**Din oficiu: 1 punct****AUTOEVALUARE****Timp de lucru: 40 de minute**

- 1** Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F. **3 puncte**
- a) $(2 + \sqrt{3})^2 = 7 + \sqrt{48}$; **A F**
- b) $(x - y)^2 = x^2 + 2xy - y^2$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$; **A F**
- c) Există numere reale x pentru care $(x - 1)^2 = x^2 + 1$. **A F**
- 2** Unește prin săgeți fiecare enunț din coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta. **4 puncte**
- a) Dacă $x \in \mathbb{N}$, $x > 1$ și $(1 - x)(1 + x)(1 + x^2) = 1 - x^{3+n}$, atunci valoarea lui n este ... **1) $4\sqrt{3}$;**
- b) Calculând $(x + 2)^2 + (x - 2)^2 - (x\sqrt{2})^2$ se obține rezultatul ... **2) 1;**
- c) Dacă $x > 0$ astfel încât $x + \frac{1}{x} = 6$, atunci suma $x^2 + \frac{1}{x^2}$ este egală cu ... **3) 34;**
- d) Dacă $a > b > 0$, $a \cdot b = 8$ și $a^2 + b^2 = 20$, atunci diferența $a - b$ este egală cu ... **4) 2;**
- 5) 8.**
- 3** Numerele pozitive a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi și $(b + c + a)(b + c - a) = 2bc$. Arată că triunghiul este dreptunghic. **2 puncte**

LECȚIA 3 Descompuneri în factori utilizând reguli de calcul în $\mathbb{R}$ **Rezolvăm împreună****Ne amintim**

- ♦ scoaterea factorului comun
- ♦ formule de calcul prescurtat



- 1** Pe un teren având forma pătratului $ABCD$, Andrei a construit un garaj de forma pătratului $AMNP$, ca în figura alăturată. Știind că au rămas 13 m^2 de teren neocupat de garaj, iar lungimile laturilor celor două pătrate se exprimă prin numere naturale, determină suprafața garajului.

Rezolvare:

Notăm lungimile laturilor celor două pătrate, exprimate în metri: $AB = l$ și $AM = x$, unde $l, x \in \mathbb{N}^*$. Suprafața terenului inițial este $\mathcal{A}_{ABCD} = l^2$, iar suprafața garajului este $\mathcal{A}_{AMNP} = x^2$. Conform enunțului $\mathcal{A}_{ABCD} - \mathcal{A}_{AMNP} = 13$, adică $l^2 - x^2 = 13$. Membrul stâng al egalității anterioare poate fi scris sub forma $l^2 - x^2 = (l - x)(l + x)$, deci vom obține $(l - x)(l + x) = 13$, cu $l, x \in \mathbb{N}^*$ și $l > x$. Deoarece $l - x < l + x$, deducem că $l - x = 1$ și $l + x = 13$, de unde $l = 7$ și $x = 6$. În concluzie, suprafața garajului este $\mathcal{A}_{AMNP} = x^2 = 36 \text{ m}^2$.

- 2** Demonstrează că următoarele numere sunt pătrate perfecte:

a) $a = 73 \cdot 91 + 91 \cdot 18$;

b) $b = 50^2 - 14^2$;

c) $c = 2^{200} + 2^{101} + 1$.

Rezolvare:

Urmărim să scriem numerele sub forma k^2 , unde $k \in \mathbb{N}$. O posibilă abordare ar fi să efectuăm calculele și să arătăm că rezultatul obținut este pătratul unui număr natural, însă acest demers este anevoios.

Încercăm să rezolvăm cerințele pe baza formulelor învățate și a proprietăților operațiilor cu numere reale.

a) Avem $a = 73 \cdot 91 + 91 \cdot 18 = 91 \cdot (73 + 18) = 91 \cdot 91 = 91^2$ și rezolvarea este încheiată folosind metoda factorului comun.

b) Utilizăm formula $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ și obținem $b = 50^2 - 14^2 = (50 - 14)(50 + 14) = 36 \cdot 64 = (6 \cdot 8)^2 = 48^2$.

c) Cu ajutorul formulei $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$, avem $c = (2^{100})^2 + 2 \cdot 2^{100} + 1 = (2^{100} + 1)^2$ și rezolvarea este încheiată.



Observăm și descoperim cunoștințe noi

În rezolvarea exercițiului anterior, am utilizat factorul comun și formulele de calcul prescurtat pentru a scrie într-o formă convenabilă anumite numere. Aceste tehnici sunt utile pentru descompunerea în factori a expresiilor algebrice.

Descompunerea în factori a unei expresii algebrice este operația de transformare a expresiei într-un produs de doi sau mai mulți factori. Operația de descompunere se consideră, de obicei, încheiată atunci când niciun factor nu mai poate fi descompus.

Cele mai folosite metode de descompunere în factori sunt:

- metoda factorului comun;
- metoda utilizării formulelor de calcul prescurtat;
- metoda grupării termenilor.



Metoda factorului comun are la bază proprietatea de distributivitate a înmulțirii numerelor reale față de operațiile de adunare și de scădere. Pentru orice numere reale a, x, y , avem:

$$ax + ay = a(x + y) \text{ și } ax - ay = a(x - y).$$

OBSERVAȚIE: Expresia identificată ca fiind factor comun trebuie să se afle în toți termenii sumei algebrice pe care o descompunem. Astfel, scrierea $x^2 + 3x + 2 = x(x + 3) + 2$ nu constituie descompunere în factori (rezultatul obținut este o sumă, nu un produs).

Aplicăm cunoștințele

Folosind metoda factorului comun, descompune în factori:

a) $x^3 + 2x^2$;

b) $x^3 + x^2 - 4x$;

c) $8xy + 12xz$;

d) $(x + 2)^2 + 5(x + 2)$;

e) $2a(a - b) + 4b(b - a)$;

f) $x(x - 1) - 5x + 5$.

Rezolvare:

a) Scoatem factorul comun x^2 și obținem: $x^3 + 2x^2 = x^2(x + 2)$.

b) Factorul comun este x , iar descompunerea este: $x^3 + x^2 - 4x = x(x^2 + x - 4)$.

c) Dăm $4x$ factor comun și obținem: $8xy + 12xz = 4x(2y + 3z)$.

d) Factorul comun este $x + 2$, iar descompunerea este: $(x + 2)^2 + 5(x + 2) = (x + 2)(x + 2 + 5) = (x + 2)(x + 7)$.

e) Remarcăm că $b - a = -(a - b)$, iar factorul comun este $2(a - b)$. Avem: $2a(a - b) - 4b(a - b) = 2(a - b)(a - 2b)$.

f) Mai întâi vom scoate factor comun pe -5 din ultimii doi termeni și ulterior pe $x - 1$, obținând:
 $x(x - 1) - 5(x - 1) = (x - 1)(x - 5)$.

Observăm și descoperim cunoștințe noi

Metoda utilizării formulelor de calcul prescurtat presupune folosirea formulelor de calcul prescurtat învățate:

- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ (formula diferenței de pătrate);
- $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ (restrângerea pătratului unui binom).
- $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$



Aplicăm cunoștințele

1 Descompune în factori următoarele expresii, folosind formula diferenței de pătrate:

a) $x^2 - 5^2$;

b) $4x^2 - 1$;

c) $x^2 - 3$;

d) $x^4 - 16$.

Rezolvare:

Evidențiind pătratele, vom obține:

a) $x^2 - 5^2 = (x - 5)(x + 5)$;

b) $4x^2 - 1 = (2x)^2 - 1^2 = (2x - 1)(2x + 1)$;

c) $x^2 - 3 = x^2 - \sqrt{3}^2 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$;

d) $x^4 - 16 = (x^2)^2 - 4^2 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x^2 - 2^2)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$.

2 Determină numerele întregi x și y , știind că $x^2 - y^2 = 11$.

Rezolvare:

Descompunând în factori, obținem $(x - y)(x + y) = 11$. Întrucât numărul 11 poate fi scris ca produs de două numere întregi în patru moduri, $11 = 1 \cdot 11 = 11 \cdot 1 = (-1) \cdot (-11) = (-11) \cdot (-1)$, putem determina patru perechi de numere întregi (x, y) . Pentru $x - y = 1$ și $x + y = 11$ obținem $(x, y) = (6, 5)$, iar celelalte perechi sunt $(x, y) \in \{(6, -5), (-6, -5), (-6, 5)\}$.

3 Descompune în factori următoarele expresii, folosind formula restrângerii pătratului unui binom:

- a) $x^2 + 6x + 9$; b) $x^2 - 8x + 16$; c) $4x^2 + 4x + 1$; d) $(x + y)^2 - 2(x + y) + 1$.

Rezolvare:

Vom evidenția cei trei termeni necesari scrierii formulei de calcul prescurtat, astfel:

- a) $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = (x + 3)^2$;
 b) $x^2 - 8x + 16 = x^2 - 2 \cdot 2x \cdot 4 + 4^2 = (x - 4)^2$;
 c) $4x^2 + 4x + 1 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1^2 = (2x + 1)^2$;
 d) $(x + y)^2 - 2(x + y) + 1 = (x + y)^2 - 2(x + y) \cdot 1 + 1 = (x + y - 1)^2$.

4 Completează căsuțele cu termenul potrivit pentru a obține pătratul binomului, apoi restrânge binomul:

- a) $x^2 + 4x + \square$; b) $x^2 - \square + 1$; c) $\square + 12x + 36$.

Rezolvare:

a) Urmărim identificarea termenilor din formula pătratului unui binom. Astfel: $x^2 + 4x + \square = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + \square$ și în căsuță trebuie completat cu $2^2 = 4$.

b) Fiind lipsă termenul din mijloc, în căsuță vom completa cu $2 \cdot x \cdot 1 = 2x$.

c) Constatăm că $36 = 6^2$, iar $12x = 2 \cdot x \cdot 6$ și deducem că în căsuță trebuie completat cu x^2 .

5 Determină numerele reale x și y care verifică relația $x^2 + y^2 + 5 = 2x - 4y$.

Rezolvare:

Vom evidenția două expresii care reprezintă pătratele unor binoame. Relația dată se scrie sub forma:

$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 0$, echivalentă cu $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 0$. Deoarece $(x - 1)^2 \geq 0$ și $(y + 2)^2 \geq 0$, pentru orice numere reale x și y , deducem că avem egalitate numai dacă $x - 1 = 0$ și $y + 2 = 0$, adică $x = 1$ și $y = -2$.

6 Demonstrează că $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$, pentru orice numere reale a și b .

Rezolvare:

Ridicând la pătrat, obținem $2(a^2 + b^2) \geq a^2 + b^2 + 2ab$, deci $2a^2 + 2b^2 - a^2 - b^2 - 2ab \geq 0$, care este echivalentă cu $(a - b)^2 \geq 0$. Ultima relație fiind adevărată pentru orice numere reale a și b , inegalitatea inițială este demonstrată.



Observăm și descoperim cunoștințe noi



Metoda grupării termenilor constă în asocierea convenabilă a termenilor, astfel încât să identificăm un factor comun.



Aplicăm cunoștințele

1 Descompune în factori următoarele expresii, folosind o grupare convenabilă a termenilor:

- a) $ax + ay + bx + by$; b) $ax - by + ay - bx$; c) $ax + by - bx - ay$.

Rezolvare:

a) Constatăm că este util să grupăm primii doi termeni și ultimii doi (evidențiem termenii grupați prin sublinierea lor cu același simbol), obținând: $\underline{ax} + \underline{ay} + \underline{bx} + \underline{by} = a(x + y) + b(x + y) = (x + y)(a + b)$.

b) Grupăm primul și al treilea termen, respectiv al doilea și al patrulea: $\underline{ax} - \underline{by} + \underline{ay} - \underline{bx} = a(x + y) - b(x + y) = (a - b)(x + y)$.

c) O grupare utilă (nu singura) este între primul și al patrulea termen, respectiv al doilea și al treilea, astfel: $\underline{ax} + \underline{by} - \underline{bx} - \underline{ay} = a(x - y) - b(x - y) = (x - y)(a - b)$.

2 Descompune în factori:

- a) $x^3 + x^2 + 4x + 4$; b) $x^2 + (a + b)x + ab$; c) $x^2 + (a - b)x - ab$.

Rezolvare:

a) Grupăm primii doi termeni și ultimii doi, obținând: $x^3 + x^2 + 4x + 4 = x^2(x + 1) + 4(x + 1) = (x + 1)(x^2 + 4)$.

b) Mai întâi desfacem parantezele și grupăm termenii unu și doi, respectiv trei și patru, astfel:

$x^2 + ax + bx + ab = x(x + a) + b(x + a) = (x + a)(x + b)$.

c) În mod asemănător punctului anterior, obținem: $x^2 + ax - bx - ab = x(x + a) - b(x + a) = (x + a)(x - b)$.

3 Descompune în factori:

a) $x^3 + 2ax^2 + xa^2$;

b) $x^3 - xb^2$;

c) $a^2 + 2a + 2b - b^2$.

Rezolvare:

a) Constatăm că îl putem scoate pe x factor comun, obținând: $x^3 + 2ax^2 + xa^2 = x(x^2 + 2xa + a^2) = x(x + a)^2$.

b) În mod similar, $x^3 - xb^2 = x(x^2 - b^2) = x(x - b)(x + b)$.

c) În scopul obținerii unui factor comun, gruparea utilă este între termenii al doilea și al treilea, respectiv între primul și ultimul, astfel: $a^2 + 2a + 2b - b^2 = a^2 - b^2 + 2(a + b) = (a - b)(a + b) + 2(a + b) = (a + b)(a - b + 2)$.

Reține!

- ♦ Scrierea unei sume algebrice (expresie algebrică) ca un produs de doi sau mai mulți factori se numește **descompunere în factori**.
- ♦ Principalele metode de descompunere în factori sunt:
 - metoda factorului comun;
 - metoda utilizării formulelor de calcul prescurtat;
 - metoda grupării termenilor.



Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1 Transcrie pe caiet tabelul alăturat și completează căsuțele cu răspunsul corect, conform modelului:

Suma algebrică	Factorul comun	Descompunerea în factori
Model: $x^4 + 10x^2$	x^2	$x^2(x^2 + 10)$
a) $x^5 - 7x^3$		$x^3 \cdot \dots$
b) $12xy + 18x^2$	$6x$	$6x \cdot \dots$
c) $a(x + 2) + (x + 2)^2$		$\dots \cdot \dots$



2 Folosind metoda factorului comun, descompune în factori:

a) $ax + 10x$;

b) $5x^2 + 6x$;

c) $9xy - 3xz$;

d) $ax - ay + az$;

e) $4xy - 6xz + 10x^2$;

f) $12x^2y + 18xy^2$.

3 Descompune în factori expresiile următoare:

a) $x(y + z) + 3(y + z)$;

b) $x(x - 2) - 5(x - 2)$;

c) $x(x + 10) + 10(x + 10)$;

d) $x(x - 5) - y(x - 5) + (x - 5)$;

e) $(x + 1)^3 - (x + 1)^2$;

f) $2x + 1 + a(2x + 1)$.

4 Descompune în factori:

a) $x(a - b) + 3(b - a)$;

b) $(x - 7)^2 + 2(7 - x)$;

c) $x^2(x - 3) - 5(3 - x)$.

5 Determină numerele reale a și x cunoscând că $x - a = 3$ și $ax - x^2 = 15$.

6 Dacă a, b, x și y sunt numere reale astfel încât $2x - y = 11$, iar $2x(a - b) + y(b - a) = 22$, calculează $a^2 - ab - 2a + 1$.

7 Descompune în factori:

a) $x^2 - 11^2$;

b) $x^2 - 25$;

c) $4 - x^2$;

d) $-x^2 + 49$;

e) $x^2 - 7$;

f) $5x^2 - 1$.

8 Scrie expresiile următoare ca produs de cel puțin doi factori:

a) $x^2 - a^2$;

b) $4x^2 - 9y^2$;

c) $25x^2y^2 - z^2$;

d) $(a + b)^2 - c^2$;

e) $(a + 2)^2 - 9$;

f) $a^4 - 1$.

9 Alege litera corespunzătoare răspunsului corect.

Dacă $A = 10^2 - 9^2 + 8^2 - 7^2 + \dots + 2^2 - 1^2$ și $B = 1 + 2 + 3 + \dots + 10$, valoarea de adevăr a afirmației „ $A = B$ ” este:

a) adevărată;

b) falsă.

10 Stabilește care dintre următoarele numere este număr rațional:

$a = \sqrt{82^2 - 18^2}$;

$b = \sqrt{50^2 - 41^2}$;

$c = \sqrt{101^2 - 20^2}$.

11 Dacă x și y sunt numere reale astfel încât $x^2 - 4y^2 = 12$ și $x + 2y = 6$, calculează $3 + 2y - x$.

- 12** Determină perechile de numere întregi care verifică relația $x^2 = 3 + y^2$.
- 13** Restrânge la pătratul unui binom următoarele expresii:
- a) $x^2 + 2x + 1$; b) $x^2 + 2x\sqrt{7} + 7$; c) $x^2 - 4x\sqrt{3} + 12$;
d) $x^2 - 6x + 9$; e) $49x^2 + 14x + 1$; f) $x^2 - 8xy + 16y^2$.
- 14** Completează căsuțele cu termenul potrivit pentru a obține pătratul unui binom, apoi restrânge binomul:
- a) $x^2 + 10x + \square$; b) $x^2 - \square + 121$; c) $\square + 4x + 4$;
d) $x^2 - \square + 49$; e) $x^2 - x + \square$; f) $4x^2 + 1 + \square$.
- 15** Descompune în factori:
- a) $(x + y)^2 + 2(x + y) + 1$; b) $x(x + 6) + 9$;
c) $x^2 + x + \frac{1}{4}$; d) $(2x + 1)^2 - 2(2x + 1) \cdot x + x^2$;
e) $(x + 1)^2 - 2(x^2 - 1) + (x - 1)^2$; f) $9x^2 - 6x(3x - 1) + (3x - 1)^2$.
- 16** Dacă a, b sunt numere reale, demonstrează că $A = (7a + 2b)(7a + 2b - 6) + 9$ este număr real nenegativ.
- 17** Determină numerele reale x și y care verifică relația $x^2 + y^2 + 16 = 8y$.
- 18** Demonstrează că numărul $A = \sqrt{9 + x^2} \cdot \sqrt{x^2 + 8}$ este natural, oricare ar fi cifra nenulă x .
- 19** Scrie numerele următoare ca pătrate ale unor numere reale, conform modelului prezentat:
- a) $4 + 2\sqrt{3}$; b) $7 + 2\sqrt{6}$; c) $3 - 2\sqrt{2}$.
- Model: $4 + 2\sqrt{3} = 3 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1 + 1 = \sqrt{3}^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1 + 1^2 = (\sqrt{3} + 1)^2$.
- 20** Calculează radicalii dubli de mai jos, eventual scriind numărul de sub radical ca pătrat al unui număr real, conform modelului prezentat:
- a) $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$; b) $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$; c) $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$.
- Model: $9 - 4\sqrt{5} = 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} + \sqrt{5}^2 = (2 - \sqrt{5})^2$, iar $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} = |2 - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - 2$.
- 21** Grupând convenabil termenii, descompune în factori:
- a) $x^3 + x^2 + ax + a$; b) $mx^3 + mx^2 + ax + a$;
c) $x^3 + x^2 + 7x + 7$; d) $x^3 + x^2 - 9x - 9$;
e) $x^3 - x^2 - x + 1$; f) $2x^3 - x^2 + 2x - 1$.
- 22** Descompune în factori, conform modelului prezentat:
- a) $x^2 + 9x + 14$; b) $x^2 - 8x + 15$; c) $x^2 + 7x + 6$;
d) $x^2 - 2x - 15$; e) $x^2 + x - 2$; f) $x^4 - 3x^2 - 4$.
- Model: $x^2 + 3x + 2 = x^2 + (2 + 1)x + 2 \cdot 1 = x^2 + 2x + x + 2 \cdot 1 = x(x + 2) + 1(x + 2) = (x + 2)(x + 1)$.
- 23** **Lucru în echipă:** Organizați în echipe de câte patru elevi, realizați individual descompunerile în factori, prezentați-le colegilor de echipă, validați-le prin discuții în cadrul echipei, sub coordonarea profesorului și, prin reprezentanți, prezentați un exercițiu la tablă.
- a) $x^2 + 5x + 4$; b) $x^2 + 7x + 10$; c) $x^2 - 6x + 8$;
d) $x^2 + 3x - 10$; e) $x^2 - x - 12$; f) $x^4 + 8x^2 - 9$.
- 24** Completează căsuțele cu rezultatul corect:
- a) $x^3 - 9x = x(x - 3) \square$; b) $ax^2 - a^3 = a(a + x) \square$;
c) $x^2 + 4x + 4 - y^2 = (x + 2 + y) \square$; d) $x^2 + 2x + 2y - y^2 = (x + y) \square$.
- 25** Dacă a, b, c, d sunt numere reale astfel încât $a + b = \sqrt{3}$ și $c + d = \sqrt{12}$, demonstrează că $ac + bd + ad + bc$ este număr natural.
- 26** Dacă lungimile laturilor triunghiului ABC verifică relația $a^2 + bc = b^2 + ac$, demonstrează că triunghiul este isoscel.
- 27** Calculează suma numerelor reale a, b, c , știind că $x^3 + 4x^2 + 3x = (x + a)(x + b)(x + c)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
- 28** Determină soluțiile reale ale ecuației $x^2 + 4x - 12 = 0$.
- 29** Determină valorile numărului întreg n pentru care numărul $A = n^2 + 8n + 7$ este număr natural prim.
- 30*** Demonstrează că numărul $A = x^4 + x^2 + 1$ este număr natural compus, oricare ar fi numărul natural $x, x \geq 2$.



Din oficiu: 1 punct

AUTOEVALUARE

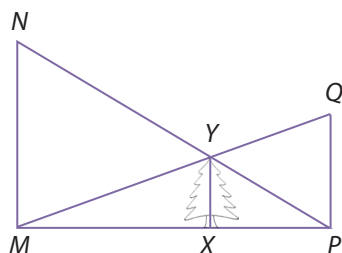
Timp de lucru: 40 de minute

- 1** Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F. **3 puncte**
 Descompunând în factori expresiile din membrul stâng, obținem rezultatele precizate:
- a) $x^2 + 3x - 10 = x(x + 3) - 10$; **A F**
 b) $x^3 - 16x = x(x^2 - 16)$; **A F**
 c) $x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5)$. **A F**
- 2** Încercuiește litera care indică singurul răspuns corect: **4,5 puncte**
- i) Descompunând în factori expresia $x^3 + 2x^2 + x$, obținem:
 a) $(x^2 + 2) \cdot x$; **b) $x(x - 2)(x + 2)$; c) $x(x + 1)^2$.**
- ii) Descompunând în factori expresia $1 - x - x^2 + x^3$, obținem:
 a) $(1 + x)^2(x - 1)$; **b) $(x - 1)^2(x + 1)$; c) $(1 - x)(1 + x)(2 + x)$.**
- iii) Dacă m și n sunt numere reale, iar $x^2 - 6x + 5 = (x + m)(x + n)$, atunci, calculând $m^2 + n^2$, vom obține:
 a) -6 ; **b) 26 ; c) 5 .**
- 3** Determină numărul natural n pentru care $A = 3n^2 - 2n - 1$ este număr natural prim. **1,5 puncte**

LECȚIA 4 Frații algebrice

Rezolvăm împreună

În figura de mai jos sunt reprezentate schematic două blocuri de locuit, MN și PQ , între care a crescut un pin, XY , astfel încât punctele M , P și X sunt coliniare. Dacă $\{Y\} = NP \cap MQ$, $MN = B$ și $PQ = b$, $0 < b < B$, determină înălțimea pinului XY .



Rezolvare:

Deoarece $XY \parallel MN$, rezultă că triunghiurile PXY și PMN sunt asemenea, deci $\frac{XY}{MN} = \frac{PY}{PN}$ (1). Totodată, $PQ \parallel MN$ conduce la asemănarea triunghiurilor PYQ și NYM , deci $\frac{PY}{NY} = \frac{PQ}{MN}$ (2). Din relațiile (1) și (2) deducem că $\frac{XY}{MN} = \frac{PY}{PN} = \frac{PY}{NY + PY} = \frac{PQ}{MN + PQ}$, adică $\frac{XY}{B} = \frac{b}{B + b}$, de unde găsim înălțimea pinului: $XY = \frac{B \cdot b}{B + b}$.



Ne amintim

- definiția unei fracții ordinare
- amplificarea și simplificarea fracțiilor

Observăm și descoperim cunoștințe noi

Din exemplul anterior, constatăm că înălțimea pinului este o mărime care se exprimă ca raport de numere reale care conțin litere. În continuare, vom studia astfel de rapoarte.

Se numește **fracție algebrică** un raport în care termenii sunt expresii algebrice care depind de una sau de mai multe variabile. Frațiile algebrice se notează în funcție de variabilele (literele) care apar în scriere:

$$F(x) = \frac{x+2}{x-2}; F(b, B) = \frac{B \cdot b}{B + b}; F(t) = \frac{1}{4 - t^2}.$$

O fracție algebrică are sens (este definită) pentru toate numerele reale pentru care numitorul este diferit de zero.

Mulțimea tuturor numerelor reale pentru care o fracție algebrică are sens formează domeniul de definiție al fracției algebrice. Mai precis, **fracția algebrică $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ are domeniul de definiție $\{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$.**

Dacă $F(x)$ este o fracție algebrică și a un număr real din domeniul de definiție al fracției, înlocuind variabila cu a , obținem numărul real $F(a)$, numit valoarea numerică a fracției algebrice în a .

Pentru fracțiile algebrice care depind de mai multe variabile se obține o valoare numerică înlocuind variabilele cu un set de valori din domeniul de definiție.

EXEMPLU: 1. Fracția algebrică $F(x) = \frac{x+3}{x^2+1}$ are numărătorul $x+3$ și numitorul x^2+1 . Domeniul de definiție al fracției este mulțimea $\mathbb{R}$, deoarece $x^2+1 \neq 0$, pentru orice număr real x . Valoarea numerică $F(1)$ se obține prin înlocuirea lui x cu 1 și este $F(1) = \frac{1+3}{1^2+1} = 2$.

2. Fracția algebrică $F(x, y) = \frac{x \cdot y}{x+y}$ are numărătorul $x \cdot y$ și numitorul $x+y$. Fracția are sens pentru orice numere reale x și y , cu $x \neq -y$. Valoarea numerică $F(2, 1)$ se obține prin înlocuirea lui x cu 2 și a lui y cu 1 și este $F(2, 1) = \frac{2 \cdot 1}{2+1} = \frac{2}{3}$.

Amplificarea și simplificarea fracțiilor algebrice

Amplificarea unei fracții algebrice este operația de înmulțire a numărătorului și a numitorului fracției cu o aceeași expresie algebrică nenulă (sau număr real nenul).

Amplificând cu $A(x)$ fracția algebrică $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, obținem $F(x) = \frac{A(x) \cdot P(x)}{A(x) \cdot Q(x)} = \frac{P(x) \cdot A(x)}{Q(x) \cdot A(x)}$, $A(x) \neq 0$.

EXEMPLU: Vom amplifica fracția algebrică $F(x) = \frac{x+3}{x-4}$, $x \neq 4$, cu: **a)** 6; **b)** $x-1$, $x \neq 1$.

Conform regulii de mai sus, obținem: **a)** $\frac{x+3}{x-4} = \frac{6(x+3)}{6(x-4)} = \frac{6x+18}{6x-24}$; **b)** $\frac{x+3}{x-4} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x-4)} = \frac{x^2+2x-3}{x^2-5x+4}$.

Simplificarea unei fracții algebrice este operația de împărțire a numărătorului și a numitorului fracției printr-o aceeași expresie nenulă (sau număr real nenul).

Expresia prin care simplificăm trebuie să fie un factor comun aflat în descompunerile termenilor fracției:

$$F(x) = \frac{A(x) \cdot B(x)}{A(x) \cdot C(x)} = \frac{B(x)}{C(x)}, A(x) \neq 0.$$

EXEMPLU: Vom simplifica următoarele fracții algebrice: **a)** $\frac{4x^2}{6xy}$, $x \neq 0, y \neq 0$; **b)** $\frac{x^2+x}{x^3+x}$, $x \neq 0$.

a) Termenii fiind descompuși în factori, simplificarea se va face prin $2x$, rezultând: $\frac{4x^2}{6xy} = \frac{2x}{3y}$.

b) Termenii raportului pot fi descompuși în factori astfel: $x^2+x = x(x+1)$ și $x^3+x = x(x^2+1)$. Simplificarea se va face prin x , rezultând: $\frac{x^2+x}{x^3+x} = \frac{x(x+1)}{x(x^2+1)} = \frac{x+1}{x^2+1}$.

OBSERVAȚIE: O fracție algebrică poate fi amplificată cu orice expresie nenulă, dar se poate simplifica numai prin expresii care sunt factori comuni aflați în descompunerile numărătorului și numitorului fracției date.



Aplicăm cunoștințele

1 Se consideră fracția algebrică: $F(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

a) Determină valorile reale ale lui x pentru care fracția nu este definită.

b) Determină domeniul de definiție al fracției algebrice.

c) Calculează $F(0)$, $F(1)$ și $F(\sqrt{2})$.

Rezolvare:

a) Fracția nu este definită atunci când numitorul este egal cu zero, adică $x+1=0$, deci pentru valoarea $x=-1$.

b) Domeniul de definiție este mulțimea valorilor lui x pentru care numitorul este nenul: $\{x \in \mathbb{R} \mid x+1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

c) Valorile 0, 1 și $\sqrt{2}$ aparțin domeniului de definiție, iar $F(0) = \frac{0-1}{0+1} = -1$, $F(1) = \frac{1-1}{1+1} = 0$ și $F(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = 3-2\sqrt{2}$.

2 Amplifică fracția algebrică $F(x) = \frac{x-2}{x^2-2x+4}$, unde $x \in \mathbb{R}$, cu:

a) $x+2, x \neq -2$;

b) $x^2+2x+4, x \in \mathbb{R}$.

Rezolvare:

a) $\frac{x-2}{x^2-2x+4} = \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{x^2-4}{x^3+8}$; b) $\frac{x-2}{x^2-2x+4} = \frac{(x^2+2x+4)(x-2)}{(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)} = \frac{x^3-8}{x^4+4x^2+16}$.

3 Adu la același numitor următoarele perechi de fracții algebrice:

a) $\frac{x+1}{3x}$ și $\frac{x^2}{2}, x \neq 0$;

b) $\frac{x+4}{x-2}$ și $\frac{x+1}{x+2}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$;

c) $\frac{1}{x^2+x}$ și $\frac{x-3}{x^2-1}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

Rezolvare: Identificăm numitorul comun: descompunerea acestuia trebuie să conțină drept factori numitorii fracțiilor implicate. Dacă este posibil, este util să descompunem numitorii fracțiilor date.

a) Numitorul comun este $6x$, iar fracțiile se rescriu astfel: $\frac{x+1}{3x} = \frac{2x+2}{6x}$, respectiv $\frac{x^2}{2} = \frac{3x^3}{6x}$.

b) Numitorul comun este $(x-2)(x+2) = x^2-4$, iar fracțiile se rescriu astfel: $\frac{x+4}{x-2} = \frac{x^2+6x+8}{x^2-4}$, respectiv $\frac{x+1}{x+2} = \frac{x^2-x-2}{x^2-4}$.

c) Descompunem numitorii: $x^2+x = x(x+1)$ și $x^2-1 = (x-1)(x+1)$. Numitorul comun este $x(x-1)(x+1) = x^3-x$, iar fracțiile se rescriu astfel: $\frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{x-1}{x^3-x}$, respectiv $\frac{x-3}{x^2-1} = \frac{x-3}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2-3x}{x^3-x}$.

4 Simplifică următoarele fracții algebrice:

a) $\frac{x^2-9}{x^2+6x+9}, x \neq -3$;

b) $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2-2xy}, x \neq y$;

c) $\frac{x^3+x^2+9x+9}{x^3+x^2-4x-4}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 2\}$.

Rezolvare:

Descompunând termenii rapoartelor, obținem: a) $\frac{x^2-9}{x^2+6x+9} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)^2} = \frac{x-3}{x+3}$;

b) $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2-2xy} = \frac{(x-y)(x+y)}{(x-y)^2} = \frac{x+y}{x-y}$; c) $\frac{x^3+x^2+9x+9}{x^3+x^2-4x-4} = \frac{(x+1)(x^2+9)}{(x+1)(x-2)(x+2)} = \frac{x^2+9}{x^2-4}$.

Reține!

- Fracția algebrică este un raport de forma $F = \frac{P}{Q}$, unde P și Q sunt expresii algebrice.
- Fracția algebrică $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ nu are sens pentru valorile reale ale lui x care anulează numitorul ($Q(x) = 0$).
- Domeniul de definiție al fracției algebrice $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ este mulțimea $\{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$.
- Dacă a este număr real din domeniul de definiție al fracției $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, atunci numărul real $F(a)$ care se obține înlocuind pe x cu valoarea numerică a se numește valoarea fracției algebrice în a .
- Amplificarea și simplificarea se realizează după regulile cunoscute, astfel: $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A(x) \cdot P(x)}{A(x) \cdot Q(x)}, A(x) \neq 0$, pentru amplificare, și $\frac{P(x) \cdot D(x)}{Q(x) \cdot D(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)}, D(x) \neq 0$, pentru simplificare.
- Amplificarea se poate face cu orice expresie nenulă, dar simplificarea se poate face numai prin factorii comuni ai descompunerilor termenilor raportului.



Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

- 1** Determină valorile lui x pentru care nu au sens următoarele fracții algebrice:
- a) $\frac{x^2+1}{x-7}$; b) $\frac{11}{2x+5}$; c) $\frac{x-2}{9-x^2}$; d) $\frac{1}{x^2+x}$.
- 2** Determină valorile reale ale lui x pentru care are sens fiecare dintre următoarele fracții algebrice:
- a) $\frac{1}{x-5}$; b) $\frac{x+1}{3x-1}$; c) $\frac{2x}{x^2-16}$; d) $\frac{x+3}{x^2+1}$.
- 3** Găsește valorile reale ale lui m , știind că următoarele fracții algebrice au domeniul de definiție indicat:
- a) $\frac{1}{x-3}$; $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$; b) $\frac{x+6}{x^2-m}$; $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
- 4** Se consideră fracția algebrică $F(x) = \frac{x+2}{x}$, unde x este număr real nenul. Calculează $F(1)$, $F(-1)$, $F(\sqrt{2})$.
- 5** Fie $F(x) = \frac{mx-1}{x-2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $m \in \mathbb{R}$, o fracție algebrică. Știind că $F(3) = 5$, determină valorile reale a , $a \neq 2$, pentru care $F(a) = 3$.
- 6** Amplifică fracția $\frac{x-1}{x+2}$, $x \neq -2$, cu: a) 3; b) x^2 ; c) $x+1$; d) $x-2$.
- 7** Adu la același numitor următoarele fracții algebrice:
- a) $\frac{2}{5}$ și $\frac{1}{x}$, $x \neq 0$; b) $\frac{x+1}{x}$ și $\frac{3}{x^2}$, $x \neq 0$;
 c) $\frac{x-2}{2x}$ și $\frac{x+1}{3x}$, $x \neq 0$; d) $\frac{x+2}{x^2(x+1)}$ și $\frac{3x-5}{x(x+1)^2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$;
 e) $\frac{x-3}{(x+2)^2}$ și $\frac{2x+7}{x+2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$; f) $\frac{1}{x-3}$ și $\frac{x+4}{x+3}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$.
- 8** Adu la același numitor următoarele fracții algebrice:
- a) $\frac{x+1}{x^2+5x+6}$ și $\frac{2x-1}{x^2-9}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 3\}$; b) $\frac{1}{x^2-2x+1}$, $\frac{x+3}{x^2-1}$ și $\frac{x-2}{2x+2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
- 9** Simplifică fracția algebrică $F(x)$ prin factorul $D(x)$ în fiecare dintre următoarele situații:
- a) $F(x) = \frac{3x^2+5x}{x^2}$; $D(x) = x$, $x \neq 0$; b) $F(x) = \frac{2x+2}{x^2+x}$, $D(x) = x+1$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$;
 c) $F(x) = \frac{x^2-x}{x^2-1}$, $D(x) = x-1$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; d) $F(x) = \frac{x^2+5x+6}{x^2+6x+8}$, $D(x) = x+2$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, -2\}$.
- 10** Simplifică fracțiile de mai jos:
- a) $\frac{3x}{x^2+5x}$, $x \neq -5$, $x \neq 0$; b) $\frac{x^2+x}{x^2-x}$, $x \neq 0$, $x \neq 1$; c) $\frac{x^2+2x}{x^2-4}$, $x \neq -2$, $x \neq 2$;
 d) $\frac{x^2+6x+8}{x^2-16}$, $x \neq -4$, $x \neq 4$; e) $\frac{x^3-x}{5x^2-5x}$, $x \neq 0$, $x \neq 1$; f) $\frac{x^3-x^2-4x+4}{x^3-2x^2-x+2}$, $x \neq -1$, $x \neq 1$, $x \neq 2$.
- 11** Adu la același numitor, simplificând fracțiile algebrice:
- a) $\frac{x^2}{x^2+x}$ și $\frac{4x}{2x+2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$; b) $\frac{x^2-3x}{x^2-9}$, $\frac{x^4-x^2}{x^3+3x^2}$ și $\frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 0, 3\}$.
- 12** Se consideră fracția algebrică $F(x) = \frac{x^3+x^2-4x-4}{x^2+3x+2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; -1\}$. Demonstrează că $F(a)$ este număr întreg, pentru orice număr natural a .
- 13** Se consideră fracția algebrică $F(x) = \frac{3x+12}{x^2+5x+4}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, -1\}$. Determină valorile întregi ale lui a pentru care $F(a)$ este număr întreg.

- 14 Simplifică fracția algebrică $F(x) = \frac{x^2-1}{x^4-1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ și determină valoarea maximă a acesteia.

Din oficiu: 1 punct

AUTOEVALUARE

Timp de lucru: 40 de minute



- 1 Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F. **3 puncte**
- a) Fracția algebrică $\frac{x-3}{1-x}$ are sens pentru orice $x \in \mathbb{R}$. **A F**
- b) Simplificând fracția $\frac{2x+2}{x^2-1}$, $x \neq 1$ și $x \neq -1$, obținem $\frac{2}{x-1}$. **A F**
- c) Dacă $F(x) = \frac{3x-4}{x-1}$, $x \neq 1$, atunci $F(2) = 2$. **A F**
- 2 Alege litera corespunzătoare singurului răspuns corect: **3 puncte**
- i) Numitorul comun al fracțiilor $\frac{x+1}{x^2+2x}$ și $\frac{1}{x^2-4}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$, este:
- a) $x+2$; **b) x^3-4x ; c) x^3+4x .**
- ii) Amplificând cu $x+y$ fracția $\frac{2}{x-y+1}$, obținem:
- a) $\frac{2x+2y}{x^2+x-y+y^2}$; **b) $\frac{2x+2y}{x^2+x+y-y^2}$; c) $\frac{2x-2y}{x^2-y^2+x+y}$.**
- iii) Simplificând fracția $\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1}$, $x \neq 1$, obținem:
- a) $\frac{x-3}{x-2}$; **b) $\frac{x+2}{x-1}$; c) $\frac{x-2}{x-1}$.**
- 3 Se consideră fracția $F(x) = \frac{x^2+6x+9}{x^2+4x+3}$, $x \neq -3$ și $x \neq -1$. **3 puncte**
- Determină valorile întregi ale lui a pentru care $F(a)$ este număr întreg.

LECȚIA 5 Operații cu fracții algebrice



Rezolvăm împreună

a) Verifică egalitatea $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n \cdot (n+1)}$, oricare ar fi numărul natural nenul n .

b) Demonstrează că numărul $A = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{9 \cdot 10}$ aparține intervalului $I = (0, 1)$.

Rezolvare:

a) În membrul stâng, numitorul comun este $n(n+1)$, de aceea amplificăm prima fracție cu $n+1$ și pe a doua cu n , obținând: $\frac{n+1}{n} - \frac{n}{n+1} = \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$, exact ce trebuia dovedit.

b) Aplicând relația de la a) pentru $n = 1, n = 2, \dots, n = 10$, obținem $A = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right)$.

Atunci $A = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$, așadar $A \in (0, 1)$.



Ne amintim

- operațiile cu fracții ordinare
- ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor

Observăm și descoperim cunoștințe noi

Rezolvarea exercițiului anterior arată că unele calcule se pot simplifica dacă operațiile asemănătoare se efectuează o singură dată, folosind rapoarte care conțin litere în expresiile lor.

Operațiile care se pot efectua cu fracții algebrice sunt: adunarea, scăderea, înmulțirea, împărțirea și ridicarea la putere.

Adunarea și scăderea fracțiilor algebrice se efectuează astfel:

- dacă fracțiile au același numitor, atunci copiem numitorul și adunăm/scădem numărătorii.

$$\frac{A}{C} + \frac{B}{C} = \frac{A+B}{C}; \quad \frac{A}{C} - \frac{B}{C} = \frac{A-B}{C}, \quad C \neq 0.$$

- dacă fracțiile au numitori diferiți, atunci le aducem la același numitor, apoi aplicăm regulile de mai sus.

$$\frac{A}{C} \pm \frac{B}{D} = \frac{A \cdot D \pm B \cdot C}{C \cdot D}, \quad C \neq 0, D \neq 0.$$

EXEMPLU: Calculează: a) $\frac{x+1}{x+7} + \frac{3x-2}{x+7}$, $x \neq -7$; b) $\frac{2x-1}{x-3} - \frac{x+2}{x-3}$, $x \neq 3$; c) $\frac{3}{x} - \frac{2x-1}{x^2}$, $x \neq 0$.

Rezolvare:

a) Fracțiile au același numitor, deci $\frac{x+1}{x+7} + \frac{3x-2}{x+7} = \frac{x+1+3x-2}{x+7} = \frac{4x-1}{x+7}$.

b) În mod similar, $\frac{2x-1}{x-3} - \frac{x+2}{x-3} = \frac{2x-1-(x+2)}{x-3} = \frac{x-3}{x-3} = 1$.

c) Numitorul comun este x^2 ; amplificăm prima fracție cu x și obținem $\frac{3}{x} - \frac{2x-1}{x^2} = \frac{3x-2x+1}{x^2} = \frac{x+1}{x^2}$.

Înmulțirea fracțiilor algebrice se realizează înmulțind numărătorii între ei și numitorii între ei. Este indicat să descompunem termenii rapoartelor și să simplificăm rezultatul.

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}, \quad B \neq 0, D \neq 0.$$

EXEMPLU: Efectuează: a) $\frac{x}{x+1} \cdot \frac{x-2}{x-1}$; $x \neq -1$ și $x \neq 1$; b) $\frac{x^3}{x^2-2x} \cdot \frac{x^2-4}{x^2+2x}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$.

Rezolvare:

a) Nu avem ce simplifica, deci $\frac{x}{x+1} \cdot \frac{x-2}{x-1} = \frac{x(x-2)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^2-2x}{x^2-1}$.

b) Descompunem în factori și simplificăm termenii rapoartelor: $\frac{x^3}{x(x-2)} \cdot \frac{(x-2)(x+2)}{x(x+2)} = \frac{x^3}{x^2} = x$.

Inversa fracției algebrice $\frac{C}{D}$ este fracția algebrică $\frac{D}{C}$, $D \neq 0, C \neq 0$.

Împărțirea fracțiilor algebrice se efectuează înmulțind prima fracție cu inversa celei de-a doua.

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C}, \quad B \neq 0, C \neq 0, D \neq 0.$$

Ridicarea la putere a unei fracții algebrice se realizează prin ridicarea la acea putere a numărătorului și numitorului fracției. Dacă $n \in \mathbb{Z}^*$, atunci $\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}$, $A \neq 0, B \neq 0$.

EXEMPLU: Calculează: a) $\frac{x}{x+3} : \frac{x^2+x}{5x+15}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 0\}$; b) $\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{-1} : \frac{x^2-1}{x^2-4}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1, 2\}$.

Rezolvare:

a) $\frac{x}{x+3} : \frac{x^2+x}{5x+15} = \frac{x}{x+3} \cdot \frac{5(x+3)}{x(x+1)} = \frac{5}{x+1}$; b) $\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{-1} : \frac{x^2-1}{x^2-4} = \frac{x-1}{x+2} \cdot \frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-2}{x+1}$.

Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor se realizează după regulile cunoscute de la operațiile cu numere reale.



Aplicăm cunoștințele

1 Calculează:

a) $\frac{3x+2}{x-1} + \frac{x}{1-x}; x \neq 1;$

b) $\frac{4x}{x^2-4} - \frac{x-1}{x-2} + \frac{x}{x+2}; x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\};$

c) $\frac{x^2+4x}{x^2+3x+2} \cdot \left(2 - \frac{x}{x+2}\right)^{-1}; x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, -2, -1\};$

d) $\frac{x^2+x}{2x+4} : \frac{x^2-x}{x+3} : \frac{x+1}{x^2+x-2}; x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, -1, 0, 1\}.$

Rezolvare:

a) Întrucât $1-x = -(x-1)$, obținem: $\frac{3x+2}{x-1} + \frac{x}{1-x} = \frac{3x+2}{x-1} - \frac{x}{x-1} = \frac{3x+2-x}{x-1} = \frac{2x+2}{x-1}.$

b) Constatăm că numitorul comun este $(x-2)(x+2)$, iar după amplificare rezultă:

$$\frac{4x}{x^2-4} - \frac{x-1}{x-2} + \frac{x}{x+2} = \frac{4x - (x+2)(x-1) + x(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x-2}.$$

c) Respectând ordinea efectuării operațiilor și în urma descompunerii în factori a termenilor, produsul devine:

$$\frac{x^2+4x}{x^2+3x+2} \cdot \left(2 - \frac{x}{x+2}\right)^{-1} = \frac{x(x+4)}{(x+1)(x+2)} \cdot \left(\frac{x+4}{x+2}\right)^{-1} = \frac{x(x+4)}{(x+1)(x+2)} \cdot \frac{x+2}{x+4} = \frac{x}{x+1}.$$

d) Descompunem în factori termenii rapoartelor și efectuăm operațiile în ordinea scrierii, obținând:

$$\frac{x^2+x}{2x+4} : \frac{x^2-x}{x+3} : \frac{x+1}{x^2+x-2} = \frac{x(x+1)}{2(x+2)} : \frac{x(x-1)}{x+3} : \frac{(x-1)(x+2)}{x+1} = \frac{x+3}{2}.$$

2 Se consideră expresia $E(x) = 3 - 2x \cdot \left[1 - \left(\frac{x}{x+2} - \frac{1}{x}\right) : \frac{x-2}{x}\right].$ a) Determină valorile reale ale lui x pentru care expresia are sens.b) Demonstrează că $E(x) = \frac{x+6}{x+2}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}.$ c) Determină valorile întregi ale lui a pentru care $E(a)$ este număr întreg.d) Rezolvă ecuația $E(x) = x.$

Rezolvare:

a) Expresia are sens dacă $x+2 \neq 0$, $x-2 \neq 0$ și $x \neq 0$, deci $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}.$ b) Respectând ordinea operațiilor, obținem $E(x) = 3 - 2x \cdot \left[1 - \left(\frac{x}{x+2} - \frac{1}{x}\right) : \frac{x-2}{x}\right] =$

$$= 3 - 2x \cdot \left(1 - \frac{x^2-x-2}{x(x+2)} \cdot \frac{x}{x-2}\right) = 3 - 2x \cdot \left(1 - \frac{x+1}{x+2}\right) = 3 - 2x \cdot \frac{2x}{x+2} = \frac{x+6}{x+2}.$$

c) Pentru $a \in \mathbb{Z} \setminus \{-2, 0, 2\}$, $E(a)$ este număr întreg dacă și numai dacă $a+2$ divide pe 4, ceea ce este echivalent cu $a \in \{-6, -4, -3, -1, 0, 2\}$. Valorile care convin sunt $a \in \{-6, -4, -3, -1\}.$ d) Ecuația este: $\frac{x+6}{x+2} = x$, echivalentă cu $x^2+x-6=0$. Descompunând în factori, obținem $(x-2)(x+3)=0$ cu soluțiile $x \in \{-3, 2\}$. Convine doar $x = -3$, deoarece pentru $x = 2$ expresia nu are sens.

Reține!

- Cu fracții algebrice se pot efectua următoarele operații: adunarea, scăderea, înmulțirea, împărțirea și ridicarea la putere.
- Ordinea efectuării operațiilor este următoarea: întâi se efectuează ridicările la putere, apoi înmulțirile și împărțirile, în ordinea în care sunt scrise, iar la final se efectuează adunările și scăderile în ordinea în care sunt scrise.
- Dacă apar paranteze, calculele din paranteze se efectuează cu prioritate, începând cu parantezele din interior (de regulă rotunde) către cele din exterior (pătrate, acolade).



Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1 Calculează:

a) $\frac{x}{x+1} + \frac{3}{x+1}; x \neq -1;$

c) $\frac{3x+7}{x-3} - \frac{x}{x-3}; x \neq 3;$

e) $\frac{11x+7}{x^2-5x} - \frac{10x-2}{x^2-5x}; x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 5\};$

b) $\frac{x-1}{x+2} + \frac{5}{x+2}; x \neq -2;$

d) $\frac{7x+1}{x^2+2x} + \frac{5-4x}{x^2+2x}; x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\};$

f) $\frac{2x}{x-4} + \frac{x-1}{x-4} + \frac{4x-5}{4-x}; x \neq 4.$

2 Efectuează:

a) $\frac{x}{2} - \frac{3x}{4}; x \in \mathbb{R};$

c) $\frac{x-1}{x+1} + \frac{3x-1}{2x+2}; x \neq -1;$

e) $\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x^2-x}; x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\};$

b) $\frac{x-1}{x} + \frac{1-2x}{3x}; x \in \mathbb{R}^*;$

d) $\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}; x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\};$

f) $\frac{x-1}{x^2-2x} - \frac{x+1}{x^2+2x}; x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}.$

3 Calculează:

a) $\frac{3x+1}{x} + \frac{x-2}{3-x} - \frac{2x^2-7x-7}{x^2-3x}; x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3\};$

b) $\frac{x-1}{x+1} - \frac{x}{x+3} - \frac{2}{x^2+4x+3}; x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -1\}.$

4 Calculează:

a) $\frac{x}{2} \cdot \frac{6}{x^2}; x \neq 0;$

c) $\frac{x^2-5x}{x+1} \cdot \frac{x^2-1}{x^2-25}; x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, -1, 5\};$

e) $\frac{5x+10}{2x+6} : \frac{x^2+4x+4}{x^2+3x}; x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 0\};$

b) $\frac{x+2}{3x+3} \cdot \frac{x^2+x}{x^2-4}; x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 2\};$

d) $\frac{x}{x-7} : \frac{x+2}{x-7}; x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 7\};$

f) $\frac{x+1}{x+5} : \frac{1}{x+2} : \frac{x^3+3x^2+2x}{x^2+6x+5}; x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, -2, -1, 0\}.$

5 Efectuează:

a) $\left(\frac{x}{x+2}\right)^2 \cdot \frac{x^2-4}{x^3-2x^2}; x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\};$

b) $\left(\frac{x+6}{x+4}\right)^{-1} \cdot \frac{3x+18}{x^2-16}; x \in \mathbb{R} \setminus \{-6, -4, 4\};$

c) $\frac{2x^2}{5x+15} : \left(\frac{x^2+x}{x^2+4x+3}\right)^{-1}; x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 0\};$

d) $\left(1 + \frac{3}{x^2-4}\right) : \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^{-1}; x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 2\}.$

6 Calculează:

a) $\frac{3x+6}{x+1} \cdot \left(x - \frac{2x+1}{x+2}\right); x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\};$

b) $\left(1 - \frac{x-1}{2x+3}\right) : \frac{x+4}{4x^2-9}; x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-4, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\};$

c) $\left(\frac{3x+1}{x-3} - 1\right) : \frac{x^2+3x+2}{x^2-3x}; x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0, 3\};$

d) $\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1}\right) \cdot \left(\frac{9x^2-1}{x^3-x^2}\right)^{-1}; x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 1\right\}.$

7 Efectuează:

a) $\left(\frac{x-4}{x^2-16} \cdot \frac{3x+12}{x-5} + 1\right) \cdot \left(\frac{x-2}{x-5}\right)^{-1}; x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 2, 4, 5\};$

b) $\left(\frac{2}{x} + \frac{x^2-1}{1+2x+x^2} : \frac{3x}{x+1}\right) : \frac{x+5}{x^2-x}; x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, -1, 0, 1\};$

c) $\left[\left(\frac{x}{2} - \frac{2}{x}\right) : \frac{2x+4}{4x} + 5\right] \cdot \frac{x}{x^2+6x+9}; x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 0\}.$

- 8** Se consideră expresia $E(x) = \left(\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x-1} \right) : \frac{(x-1)(x-5)}{2x^2-4x+2}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 5\}$.
- a)** Demonstrează că $(x+1) \cdot E(x)$ este număr natural, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 5\}$.
- b)** Determină numerele întregi a pentru care $E(a)$ este număr întreg.
- 9** Fie $E(x) = 2 - \frac{x}{x-1} \cdot \left[\left(\frac{1}{x} \right)^2 - \frac{2}{x} + 1 \right]$, unde x este număr real, $x \neq 0$ și $x \neq 1$.
- a)** Demonstrează că $E(x) = \frac{x+1}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.
- b)** Găsește valoarea minimă a produsului $E(n) \cdot E(-n)$, unde n este număr natural mai mare decât 1.
- 10** Se consideră expresia $E(x) = \left(3x - \frac{2x^2+1}{x} \right) : \frac{x^3-x}{(x+1)^2-(x-1)^2}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.
- a)** Arată că $E(x) = \frac{4}{x}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.
- b)** Demonstrează că numărul $E(t) \cdot E\left(\frac{1}{t}\right)$ este pătrat perfect, pentru orice număr întreg t cu $|t| \geq 2$.
- 11** Fie $E(x) = \left(\frac{x}{x+2} - \frac{2}{2-x} \right) : \left(\frac{x^2-4}{4} \right)^{-1}$, unde x este număr real, $x \neq -2$ și $x \neq 2$.
- a)** Demonstrează că $E(x) = \frac{x^2+4}{4}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.
- b)** Determină numerele naturale n pentru care $E(n) \leq 5$.
- 12** Se consideră expresia $E(t) = \left(1 + \frac{t^2+9}{t^2-9} \right) : \left(\frac{2}{t+3} - \frac{1}{3-t} - \frac{2t-3}{t^2-9} \right)$, unde t este număr real, $t \neq -3$, $t \neq 0$ și $t \neq 3$.
- a)** Demonstrează că $E(t) = 2t$, oricare ar fi $t \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 3\}$.
- b)** Calculează media geometrică a numerelor $a = E(\sqrt{2}+1)$ și $b = E(\sqrt{2}-1)$.
- 13** Fie $E(x) = \left[\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right) \cdot \frac{3x}{x-2} - \frac{2}{x+1} \right] \cdot \frac{x^3+2x^2+x}{x^2+4x+3}$.
- a)** Găsește valorile reale ale lui x pentru care expresia dată are sens.
- b)** Demonstrează că expresia are valoare constantă pentru orice număr real x din domeniul de definiție.
- 14** **Lucru în echipe:** Formați echipe de câte patru elevi. Împărțiți membrilor echipei cerințele exercițiului următor, rezolvați cerințele și prezentați colegilor de echipă rezolvarea voastră.
- Se consideră expresiile: $F(x) = x - \frac{x}{1-x}$, $x \neq 1$, și $G(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2-2x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.
- a)** Determină $S(x) = F(x) + G(x)$ și stabilește mulțimea valorilor pentru care $S(x)$ este bine definită.
- b)** Calculează $D(x) = F(x) - G(x)$ și stabilește mulțimea valorilor pentru care $D(x)$ are sens.
- c)** Determină $P(x) = F(x) \cdot G(x)$ și stabilește mulțimea valorilor pentru care $P(x)$ nu are sens.
- d)** Găsește $C(x) = F(x) : G(x)$ și precizează valoarea minimă a lui $C(n)$, atunci când $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$.
- 15** Se consideră expresia $E(x) = \left(1 + \frac{2}{x^2-1} \right)^{-1} : \left(\frac{1}{2x-2} + \frac{x^2}{1-x+x^2-x^3} \right)$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
- a)** Verifică egalitatea $1 - x + x^2 - x^3 = (1+x^2)(1-x)$, oricare ar fi numărul real x .
- b)** Demonstrează că $E(x) = 2 - 2x$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

**Din oficiu: 1 punct****AUTOEVALUARE****Timp de lucru: 40 de minute****1** Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F. **3 puncte**

a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{2x+1}, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0\right\}.$

A F

b) $\frac{3x}{x-2} - \frac{x+4}{x-2} = \frac{2x+4}{x-2}, x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}.$

A F

c) $\left(\frac{x+5}{x+1}\right)^{-1} = \frac{x+1}{x+5}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, -1\}.$

A F**2** Unește prin săgeți fiecare enunț din coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta. **4 puncte**

a) $\frac{2x-1}{x^2-x} + \frac{x-2}{x^2-x} = \dots, x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\};$

1) -3;

b) $\left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{x+1}\right) - 1 = \dots, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\};$

2) 2;

c) $\frac{2x}{x+3} : \frac{x^2-3x}{x^2-9} = \dots, x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 3\};$

3) $\frac{2}{x}$;

d) $x - \left(x - \frac{9}{x}\right) \cdot \left(\frac{x+3}{x}\right)^{-1} = \dots, x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}.$

4) $\frac{3}{x}$;**5) 3.****3** Fie $E(x) = \left[1 + \frac{x^3+6x}{2x} : \left(\frac{3}{x} + \frac{x}{2}\right)\right] \cdot \left(\frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x}\right)$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-6, -1, 0\}.$ **2 puncte**Determină numerele întregi n pentru care $E(n) \geq 0,25$.**LECȚIA 6** Ecuații de forma $ax^2 + bx + c = 0, a, b, c \in \mathbb{R}$ **Rezolvăm împreună**

În figura alăturată este reprezentată o ramă dreptunghiulară, $ABCD$, cu suprafața de 180 cm^2 . În interior este centrată o fotografie dreptunghiulară cu dimensiunile de 12 cm și 9 cm . Laturile fotografiei sunt respectiv paralele cu laturile ramei și se găsesc la $x \text{ cm}$ de latura cea mai apropiată a ramei. Determină dimensiunile ramei.

Rezolvare:

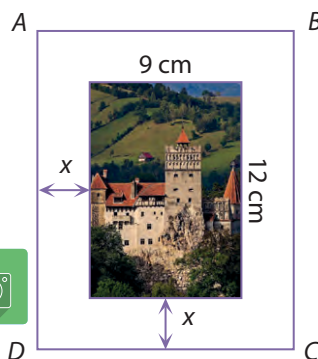
Deoarece dreptunghiul $ABCD$ are dimensiunile $AB = 9 + 2x \text{ (cm)}$ și $BC = 12 + 2x \text{ (cm)}$, informația privind aria ramei ne spune că $(9 + 2x)(12 + 2x) = 180$.

Efectuând calculele, obținem ecuația: $2x^2 + 21x - 36 = 0$.

Descompunem în factori expresia din membrul stâng:

$2x^2 + 21x - 36 = 2x^2 + 24x - 3x - 36 = (x + 12)(2x - 3)$. Așadar, avem de rezolvat

ecuația $(x + 12)(2x - 3) = 0$. Egalând cu zero fiecare factor, găsim soluțiile: $x = -12$ și $x = 1,5$. Întrucât nu putem avea $x = -12$, obținem că $x = 1,5 \text{ cm}$, așadar dimensiunile ramei sunt $AB = 9 + 2x = 12 \text{ cm}$ și $BC = 12 + 2x = 15 \text{ cm}$. Constatăm că pe parcursul rezolvării am avut de aflat soluțiile ecuației $2x^2 + 21x - 36 = 0$. Deoarece descompunerea în factori a expresiei nu este întotdeauna o operație facilă, vom prezenta în continuare un algoritm de rezolvare cu aplicabilitate generală.



Observăm și descoperim cunoștințe noi

O ecuație de forma $ax^2 + bx + c = 0$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, se numește **ecuație de gradul al doilea**.

Numerele a, b, c se numesc **coeficienții** ecuației, iar x este **necunoscuta**. Dacă nu se precizează o altă mulțime de apartenență a necunoscutei, vom considera că x ia valori în mulțimea $\mathbb{R}$.

Numărul real α este **soluție** (rădăcină) a ecuației dacă verifică ecuația, adică $a \cdot \alpha^2 + b \cdot \alpha + c = 0$.

A rezolva o ecuație înseamnă a-i determina toate soluțiile (a stabili mulțimea soluțiilor sale). O ecuație de gradul al doilea are cel mult două soluții reale.

Două ecuații de gradul al doilea se numesc **echivalente** dacă au aceleași soluții.

Ecuatiile $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ și $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$, având $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}^*$, sunt echivalente dacă și numai dacă $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

Algoritmul de rezolvare a ecuației de gradul al doilea este următorul:

I. Atunci când lipsesc unii termeni (coeficienții respectivi sunt nuli), spunem că ecuația are formă incompletă. Se disting situațiile:

- Dacă $b = 0$ și $c \neq 0$, atunci ecuația devine $ax^2 + c = 0$ sau $x^2 = -\frac{c}{a}$. Notând $k = -\frac{c}{a}$, $k \neq 0$, obținem ecuația $x^2 = k$, care nu are soluții pentru $k < 0$ și are soluțiile $x_{1,2} = \pm\sqrt{k}$, pentru $k > 0$.

EXEMPLU: Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuațiile: **a)** $2x^2 - 7 = 0$; **b)** $3x^2 + 1 = 0$.

Rezolvare:

a) Ecuația se scrie sub forma $x^2 = \frac{7}{2}$, cu soluțiile $x_1 = \sqrt{\frac{7}{2}}$ și $x_2 = -\sqrt{\frac{7}{2}}$.

b) Avem $x^2 = -\frac{1}{3}$, care nu are soluții reale, întrucât pătratul unui număr real nu poate fi număr negativ.

- Dacă $c = 0$ și $b \neq 0$, atunci ecuația devine $ax^2 + bx = 0$ sau $x(ax + b) = 0$, cu soluțiile $x_1 = 0$ și $x_2 = -\frac{b}{a}$.

EXEMPLU: Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $x^2 - 3x = 0$.

Rezolvare: Scoțând factor comun pe x , obținem $x(x - 3) = 0$, cu soluțiile $x_1 = 0$ și $x_2 = 3$.

- Dacă $b = c = 0$, atunci ecuația devine $ax^2 = 0$. Această ecuație are soluția dublă $x_1 = x_2 = 0$.

II. Atunci când toți coeficienții sunt nenuli, urmărim să descompunem în factori expresia algebrică $ax^2 + bx + c$.

EXEMPLU: Determină soluțiile reale ale ecuațiilor următoare:

a) $2x^2 + 5x + 2 = 0$; **b)** $x^2 + 2x - 3 = 0$; **c)** $x^2 + 4x + 1 = 0$.

Rezolvare:

a) Descompunem expresia algebrică $2x^2 + 5x + 2$ și obținem: $2x^2 + 5x + 2 = 2x^2 + x + 4x + 2 = (x + 2)(2x + 1)$.

Egalând cu zero fiecare paranteză, găsim mulțimea soluțiilor ecuației: $S = \left\{-2, -\frac{1}{2}\right\}$.

b) O abordare eficientă pentru obținerea descompunerii constă în restrângerea pătratului. Așadar: $x^2 + 2x - 3 = x^2 + 2x + 1 - 4 = (x + 1)^2 - 4 = (x - 1)(x + 3)$. Mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \{-3, 1\}$.

c) Procedând în mod analog, vom obține: $x^2 + 4x + 1 = (x + 2)^2 - 3 = (x + 2 - \sqrt{3})(x + 2 + \sqrt{3})$, iar soluțiile sunt $x_1 = -2 + \sqrt{3}$ și $x_2 = -2 - \sqrt{3}$.

- Rezolvarea generală a ecuației (1) **$ax^2 + bx + c = 0$** , $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, folosește descompunerea expresiei algebrice $ax^2 + bx + c$ prin metoda restrângerii pătratului.

Împărțind prin a ecuația (1), obținem $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ sau $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$. (2)

Vom nota cu **$\Delta = b^2 - 4ac$** . Simbolul Δ , litera *delta* a alfabetului grecesc, se numește **discriminantul ecuației** de gradul al doilea.

Ecuatia (2) se scrie sub forma: $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$.



• Pentru $\Delta > 0$, ecuația are două soluții reale, distincte: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, iar mulțimea soluțiilor este $S = \{x_1, x_2\}$.

• Pentru $\Delta = 0$, obținem $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$ (soluție dublă), iar $S = \{x_1\}$.

Dacă x_1, x_2 sunt soluțiile ecuației $ax^2 + bx + c = 0$, atunci relația $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ reprezintă **descompunerea în factori a expresiei algebrice $ax^2 + bx + c$** .

• Pentru $\Delta < 0$, ecuația nu are soluții reale, iar expresia algebrică $ax^2 + bx + c$ nu se poate descompune.



Aplicăm cunoștințele

1 Determină soluțiile reale ale ecuației $\frac{3}{x} - \frac{2}{x+2} = \frac{x^2+6}{x^2+2x}$.

Rezolvare:

Impunem condițiile de existență a fracțiilor, adică $x \neq 0$ și $x \neq -2$, deci $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$. Aducând la același numitor, obținem ecuația $\frac{3(x+2)-2x}{x^2+2x} = \frac{x^2+6}{x^2+2x}$ sau $x+6 = x^2+6$. Se obțin valorile $x_1 = 0$ și $x_2 = 1$, însă numai $x = 1$ verifică condițiile de existență. Așadar, $S = \{1\}$.

2 Se consideră ecuația $2x^2 + 3x + m = 0$, $m \in \mathbb{R}$.

a) Determină valoarea numărului real m , știind că $x_1 = -\frac{1}{2}$ este o soluție a ecuației.

b) Pentru $m = 1$, descompune în factori expresia algebrică $2x^2 + 3x + 1$.

Rezolvare:

a) Deoarece $x_1 = -\frac{1}{2}$ este soluție, rezultă că $2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + m = 0$, de unde $m = 1$.

b) Pentru $m = 1$, ecuația $2x^2 + 3x + 1 = 0$ are soluțiile $x_1 = -\frac{1}{2}$ și $x_2 = -1$, iar descompunerea în factori este:

$$2x^2 + 3x + 1 = 2(x - x_1)(x - x_2) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x + 1) = (2x + 1)(x + 1).$$

3 Știind că ecuația $x^2 + mx + n = 0$ are mulțimea soluțiilor $S = \{-1, 4\}$, determină valorile numerelor reale m și n .

Rezolvare:

Deoarece 4 și -1 sunt soluții, prin înlocuire în ecuația dată, obținem: $16 + 4m + n = 0$ și $1 - m + n = 0$. Scăzând relațiile, deducem că $m = -3$ și, apoi, $n = -4$.

4 Arată că ecuația $abx^2 - (a+b)x + 1 = 0$ are soluții reale, oricare ar fi numerele reale nenule a și b .

Rezolvare:

Discriminantul ecuației este $\Delta = (a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2$. Întrucât $\Delta \geq 0$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}^*$, deducem că ecuația are întotdeauna soluții reale.

5 Determină numerele reale care au produsul egal cu 12 și diferența egală cu 4.

Rezolvare:

Fie a și b numerele reale căutate. Deoarece $a - b = 4$ și $a \cdot b = 12$, rezultă că $a = 4 + b$, iar $b(4 + b) = 12$. Soluțiile ecuației $b^2 + 4b - 12 = 0$ sunt $b_1 = 2$ și $b_2 = -6$, iar perechile de numere căutate sunt $(a, b) \in \{(-2, -6), (6, 2)\}$.

Reține!

- Forma ecuației de gradul al doilea este $ax^2 + bx + c = 0$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b, c \in \mathbb{R}$.
- Numărul $\Delta = b^2 - 4ac$ reprezintă discriminantul ecuației.
- Dacă $\Delta > 0$, atunci ecuația are două soluții reale distincte $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$, iar $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ este descompunerea expresiei algebrice.
- Dacă $\Delta = 0$, atunci ecuația are soluție dublă, $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$, iar $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$.
- Dacă $\Delta < 0$, atunci ecuația nu are soluții reale și expresia algebrică nu se poate descompune.

**Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele**

- 1** Transcrie în caiet tabelul de mai jos și completează liniile, prima linie fiind completată ca model.

Ecuatia	Coeficienții			Discriminantul Δ
	a	b	c	
$2x^2 + 5x + 2 = 0$	2	5	2	$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9$
$3x^2 - 4x + 1 = 0$				
$x^2 + 6x + 9 = 0$				
$6x^2 - x - 2 = 0$				
$x^2 + 7x = 0$				



- 2** Rezolvă în $\mathbb{R}$ următoarele ecuații cu formă incompletă:

a) $x^2 - 6x = 0$; **b)** $2x^2 + 4x = 0$; **c)** $3x^2 - x = 0$;
d) $x^2 - 49 = 0$; **e)** $-x^2 + 5 = 0$; **f)** $2x^2 + 3 = 0$.

- 3** Descompune în factori, completând eventual la pătratul binomului, și rezolvă ecuațiile următoare conform modelului:

a) $x^2 + 8x - 20 = 0$; **b)** $x^2 - 6x - 16 = 0$; **c)** $x^2 + 4x + 3 = 0$.

Model: $x^2 + 8x - 20 = x^2 + 8x + 16 - 36 = (x + 4)^2 - 6^2 = (x - 2)(x + 10)$; $S = \{-10, 2\}$.

- 4** Rezolvă, în mulțimea numerelor reale, următoarele ecuații:

a) $x^2 + 7x + 6 = 0$; **b)** $x^2 - 6x + 8 = 0$; **c)** $x^2 - 2x - 3 = 0$;
d) $2x^2 - 7x + 3 = 0$; **e)** $3x^2 + 10x + 3 = 0$; **f)** $6x^2 + 5x - 1 = 0$.

- 5** Determină soluțiile reale, atunci când există, ale ecuațiilor:

a) $2x^2 - 6x + 4 = 0$; **b)** $4x^2 - 4x + 1 = 0$; **c)** $x^2 + x + 1 = 0$;
d) $x^2 - 3x + 1 = 0$; **e)** $x^2 - x - 1 = 0$; **f)** $x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$.

- 6** Determină mulțimea soluțiilor ecuațiilor:

a) $x^2 + x - 2 = 0$; **b)** $x^2 - x - 6 = 0$; **c)** $x^2 - 2x - 15 = 0$;
d) $6t^2 - t - 1 = 0$; **e)** $3a^2 - 5a + 2 = 0$; **f)** $-b^2 + 4b - 3 = 0$.

- 7** Determină soluțiile reale ale următoarelor ecuații:

a) $x(x + 2) = 3$; **b)** $x^2 + 2x + 1 = 25$; **c)** $2x + \frac{1}{x} = 3$;
d) $(1 - x)^2 + (2 - x)^2 = (3 - x)^2$; **e)** $x(x - 2) - 4(x + 1) = 3$; **f)** $\frac{x}{x+1} + \frac{2x-3}{x-1} = \frac{2x^2-4x}{x^2-1}$.

- 8** Determină mulțimea numerelor reale pentru care este bine definit raportul $\frac{x+2}{x^2+5x-6}$.

- 9** Descompune în factori expresiile:

a) $x^2 + 8x + 12$; **b)** $x^2 - 9x - 10$; **c)** $x^2 - x - 12$;
d) $9x^2 + 5x - 4$; **e)** $2x^2 - 5x + 2$; **f)** $x^2 + 3x + 1$.

- 10** Determină numărul real m , știind că fiecare dintre ecuații are soluția indicată:

a) $x^2 + 5x + m = 0$; $x_1 = 2$; **b)** $2x^2 + 3x + m = 0$; $x_1 = -1$.

- 11** Știind că ecuația $x^2 + ax + b = 0$ are mulțimea soluțiilor $S = \{2, -3\}$, găsește valorile numerelor reale a și b .

- 12** Determină valorile numerelor reale m și n , știind că ecuațiile $x^2 - 3x + 2 = 0$ și $2x^2 + (m + n)x + (m - n) = 0$ sunt echivalente.

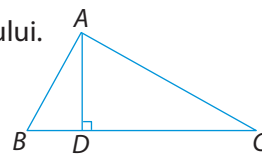
- 13** Determină valorile naturale ale lui m , știind că ecuația $x^2 + 5x + m = 0$ are soluții reale.

- 14** Demonstrează că ecuația $mx^2 + (2m + 1)x + m + 1 = 0$ are soluții reale distincte, oricare ar fi numărul real nenul m .

- 15** Stabilește valoarea de adevăr a afirmației: „Pentru $m \in [9, \infty)$, ecuația $mx^2 + 6x + 1 = 0$ nu are soluții reale.”

- 16** Determină numerele reale x și y care au suma egală cu 1 și produsul egal cu -20 .

- 17 Determină numerele reale x și y care au suma egală cu -1 și suma inverselor egală cu $0,5$.
- 18 Determină numărul participanților la o conferință, știind că au dat mâna fiecare cu fiecare o singură dată și în total au fost 45 de strângeri de mână.
- 19 Un triunghi dreptunghic are lungimea ipotenuzei egală cu 10 cm, iar lungimile catetelor sunt numere pare consecutive. Determină perimetrul triunghiului.
- 20 Un triunghi echilateral are aria egală cu $16\sqrt{3}$ cm². Determină perimetrul triunghiului.
- 21 Calculează lungimea ipotenuzei triunghiului dreptunghic ABC din figura alăturată, știind că lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei este $AD = 2\sqrt{3}$ cm, iar raportul lungimilor segmentelor DC și BD este egal cu 3 .



Din oficiu: 1 punct

AUTOEVALUARE

Timp de lucru: 40 de minute

- 1 Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F. **3 puncte**
- a) Discriminantul ecuației $3x^2 + 2x = 0$ este $\Delta = 4$. **A F**
- b) Ecuația $x^2 + 2x + 2 = 0$ are soluții reale. **A F**
- c) Suma pătratelor soluțiilor ecuației $x^2 - 5x + 6 = 0$ este egală cu 13 . **A F**
- 2 Unește prin săgeți fiecare enunț din coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta. **4 puncte**
- a) Suma soluțiilor ecuației $3x^2 - 2x - 1 = 0$ este ... **1) $-\frac{1}{3}$;**
- b) Dacă $x_1 < 0 < x_2$ sunt soluțiile ecuației $x^2 - 4 = 0$, atunci $x_1 - x_2$ este ... **2) -2 ;**
- c) Valoarea numărului real m pentru care ecuația $(m^2 + 1)x^2 - (2 + 5m)x + m + 5 = 0$ admite soluția $x_1 = 1$ este ... **3) 2 ;**
- d) Soluția negativă a ecuației $(x - 2)^2 + 3(x - 1) = 7$ este ... **4) $\frac{2}{3}$;**
- 5) -4 .**
- 3 Un poligon convex cu n laturi are 14 diagonale. Determină valoarea numărului natural $n \geq 4$. **2 puncte**

FIȘĂ DE OBSERVARE SISTEMATICĂ A ACTIVITĂȚII ȘI A COMPORTAMENTULUI ELEVULUI

Autoevaluarea activității elevului în procesul de învățare este un instrument util atât cadrului didactic, cât și elevului, pentru a putea determina implicarea acestuia pe parcursul unui capitol.

Copiază pe o foaie de hârtie următorul tabel, completează-l, solicită observațiile profesorului și adaugă-l la portofoliul personal.

Răspunsuri	Autoevaluarea elevului Da/Nu/Parțial	Observațiile profesorului
Am participat activ la fiecare lecție.		
Am recapitulat înainte de fiecare lecție noțiunile învățate anterior.		
Am pus întrebări atunci când am avut nelămuriri.		
Am răspuns la întrebările profesorului sau ale colegilor.		
Am colaborat cu colegii la activitățile desfășurate.		
Am obținut la testul de recapitulare și evaluare nota ...		

1. PROBLEME RECAPITULATIVE

- 1 Calculează, pe mulțimea numerelor reale unde operațiile se pot efectua:
 - a) $7x - 5y + 1 - 2(x + y - 3)$;
 - b) $11x^2 - 6x + 4 - 5(2x^2 - x - 1)$;
 - c) $(x + 1)(1 - x + x^2) - x^3$;
 - d) $4x \cdot (-3x^3y^2) : (2x^2y)^2$.
- 2 Rezolvă în mulțimea numerelor reale:
 - a) $(x - 1)^2 - x(x - 5) \geq 7$;
 - b) $(x + 2)^2 + (x - 3)(x + 3) + 5 = 0$.
- 3 Determină $3c - 2b - a$, știind că $(a + 1)^2 + (b + 2)^2 + (c - 3)^2 = a^2 + b^2 + c^2$.
- 4 Determină valoarea minimă a expresiei $E(x) = (x\sqrt{3} + 1)(x\sqrt{3} - 1) + x(1 - x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{13}{4}$, pentru $x \in \mathbb{R}$.
- 5 Efectuează:
 - a) $(1 + \sqrt{5})^2 - \frac{10}{\sqrt{5}}$;
 - b) $(2 - \sqrt{3})^2 + \frac{4}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$;
 - c) $\frac{2}{\sqrt{5} - 1} - \frac{\sqrt{20}}{4}$.
- 6 Determină numerele reale a și b , știind că $a^2 + b^2 + 10 = 2a - 6b$.
- 7 Descompune în factori:
 - a) $xyz - 2x^2y$;
 - b) $-49 + x^2$;
 - c) $x(x + 5) + 4$;
 - d) $2x^2 - 7x + 5$;
 - e) $x^4 - 2x^2 + 1$;
 - f) $x^3 + x^2 - 3x - 3$.
- 8 Stabilește valoarea de adevăr a afirmației „ $x(x^2 - 4) = (x - 2)(x^2 + 2x)$, oricare ar fi numărul real x ”.
- 9 Descompune în factori expresia $E(x) = x^2 + 4x + 3$ și arată că $E(n) : 8$, oricare ar fi numărul întreg impar n .
- 10 Știind că $a \neq 0$ și $b < c$ sunt cifre consecutive, demonstrează că numărul $A = 4 \cdot \overline{ab} \cdot \overline{ac} + 1$ este pătrat perfect.
- 11 Simplifică expresiile:
 - a) $\frac{x^2 + xy}{x^2 - y^2}, x, y \in \mathbb{R}, x \neq \pm y$;
 - b) $\frac{x^3 + 4x^2 + 4x}{x^3 - 4x}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$;
 - c) $\frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 + 5x + 4}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, -1\}$;
 - d) $\frac{3x^2 + 2x - 1}{9x^2 - 1}, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}$.
- 12 Calculează:
 - a) $\frac{4x - 1}{x + 2} + \frac{7 - x}{x + 2}, x \neq -2$;
 - b) $\frac{2x - 1}{x - 3} + \frac{x - 4}{3 - x}, x \neq 3$;
 - c) $\frac{x}{x - 2} + \frac{2}{x + 2} - \frac{8}{4 - x^2}, x \neq -2, x \neq 2$;
 - d) $\frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x} \cdot \frac{x^2}{2x - 6}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 3\}$;
 - e) $\left(1 + \frac{x}{x + 2}\right) : \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1\}$.
- 13 Rezolvă în mulțimea numerelor reale următoarele ecuații:
 - a) $3x^2 - 4x - 4 = 0$;
 - b) $2(x + 1)^2 - 1 = x(x + 8) - 3$;
 - c) $\frac{2}{x - 2} + \frac{1}{x + 1} = \frac{x^2 + 2}{(x + 1)(x - 2)}$.
- 14 Pe laturile AB și AC ale triunghiului ABC se consideră punctele M , respectiv N astfel încât $MN \parallel BC$. Determină valoarea lui x , știind că $AM = x$, $MB = x + 2$, $AN = 6$ și $NC = 1 + 2x$.
- 15 Dacă $E(x) = 1 - \left(\frac{x - 5}{x + 3} + \frac{x + 3}{x - 5} - 2\right) : \frac{16}{x - 5}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, -3\}$, demonstrează că $E(\sqrt{5}) \cdot E(-\sqrt{5}) \in \mathbb{Z}$.

Proiect

Vă propunem să vă îmbogățiți bagajul cultural realizând un referat cu titlul „Numărul de aur – cheia ascunsă a universului”.

Pentru aceasta puteți consulta resursele existente pe internet, în enciclopedia Wikipedia, precum și volumul *Secțiunea de aur*, autor Mario Livio, apărut la Editura Humanitas.

Organizați în trei echipe a câte patru membri, realizați câte o prezentare PowerPoint cuprinzând informații despre:

Echipa 1:

- istoricul apariției numărului de aur;
- notație, valoare aproximativă;
- ecuația care admite ca soluție numărul de aur.

Echipa 2:

- legătura între proporția divină și numărul de aur;
- influențe în arhitectură, astronomie, geometrie, muzică a numărului de aur (cu exemplificări).

Echipa 3:

- numărul de aur și corpul uman;
- numărul de aur și șirul lui Fibonacci;
- mari personalități care au utilizat și au promovat numărul de aur.

Restul colegilor vor fi implicați în discuțiile care vor urma prezentărilor celor trei echipe.

2. TEST DE EVALUARE

Timp de lucru: 45 de minute.

I. Completează spațiul punctat cu răspunsul corect.

20 de puncte

- (5p) 1. Rezultatul calculului $6x - 3(2x - 1)$ este
- (5p) 2. Dacă $a^2 - b^2 = 4$ și $a + b = \sqrt{8}$, atunci $a - b$ este egal cu
- (5p) 3. Simplificând raportul $\frac{x^2}{x^2 + x}$, $x \neq -1$ și $x \neq 0$, obținem
- (5p) 4. Produsul soluțiilor ecuației $2x^2 - 5x = 0$ este egal cu

II. Unește prin săgeți fiecare enunț aflat în coloana A cu rezultatul corespunzător din coloana B.

20 de puncte

- | | A | B |
|---|---|-----------------|
| (5p) 1. Dacă $x \in \mathbb{R}^*$, atunci $[4(3x^2 - x) + 4x] : (-6x) + 2x$ este ... | | a) 1; |
| (5p) 2. Știind că $a, b \in \mathbb{R}$, $a + b = 2$, atunci $(a - b)^2 + 4ab + 5$ este egal cu ... | | b) 6; |
| (5p) 3. Fie $R(x) = \frac{x^2 - x}{2x + 3}$, $x \neq -\frac{3}{2}$. Atunci $R(-2)$ este ... | | c) 9; |
| (5p) 4. Valoarea naturală a numărului m pentru care ecuația $x^2 - 2\sqrt{2}x + m = 0$ are soluții reale distincte și nenule este ... | | d) 0;
e) -6. |

III. Alege litera corespunzătoare răspunsului corect.

20 de puncte

- (5p) 1. Dacă $x \in \mathbb{R}$, atunci descompunerea în factori a expresiei $x^3 + x^2 - x - 1$ este:
 A. $(x - 1)^2(x + 1)$; B. $(x^2 + 1)(x - 1)$; C. $(x + 1)^2(x - 1)$.
- (5p) 2. Dacă $a \in \mathbb{R}^*$ și $a + \frac{1}{a} = \sqrt{5}$, atunci $a^2 + \frac{1}{a^2}$ este:
 A. 7; B. 3; C. 5.
- (5p) 3. Fie $F(x) = \frac{x^3 - 4x}{x^2 + 2x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$. Valorile numărului natural a pentru care $F(a)$ este număr natural sunt:
 A. $a = 1$; B. $a = 0$; C. $a \in \{2, 3, 4, \dots\}$.
- (5p) 4. Efectuând calculele în expresia $E(x) = \left(x - \frac{2x - 1}{x}\right) : \frac{x^2 - 1}{x^2 + x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, obținem:
 A. $E(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{x}$; B. $E(x) = x - 1$; C. $E(x) = \frac{x - 1}{x}$.

La subiectele IV și V scrie rezolvările complete.

IV. Considerăm expresia $E(t) = (t + 1)^2 + 10t^2 : (2t - 8t + t)$, $t \in \mathbb{R}^*$.

15 puncte

- (5p) a) Arată că $E(t) = t^2 + 1$.
- (5p) b) Calculează $E(\sqrt{1}) + E(\sqrt{3}) + \dots + E(\sqrt{19})$.
- (5p) c) Determină numărul real a pentru care $E(a) + 3 = 4a$.

V. Fie $E(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - x} \cdot \left[2 + x^2 \cdot \left(\frac{1+x}{x} + \frac{x}{1-x}\right)\right]^{-1}$.

15 puncte

- (5p) a) Determină valorile reale ale lui x pentru care expresia are sens.
- (5p) b) Demonstrează că $E(x) = \frac{x+2}{x}$.
- (5p) c) Rezolvă ecuația $E(x) = |x|$.

Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota se obține împărțind punctajul final la 10.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4	IV.a	IV.b	IV.c	V.a	V.b	V.c
Punctajul																		
Nota																		

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE 3

FUNCȚII

- L1. Funcții. Funcții definite pe mulțimi finite. Funcții numerice
- L2. Graficul unei funcții. Reprezentarea geometrică a graficului unei funcții numerice. Lecturi grafice
- L3. Funcții de forma $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$ și $\mathcal{D}$ este o mulțime finită de numere reale sau un interval nedegenerat
- L4. Elemente de statistică: indicatorii tendinței centrale a unei serii de date statistice

Recapitulare și evaluare

- 1. Probleme recapitulative
- 2. Test de evaluare

Introducere

Noțiunea de funcție este un concept fundamental al matematicii și, în general, al științelor exacte. Apariția sa este strâns legată de încercările de rezolvare a unor probleme practice, de mecanică sau de astronomie.

Termenul „funcție” a fost folosit pentru prima dată de **G. Leibniz**, în 1673. Ulterior, **J. Bernoulli** și **L. Euler** au privit funcțiile drept instrumente care permit studiul modalității prin care variația unei mărimi influențează modificarea unei alte mărimi, care depinde de prima.

Către sfârșitul secolului al XIX-lea, odată cu dezvoltarea teoriei mulțimilor, s-a degajat conceptul modern de funcție, pe care îl vom prezenta și noi în cele ce urmează.

LECȚIA 1 Funcții. Funcții definite pe mulțimi finite. Funcții numerice



Rezolvăm împreună

Un bazin gol este alimentat cu apă cu ajutorul a cinci robinete, fiecare având debitul de 20 ℓ /minut. Volumul de apă $\mathcal{V}$ (măsurat în litri) care se adună în bazin depinde de timpul t (măsurat în minute) scurs de la deschiderea simultană a celor cinci robinete.

a) Completează tabelul:

t	1	2	3	4	5
$\mathcal{V}$					



Ne amintim

- ♦ dependență funcțională
- ♦ reprezentare și interpretare prin tabele, diagrame și grafice

b) Dacă $t_1 = 1, t_2 = 2, \dots, t_5 = 5$ sunt valorile lui t din tabel, iar $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_5$ sunt valorile corespunzătoare ale lui $\mathcal{V}$, arată că numerele $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_5$ sunt direct proporționale cu numerele $t_1, t_2, \dots, t_5$.

c) Reprezintă datele din tabel cu ajutorul unei diagrame cu bare verticale (de tip coloană) și al unei diagrame cu puncte.

Rezolvare:

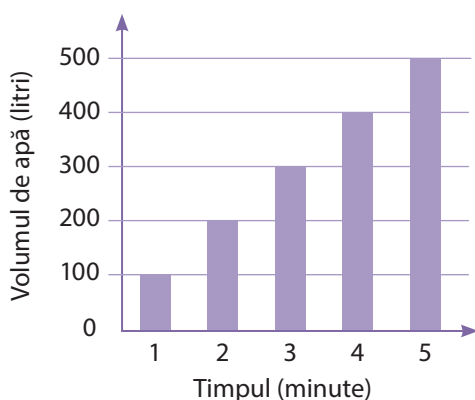
a) În primul minut după deschiderea simultană a celor cinci robinete, în bazin se adună $\mathcal{V}_1 = 5 \cdot 20 = 100 \ell$ de apă. În al doilea minut, robinetele alimentează bazinul cu încă 100 ℓ de apă, deci cantitatea de apă care se adună este $\mathcal{V}_2 = 2 \cdot 100 = 200 \ell$. Continuăm raționamentul și obținem datele pentru cea de-a doua linie a tabelului:

t	1	2	3	4	5
$\mathcal{V}$	100	200	300	400	500

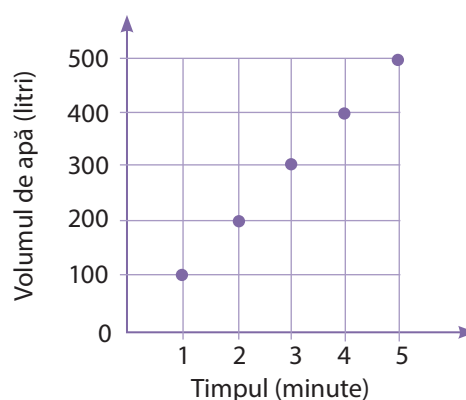
b) Observăm că $\frac{\mathcal{V}_1}{t_1} = \frac{100}{1} = 100, \frac{\mathcal{V}_2}{t_2} = \frac{200}{2} = 100, \dots, \frac{\mathcal{V}_5}{t_5} = \frac{500}{5} = 100$, așadar $\frac{\mathcal{V}_1}{t_1} = \frac{\mathcal{V}_2}{t_2} = \dots = \frac{\mathcal{V}_5}{t_5}$. Rezultă că numerele $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_5$ sunt direct proporționale cu numerele $t_1, t_2, \dots, t_5$. Coeficientul de proporționalitate este dat de debitul total al celor cinci robinete, 100 ℓ /minut, și arată viteza de umplere a bazinului.

c)

DIAGRAMĂ CU BARE VERTICALE



DIAGRAMĂ CU PUNCTE



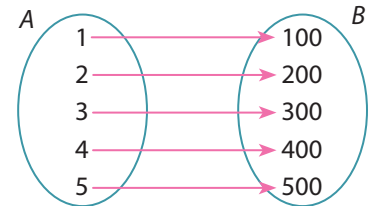
Observăm și descoperim cunoștințe noi

1. În exemplul de mai sus, volumul de apă $\mathcal{V}$ care se adună în bazin *depinde* (este *determinat*) de timpul t scurs de la deschiderea robinetelor. În vorbirea curentă, spunem că „ $\mathcal{V}$ este funcție de t ”.

La fel, dacă pornim la drum cu mașina și mergem cu o viteză constantă, distanța parcursă este funcție de timpul deplasării. Dacă avem o anumită sumă de bani și vrem să o depunem la o bancă pentru o perioadă determinată, vom alege instituția care oferă o dobândă mai mare, pentru că suma pe care o vom avea în cont la finalul perioadei este funcție de rata dobânzii.

2. În exemplul anterior, am văzut că valorii $t_1 = 1$ îi corespunde valoarea $\mathcal{V}_1 = 100$, valorii $t_2 = 2$ îi corespunde valoarea $\mathcal{V}_2 = 200$ etc. O modalitate mai simplă pentru a exprima acest lucru este de a scrie astfel: $\mathcal{V}(1) = 100$, $\mathcal{V}(2) = 200$ etc. Scrierea $\mathcal{V}(a) = b$ arată că, atunci când $t = a$, unde $a \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, valoarea corespunzătoare a lui $\mathcal{V}$ este b , unde $b \in \{100, 200, 300, 400, 500\}$.

3. Considerând mulțimile $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ și $B = \{100, 200, 300, 400, 500\}$, am stabilit o corespondență între elementele lor, care poate fi ușor vizualizată folosind diagrame pentru mulțimi și săgeți pentru a descrie modalitatea în care asociem elementele acestora.



DEFINIȚIE: O **funcție** este un triplet (A, B, f) , unde A și B sunt două mulțimi nevide, iar f este o corespondență între elementele acestor mulțimi prin care **fiecărui** element din A i se asociază **un singur** element din B .

Numim un astfel de triplet **funcție definită pe mulțimea A cu valori în mulțimea B** și scriem $f: A \rightarrow B$.

Mulțimea A se numește **domeniul** (de definiție) al funcției, iar B se numește **codomeniul** funcției. Procedul prin care fiecărui element din A i se asociază un singur element din B se numește **lege de corespondență**.

Dacă x este element al mulțimii A , iar y este acel element al mulțimii B care se asociază lui x , scriem $y = f(x)$ și spunem că „ y este **imaginea** lui x prin funcția f ” sau „ y este **valoarea** funcției f în punctul x ”.

Două funcții sunt **egale** dacă au același domeniu, același codomeniu și aceeași lege de corespondență.

EXEMPLE: Considerăm următoarele corespondențe de la mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ la mulțimea $B = \{a, b, c, d, e\}$:

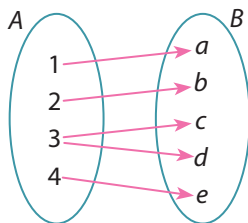


Fig. 1

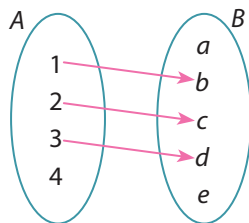


Fig. 2

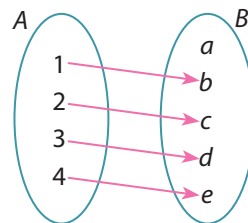


Fig. 3

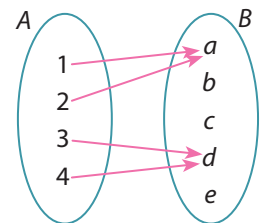


Fig. 4

În figura 1 nu este reprezentată o funcție, deoarece elementului $3 \in A$ i se asociază două elemente din mulțimea B , nu unul singur.

Nici în figura 2 nu este reprezentată o funcție, întrucât elementului $4 \in A$ nu i se asociază niciun element din B .

În figura 3 este reprezentată o funcție, în ciuda faptului că elementul $a \in B$ nu corespunde niciunui element din A ; este respectată cerința ca fiecărui element din A să îi corespundă un singur element din B . Mulțimea $\{b, c, d, e\} \subset B$, formată din elementele codomeniului care corespund efectiv unor elemente ale domeniului, se numește **mulțimea valorilor funcției**.

În figura 4 este reprezentată o funcție, chiar dacă mai multe elemente din A au același corespondent în B .

OBSERVAȚIE: Dacă domeniul de definiție al unei funcții este o mulțime finită, putem reprezenta funcția printr-un tabel sau cu ajutorul diagramelor.

Atunci când reprezentăm funcția printr-un tabel, pe prima linie a acestuia apar toate elementele domeniului, însă pe cea de-a doua linie nu vor apărea obligatoriu toate elementele codomeniului, ci doar elementele mulțimii valorilor funcției.

Atunci când reprezentăm funcția cu ajutorul diagramelor, de la fiecare element al domeniului pleacă o săgeată și numai una către un element al codomeniului. Nu este obligatoriu ca în fiecare element al codomeniului să ajungă săgeți, după cum este posibil ca în unele elemente ale codomeniului să ajungă mai multe săgeți.



Reține!

- Funcția este o corespondență între elementele a două mulțimi nevide:
 $f: A \rightarrow B$,
 A – domeniul de definiție, B – codomeniul.
- O funcție se poate reprezenta printr-un tabel sau printr-o diagramă, dacă domeniul de definiție este o mulțime finită.
- Fiecare element din A trebuie să aibă un corespondent în B .
- Unui element din A trebuie să-i corespundă un singur element din B .
- Nu este necesar ca oricare element din B să fie imagine a unui element din A .
- Două sau mai multe elemente din A pot avea aceeași imagine în B .



Aplicăm cunoștințele

Considerăm mulțimea $A = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ și funcția $f: A \rightarrow A$ care asociază fiecărui element $n \in A$ ultima cifră a numărului n^2 . Reprezintă funcția f cu ajutorul unui tabel și cu ajutorul diagramelor.

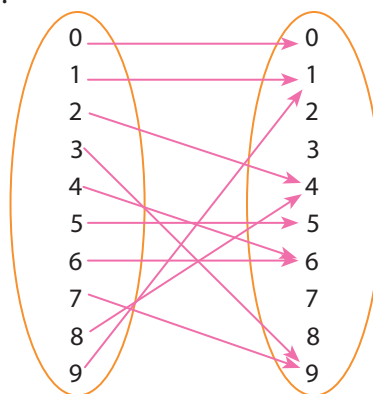
Rezolvare:

Observăm că $0^2 = 0$, $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, $5^2 = 25$, $6^2 = 36$, $7^2 = 49$, $8^2 = 64$, iar $9^2 = 81$. Rezultă că $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 4$, $f(3) = 9$, $f(4) = 6$, $f(5) = 5$, $f(6) = 6$, $f(7) = 9$, $f(8) = 4$ și $f(9) = 1$.

Cele două reprezentări cerute sunt:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(n)$	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Pe a doua linie apar doar elementele mulțimii $\{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$, care este mulțimea valorilor funcției.



Observăm și descoperim cunoștințe noi

DEFINIȚIE: O funcție având drept domeniu de definiție și drept codomeniu două mulțimi de numere reale (submulțimi ale lui $\mathbb{R}$) se numește **funcție numerică**.

Legea de corespondență a unei funcții numerice se exprimă, de obicei, **analitic**, adică folosind o formulă.

EXEMPLU: Funcția $f: \{0, 1, 2, \dots, 10\} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(n) = (-1)^n$ este o funcție numerică. Imaginea unui element din domeniu prin funcția f se obține înlocuind în legea de corespondență pe n cu respectivul element. De exemplu, $f(2) = (-1)^2 = 1$, $f(5) = (-1)^5 = -1$, $f(9) = (-1)^9 = -1$, $f(10) = (-1)^{10} = 1$.

În general, dacă n este un număr par, atunci $f(n) = 1$, iar dacă n este un număr impar, atunci $f(n) = -1$. Putem exprima acest lucru scriind „cu acoladă” funcția f :

$$f: \{0, 1, 2, \dots, 10\} \rightarrow \mathbb{Z}, f(n) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } n \text{ este par} \\ -1, & \text{dacă } n \text{ este impar} \end{cases}$$

Mulțimea valorilor acestei funcții este $\{-1, 1\} \subset \mathbb{Z}$.

Deși putem calcula $(-1)^{20} = 1$ sau $(-1)^{101} = -1$, nu putem spune că $f(20) = 1$, respectiv $f(101) = -1$, deoarece elementele 20 și 101 nu aparțin domeniului funcției f .

Unei expresii algebrice date i se poate asocia o funcție numerică, cu atenție la alegerea domeniului: acesta nu trebuie să conțină elemente pentru care expresia să nu aibă sens.

EXEMPLE:

- Expresiei $x^3 - 2x + 1$ îi putem asocia funcția numerică $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 2x + 1$, deoarece putem calcula $f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

- Expresia $\frac{x}{x^2-1}$ nu are sens pentru $x = -1$ și $x = 1$, deoarece pentru aceste valori se anulează numitorul.

În schimb, dacă $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, putem calcula $f(x)$, prin urmare putem defini funcția numerică $f: \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x}{x^2-1}.$$

Dacă $A \subset \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, putem defini, de asemenea, funcția $g: A \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x}{x^2-1}$; funcțiile f și g nu sunt egale în cazul în care nu au același domeniu, deși au aceeași lege de corespondență (dată de expresia considerată). Spunem că $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ este **domeniul maximal de definiție** al unei funcții care se asociază expresiei $\frac{x}{x^2-1}$.

- Nu putem defini o funcție $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \pm\sqrt{x}$, unde $A \subset \mathbb{R}$, decât în cazul în care $A = \{0\}$. Dacă $A \subset [0, \infty)$ conține măcar un element nenul a , atunci lui a s-ar asocia două elemente din codomeniu, $\sqrt{a}$ și $-\sqrt{a}$, lucru care nu este permis prin definiția noțiunii de funcție.

Portofoliu

1. Se consideră mulțimile $A = \{a, b, c\}$ și $B = \{x, y\}$.

- Reprezintă, cu ajutorul diagramelor, toate funcțiile definite pe mulțimea A cu valori în mulțimea B . Câte astfel de funcții există?
- Reprezintă, cu ajutorul diagramelor, toate funcțiile definite pe mulțimea B cu valori în mulțimea A . Câte astfel de funcții există?

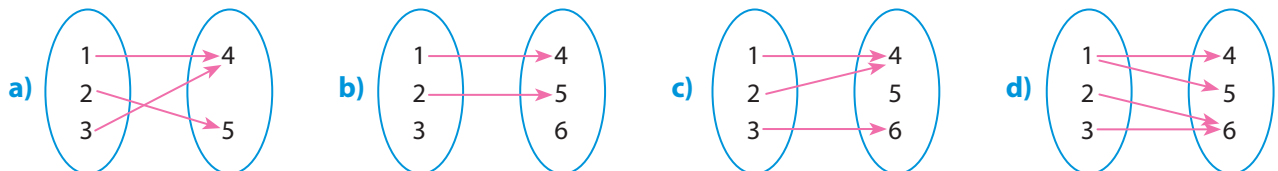
2. Dă exemplu de două mulțimi A și B astfel încât numărul funcțiilor definite pe A cu valori în B să fie egal cu numărul funcțiilor definite pe B cu valori în A .

Adaugă materialele în portofoliul personal.

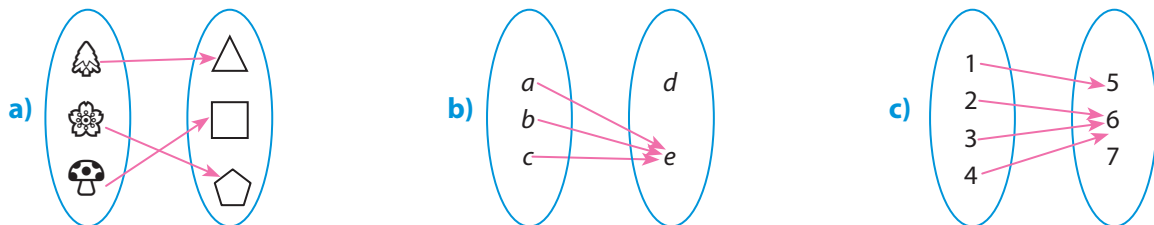


Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. Stabilește care dintre diagramele următoare reprezintă o funcție și care nu, justificând răspunsul:



2. Pentru fiecare dintre următoarele funcții, precizează domeniul de definiție, codomeniul și mulțimea valorilor:



3. Reprezintă următoarele funcții cu ajutorul diagramelor. În fiecare caz, precizează domeniul de definiție al funcției. Poți spune care este codomeniul funcției?

a)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	2	1	0	1	2

b)

x	0	1	2	3
$f(x)$	-1	1	-1	1

4. Găsește o posibilă exprimare cu ajutorul unei formule a fiecăreia dintre funcțiile de la problema precedentă.

5. Se consideră funcția $f: A \rightarrow B$, $f(x) = x^2$.

- a) Dacă $A = \{-2, -1, 0, 1\}$, determină mulțimea B , știind că are cel mai mic cardinal posibil.
- b) Dacă $B = \{0, 1, 4\}$, determină mulțimea A , știind că are cel mai mare cardinal posibil.

- 6** Stabilește domeniul maximal de definiție al unei funcții definite prin formula:
- a) $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$; b) $f(x) = \frac{1}{x^3-x}$; c) $f(x) = \sqrt{1-x}$.
- 7** Se consideră funcția $f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 2$.
- a) Calculează $f(-2) - f(2)$.
b) Determină mulțimea valorilor funcției.
- 8** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x - 2$.
- a) Calculează media aritmetică și media geometrică ale numerelor $f(\sqrt{3}-1)$ și $f\left(\sqrt{3} + \frac{7}{3}\right)$.
b) Calculează suma $S = f(1) + f(2) + \dots + f(10)$.
c) Calculează produsul $P = f\left(\frac{1}{3}\right) \cdot f\left(\frac{2}{3}\right) \cdot \dots \cdot f\left(\frac{10}{3}\right)$.
- 9** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 5x - 3$. Determină numerele reale x cu proprietatea că $f(x)$ este un număr din intervalul $[-2, 2)$.
- 10** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{dacă } x < 1 \\ x+1, & \text{dacă } x \geq 1 \end{cases}$.
- a) Calculează $f(-2), f(0), f(1), f(\sqrt{2}-1)$ și $f(\sqrt{2}+1)$.
b) Demonstrează că $f(x) \neq 0$, oricare ar fi numărul real x .
- 11** Determină legea de corespondență a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, știind că:
- a) $f(x+1) = 3x-1, \forall x \in \mathbb{R}$; b) $f(3x) = 2x+3, \forall x \in \mathbb{R}$.
- 12** O furnică se plimbă pe axa numerelor. Ea pleacă din originea O la momentul $t_0 = 0$, se deplasează în sens pozitiv și, în fiecare secundă, parcurge o distanță de câte două unități. Furnica merge fără odihnă timp de două minute. Descrie cu ajutorul unei funcții distanța parcursă de furnică în funcție de timpul scurs din momentul plecării, exprimat în secunde.

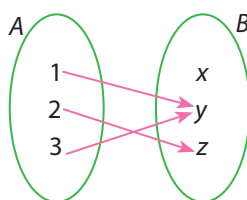


Din oficiu: 1 punct

AUTOEVALUARE

Timp de lucru: 20 de minute

- 1** În figura de mai jos este reprezentată funcția $f: A \rightarrow B$ cu ajutorul unei diagrame. Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F. 3 puncte



- a) Domeniul de definiție al funcției f este mulțimea $\{x, y, z\}$. A F
b) Codomeniul funcției f este mulțimea $\{x, y, z\}$. A F
c) Mulțimea valorilor funcției f este mulțimea $\{x, y, z\}$. A F
- 2** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x + 1$. Unește prin săgeți fiecare enunț din coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta. 3 puncte
- a) $f(-1) = \dots$ 1) -1;
b) $f(0) \cdot f(1) \cdot f(1000) = \dots$ 2) 0;
c) Dacă $f(a) = 2$, atunci $a = \dots$ 3) 1;
4) 2.
- 3** Stabilește domeniul maximal de definiție al unei funcții definite prin formula $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 4x + 3}$. 3 puncte

LECȚIA 2

Graficul unei funcții. Reprezentarea geometrică a graficului unei funcții numerice. Lecturi grafice



Rezolvăm împreună

Considerăm mulțimile $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ și $B = \{0, 1, 4\}$, precum și funcția $f: A \rightarrow B, f(x) = x^2$.

a) Determină produsul cartezian $A \times B$ și reprezintă geometric elementele sale într-un sistem de axe ortogonale xOy .

b) Determină mulțimea $G = \{(x, y) \in A \times B \mid y = f(x)\}$ și evidențiază elementele sale în figura de la punctul a).

Rezolvare:

a) Ne amintim din clasa a VII-a că $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$. Cum mulțimea A are 4 elemente, iar B are 3 elemente, mulțimea $A \times B$ este formată din $4 \cdot 3 = 12$ perechi ordonate: $A \times B = \{(-1, 0); (-1, 1); (-1, 4); (0, 0); (0, 1); (0, 4); (1, 0); (1, 1); (1, 4); (2, 0); (2, 1); (2, 4)\}$.

Dacă raportăm planul la un sistem de axe ortogonale (un reper cartezian) xOy , fiecare dintre perechile ordonate de numere (a, b) , cu $a \in A, b \in B$, reprezintă coordonatele unui punct $M(a, b)$ din plan. Prin urmare, mulțimea $A \times B$ se reprezintă geometric drept o mulțime formată din 12 puncte, anume punctele $M_1(-1, 0), M_2(-1, 1), \dots, M_{12}(2, 4)$ din figura alăturată. (Punctele sunt notate în ordinea în care apar perechile în produsul cartezian $A \times B$ în scrierea de mai sus. Observăm că $M_4(0, 0)$ este, de fapt, același punct cu originea O a sistemului de axe ortogonale considerat.)

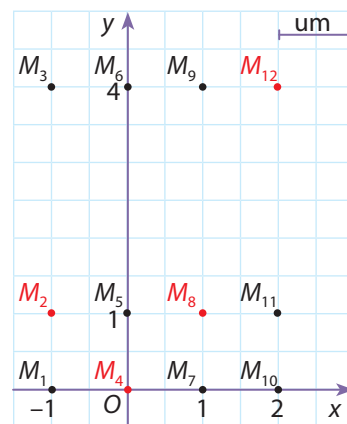
b) Funcția f se poate reprezenta prin tabelul alăturat. Cum fiecărei valori $x \in A$ îi corespunde o singură valoare $y = f(x) \in B$, înseamnă că mulțimea G este formată din 4 perechi ordonate: $G = \{(-1, 1); (0, 0); (1, 1); (2, 4)\}$.

Fiecărei perechi de numere din G i se asociază câte un punct din planul raportat la un sistem de axe ortogonale, anume punctele $M_2(-1, 1), M_4 = O(0, 0), M_8(1, 1)$ și $M_{12}(2, 4)$. În figura de la punctul a), aceste puncte sunt cele evidențiate cu roșu.



Ne amintim

- ◆ produs cartezian a două mulțimi
- ◆ sistem de axe ortogonale



x	-1	0	1	2
$f(x)$	1	0	1	4

Reține!

Fie $f: A \rightarrow B$ o funcție. Numim **grafic al funcției f** mulțimea:

$$G_f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}.$$



Observăm și descoperim cunoștințe noi

1. Graficul unei funcții $f: A \rightarrow B$ este o submulțime a produsului cartezian $A \times B$.

2. Deoarece o funcție asociază fiecărui element al domeniului de definiție un singur element din codomeniu, graficul G_f al funcției f are la fel de multe elemente ca domeniul funcției f .

3. Nu este obligatoriu ca A sau B să fie mulțimi numerice (submulțimi ale lui $\mathbb{R}$).

EXEMPLU: Dacă $A = \{\triangle, \square, \diamond, \circ\}$ este o mulțime formată din patru poligoane regulate (un triunghi echilateral, un pătrat, un pentagon regulat și un hexagon regulat) și definim funcția $f: A \rightarrow \mathbb{N}$ asociind fiecărui poligon regulat, $P \in A$, numărul de laturi ale lui P , putem determina graficul funcției f ca submulțime a produsului cartezian $A \times \mathbb{N}$: $G_f = \{(\triangle, 3); (\square, 4); (\diamond, 5); (\circ, 6)\}$.

4. Dacă $f: A \rightarrow B$, unde $A, B \subset \mathbb{R}$, este o funcție numerică, putem reprezenta geometric graficul funcției f în raport cu un sistem de axe ortogonale xOy , așa cum am văzut în exemplul studiat la începutul lecției.

Mulțimea de puncte ale planului astfel obținută se numește **reprezentarea geometrică a graficului funcției**.



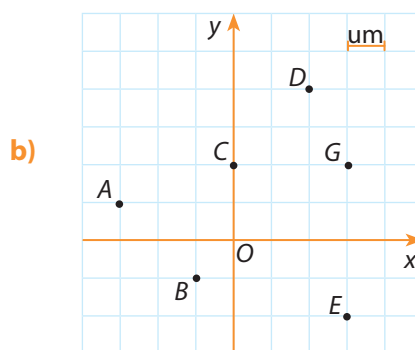
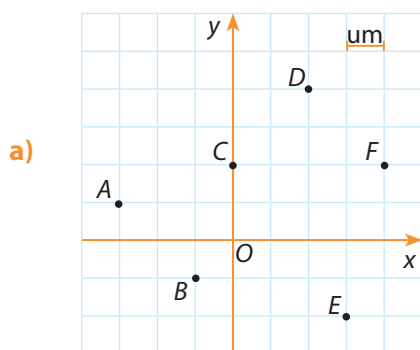
Prin abuz de limbaj (dar unul unanim acceptat), vom folosi, de obicei, denumirea de „grafic al funcției numerice f ” atât pentru a desemna mulțimea $G_f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = f(x)\}$, cât și pentru reprezentarea geometrică a acesteia în raport cu un sistem de axe ortogonale, pe care o vom nota, așadar, tot G_f . Avem:

$$M(a, b) \in G_f \Leftrightarrow a \in A \text{ și } b = f(a).$$



Aplicăm cunoștințele

1 Privește figurile de mai jos și decide dacă ele reprezintă sau nu graficul unei funcții $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{Z}$. În caz afirmativ, determină domeniul de definiție $\mathcal{D}$, mulțimea valorilor funcției și descrie legea de corespondență cu ajutorul unui tabel.



Rezolvare:

a) În figură sunt reprezentate punctele $A(-3, 1)$, $B(-1, -1)$, $C(0, 2)$, $D(2, 4)$, $E(3, -2)$ și $F(4, 2)$. Mulțimea $\mathcal{D}$ este formată din abscisele acestor puncte, prin urmare $\mathcal{D} = \{-3, -1, 0, 2, 3, 4\}$. Ordonata fiecărui punct indică imaginea prin f a abscisei respectivului punct, deci avem următorul tabel al corespondenței între mulțimile $\mathcal{D}$ și $\mathbb{Z}$:

x	-3	-1	0	2	3	4
y	1	-1	2	4	-2	2

Această corespondență este o funcție, deoarece fiecărui element al mulțimii $\mathcal{D}$ îi corespunde un singur element din $\mathbb{Z}$. Mulțimea valorilor acestei funcții este $\{-2, -1, 1, 2, 4\}$.

b) Procedăm analog: în acest caz, mulțimea $\mathcal{D}$ este $\{-3, -1, 0, 2, 3\}$. Cum în figură apar punctele $E(3, -2)$ și $G(3, 2)$, înseamnă că elementului $3 \in \mathcal{D}$ îi asociem două numere întregi, -2 și 2 , lucru care nu este permis de definiția noțiunii de funcție. În concluzie, această figură nu reprezintă graficul unei funcții.

OBSERVAȚIE: Graficul unei funcții nu poate conține două sau mai multe puncte situate pe o aceeași dreaptă verticală. Prin urmare, un triunghi sau un cerc nu pot fi grafice ale unor funcții.

2 Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + a$. Determină numărul real a , știind că punctul $A(a, 6)$ aparține graficului funcției f .

Rezolvare:

Condiția de apartenență la G_f a punctului $A(a, 6)$ revine la $f(a) = 6$, adică $2 \cdot a + a = 6$. Obținem $a = 2$.

3 Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

a) Arată că există un singur punct A pe axa Oy care aparține graficului funcției f .

b) Demonstrează că există exact două puncte, B_1 și B_2 , pe axa Ox care aparțin graficului funcției f .

c) Calculează aria triunghiului AB_1B_2 .

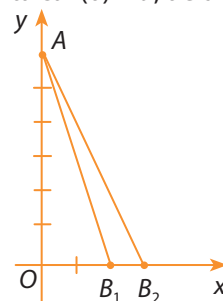
Rezolvare:

a) Punctele axei Oy au abscisa egală cu 0, deci căutăm puncte $A(0, a)$ care aparțin G_f . Rezultă că $f(0) = a$, de unde obținem că $a = 6$. Astfel, $A(0, 6)$ este singurul punct al axei Oy care aparține G_f .

b) Punctele axei Ox au ordonata egală cu 0, prin urmare căutăm punctele $B(b, 0)$ care aparțin G_f . Atunci $f(b) = 0$, deci avem de rezolvat ecuația $b^2 - 5b + 6 = 0$. Soluțiile acestei ecuații sunt $b_1 = 2$ și $b_2 = 3$, așadar există două puncte ale axei Ox , $B_1(2, 0)$ și $B_2(3, 0)$, care aparțin G_f .

c) Axele Ox și Oy sunt perpendiculare, deci $AO \perp B_1B_2$, punctul O fiind situat pe dreapta B_1B_2 . Înseamnă că AO este înălțime a triunghiului AB_1B_2 , iar aria acestuia

$$\text{este } \mathcal{A}_{AB_1B_2} = \frac{B_1B_2 \cdot AO}{2} = \frac{1 \cdot 6}{2} = 3.$$



Activitate pe echipe

Fie $\mathcal{D}$ mulțimea elevilor clasei tale, iar $\mathcal{C} = \{\text{căprui, negru, albastru, verde}\}$ o mulțime formată din patru culori.

Grupați-vă în echipe de câte 5-6 elevi. Colaborând cu colegii, determină graficul funcției $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ care asociază fiecărui copil culoarea ochilor săi. Scrie pe o foaie A4 perechile graficului, după modelul:

(Ana Apostol, verde)

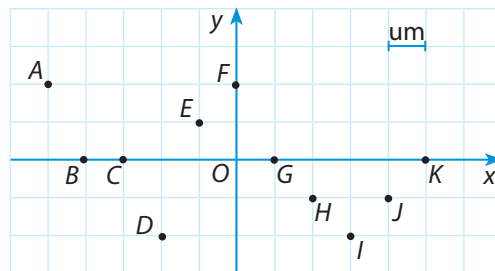
(Bogdan Bălănescu, căprui) etc.

La final, comparați graficele obținute.



Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

- Pentru fiecare dintre următoarele funcții, determină graficul ca submulțime a lui $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:
 - $f: \{-1, 0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x$;
 - $f: \{0, 1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (-1)^x$;
 - $f: \{0, 2, 4\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2x$;
 - $f: \{1, 3, 5\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x-1}{x+1}$.
- Pentru fiecare dintre funcțiile de la problema 1, reprezintă geometric G_f în raport cu un sistem de axe ortogonale xOy .
- Se consideră funcția $f: \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \mathbb{N}$, care asociază fiecărui element din domeniu suma divizorilor săi naturali. Determină graficul funcției f ca mulțime de perechi de numere, apoi reprezintă-l geometric în raport cu un sistem de axe ortogonale xOy .
- Reprezentarea geometrică a graficului unei funcții f este mulțimea $\{A, B, C, D\}$, unde $A(-2, 0)$, $B(-1, 1)$, $C(0, 2)$ și $D(1, 3)$.
 - Determină domeniul de definiție și mulțimea valorilor funcției f .
 - Reprezintă cu ajutorul unui tabel legea de corespondență a funcției f .
- În raport cu un sistem de axe ortogonale xOy se consideră punctele $A(-2, 0)$, $B(-1, 0)$, $C(0, 2)$ și $D(-1, 2)$. Mulțimea $M = \{A, B, C, D\}$ este grafic al unei funcții? Justifică răspunsul.
- Se consideră funcția $f: (-\infty, 3) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$. Stabilește care dintre următoarele puncte aparțin graficului funcției f : $A(-3, -7)$, $B(-2, -3)$, $C(0, -1)$, $D\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $E(\sqrt{2}, 3)$, $F(3, 3)$.
- Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{dacă } x \leq 1 \\ x + 1, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$. Stabilește care dintre următoarele puncte aparțin graficului funcției f : $A(-2, -5)$, $B(-1, 0)$, $C(\sqrt{2} - 1, 2 + 2\sqrt{2})$, $D(1, 2)$, $E(\sqrt{2}, 1)$, $F(3, 4)$.
- Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax - 1$. Determină numărul real a în fiecare dintre următoarele situații:
 - punctul $A(1, 2)$ aparține graficului funcției f ;
 - punctul $B(a, a + 1)$ aparține graficului funcției f .
- Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + ax + b$. Determină numerele reale a și b , știind că punctele $A(-1, -2)$ și $B(2, 4)$ aparțin graficului funcției f .
- Reprezentarea geometrică a graficului unei funcții $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ este mulțimea $\{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K\}$ din figura alăturată. Determină elementele $x \in \mathcal{D}$ pentru care:
 - $f(x) = 0$;
 - $f(x) < 0$;
 - $f(x) \geq 1$.
- Determină punctul axei Oy care aparține graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin:
 - $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$;
 - $f(x) = x^2 - 5x + 6$.
- Determină punctele axei Ox care aparțin graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin:
 - $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$;
 - $f(x) = x^2 - 5x + 6$.



13 Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 2$. Determină punctele $A(x_A, y_A)$ ale graficului funcției f în fiecare dintre următoarele situații:

a) $x_A = 1$;

b) $y_A = 4$;

c) $4x_A = y_A$;

d) $|x_A| = |y_A|$.

14 Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ și $g(x) = 2x - 1$. Demonstrează că există un singur punct care aparține atât graficului funcției f , cât și graficului funcției g și determină coordonatele acestui punct.

15* Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{2} + 2 - 2\sqrt{2}$. Stabilește dacă există puncte $A(x_A, y_A)$ ale graficului funcției f având ambele coordonate numere raționale.



Din oficiu: 1 punct

AUTOEVALUARE

Timp de lucru: 20 de minute

1 Mulțimea $\{A, B, C, D, E\}$ a punctelor marcate în figura alăturată reprezintă graficul unei funcții $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.

3 puncte

a) $f(0) = 2$.

A F

b) $\mathcal{D} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

A F

c) Mulțimea $\{f(x) \mid x \in \mathcal{D}\}$ este egală cu $\{1, 2, 3\}$.

A F

2 Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 4$. Punctul $A(x_A, y_A)$ aparține graficului funcției f . Unește prin săgeți fiecare enunț din coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta. **4 puncte**

a) Dacă $x_A = 0$, atunci $y_A = \dots$

1) -2;

b) Dacă $y_A = 0$, atunci $x_A = \dots$

2) 0;

c) Dacă $y_A = 3x_A$, atunci $y_A = \dots$

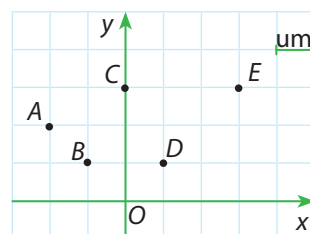
3) 4;

d) Dacă $x_A + y_A = 4$, atunci $x_A = \dots$

4) 8;

5) 12.

3 Punctele distincte $A(a, 4)$ și $B(b, 4)$ aparțin graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Determină lungimea segmentului AB . **2 puncte**



LECȚIA 3

Funcții de forma $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$ și $\mathcal{D}$ este o mulțime finită de numere reale sau un interval nedegenerat



Rezolvăm împreună

Un program de calculator generează câte un număr în fiecare secundă, pe care îl afișează pe monitor. În momentul $t_0 = 0$, pe ecran apare numărul 5. Apoi, succesiv, apar numerele 8, 11, 14, 17, 20, Programul se oprește după un minut.

a) Completează șirul de mai sus cu încă trei numere.

b) Determină o funcție $f: \{0, 1, 2, \dots, 60\} \rightarrow \mathbb{R}$ care asociază fiecărui număr $x \in \{0, 1, 2, \dots, 60\}$, numărul care apare pe ecran după x secunde de la apariția lui 5.

c) Trasează graficul funcției $g: \{0, 1, 2, 3, 4\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$.

Rezolvare:

a) Numerele se măresc cu 3 la fiecare secundă. Următoarele trei numere sunt: 23, 26, 29.

b) Avem: $f(0) = 5$, $f(1) = 5 + 3 = 8$, $f(2) = 5 + 3 + 3 = 11$, $f(3) = 5 + 3 + 3 + 3 = 14$. În general, $f(x) = 5 + \underbrace{3 + 3 + \dots + 3}_{\text{de } x \text{ ori}}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{N}$, $x \leq 60$. Altfel spus, $f(x) = 5 + 3x$, $x \in \{0, 1, 2, \dots, 60\}$.

c) Funcția g poate fi descrisă cu ajutorul următorului tabel.

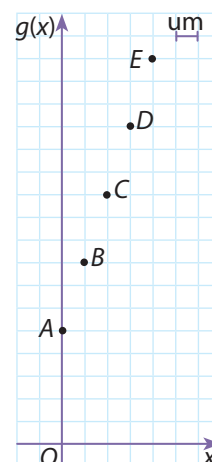
x	0	1	2	3	4
$g(x)$	5	8	11	14	17

Reprezentarea geometrică a graficului funcției g este o mulțime formată din cinci puncte: $G_g = \{A, B, C, D, E\}$, unde $A(0, 5)$, $B(1, 8)$, $C(2, 11)$, $D(3, 14)$ și $E(4, 17)$.



Ne amintim

- ♦ puncte coliniare
- ♦ proiecții ortogonale pe o dreaptă



OBSERVAȚIE: Ne amintim de problema din deschiderea Lecției 1. Funcția care modelează situația practică pe care am considerat-o acolo este $\mathcal{V}: \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \mathbb{R}, \mathcal{V}(t) = 100t$.

Mai general, dacă o mărime y depinde de o mărime x , iar dependența este direct proporțională, coeficientul de proporționalitate fiind k , putem descrie situația cu ajutorul funcției $x \rightarrow y = kx$.

Funcțiile de tipul $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, unde $\mathcal{D}$ este o mulțime de numere reale, iar a, b sunt două numere reale date, au o mare însemnătate practică și ne vom ocupa, în această lecție, cu studiul lor.

Temă de investigație

Intuiția ne spune că punctele A, B, C, D și E , care formează graficul funcției g de la punctul c) al problemei rezolvate la începutul lecției, sunt cinci puncte coliniare. Acest lucru poate fi riguros demonstrat folosind cunoștințe din clasa a VII-a.

METODA 1: Dacă, în raport cu un sistem de axe ortogonale xOy , sunt date punctele $A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$, atunci lungimea segmentului AB este: $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$.

- Calculează lungimile segmentelor AB, BC și AC și arată că $AB + BC = AC$. Folosind această observație, demonstrează că punctele A, B și C sunt coliniare.
- Utilizând același procedeu, dovedește coliniaritatea punctelor A, B și D , precum și coliniaritatea punctelor A, B și E .
- Demonstrează că punctele A, B, C, D și E sunt coliniare.

METODA 2: Dacă, în raport cu un sistem de axe ortogonale xOy , sunt date punctele $A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$, coordonatele mijlocului M al segmentului AB sunt: $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$.

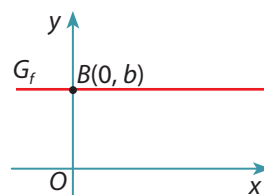
- Arată că punctul B este mijlocul segmentului AC . Folosind această observație, demonstrează că punctele A, B și C sunt coliniare.
- Utilizând același procedeu, dovedește coliniaritatea punctelor B, C și D , precum și coliniaritatea punctelor C, D și E .
- Demonstrează că punctele A, B, C, D și E sunt coliniare.

Observăm și descoperim cunoștințe noi

Considerăm, în cele ce urmează, funcții de forma $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Distingem două situații:

1. Dacă $a = 0$, atunci funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = b$ se numește **funcție constantă**.

Graficul funcției constante este format din mulțimea tuturor perechilor (x, b) , unde $x \in \mathbb{R}$. Reprezentarea sa geometrică în raport cu un sistem de axe ortogonale xOy este dreapta orizontală care conține punctul $B(0, b)$.



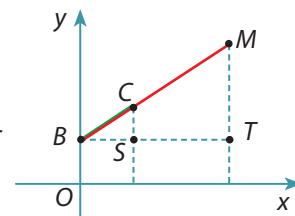
2. Dacă $a \neq 0$, atunci funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ se numește **funcție de gradul I**.

Graficul acestei funcții este mulțimea $G_f = \{(x, ax + b) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Reprezentarea geometrică a graficului este formată din toate punctele $M(x, ax + b)$, unde $x \in \mathbb{R}$.

În particular, pentru $x = 0$ și $x = 1$, punctele $B(0, b)$ și $C(1, a + b)$ aparțin graficului funcției f ; graficul funcției f este chiar dreapta BC .

Considerăm punctul $M(x, ax + b) \in G_f$. Să arătăm că $M \in BC$.

Figura alăturată corespunde situației $a > 0$ (atunci $a + b > b$, deci $y_C > y_B$), însă raționamentul este similar când $a < 0$. Fie punctele $S(1, b)$ și $T(x, b)$; atunci B, S și T sunt coliniare, iar dreapta BT este paralelă cu axa Ox . Dreapta CS este paralelă cu dreapta MT și ambele sunt perpendiculare pe axa Ox . Avem: $BT = |x_T - x_B| = |x|, |MT| = |y_M - y_T| = |(ax + b) - b| = |ax| = a \cdot |x|$. Dacă $x = 0$, este clar că $M = B \in BC$. Dacă $x \neq 0$, atunci



$\frac{MT}{BT} = \frac{a \cdot |x|}{|x|} = a = \frac{CS}{BS}$. Cum $\angle MTB = \angle CSB = 90^\circ$, triunghiurile MTB și CSB sunt asemenea (Cazul I de asemănare). Deducem că $\angle MBT = \angle CBS$ și de aici rezultă că punctele B, C și M sunt coliniare.

Reciproc, se arată că orice punct de pe dreapta BC aparține graficului funcției f .

Reține!

- Funcția constantă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = b, b \in \mathbb{R}$, are drept grafic o dreaptă orizontală care conține punctul $B(0, b)$.
- Funcția de gradul I $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$, are drept grafic o dreaptă oblică ce intersectează axa Ox în punctul $A\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ și axa Oy în punctul $B(0, b)$.
- Pentru a reprezenta geometric graficul unei funcții de forma $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, determinăm două puncte M și N ale graficului și trasăm dreapta MN .
- Orice dreaptă orizontală sau oblică din plan este grafic al unei funcții, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.
- Nicio dreaptă verticală nu este grafic al unei funcții.



Aplicăm cunoștințele

1 Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2x + 3$.

a) Reprezintă graficul funcției în raport cu un sistem de axe ortogonale xOy .

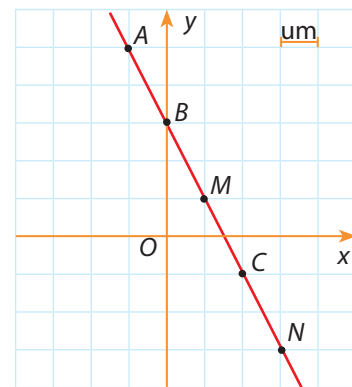
b) Arată că punctele $A(-1, 5)$, $B(0, 3)$ și $C(2, -1)$ aparțin graficului funcției f și justifică faptul că punctele A , B și C sunt coliniare.

Rezolvare:

a) Observăm că $f(1) = 1$, iar $f(3) = -3$; rezultă că $M(1, 1) \in G_f$ și $N(3, -3) \in G_f$. Cum f este o funcție de gradul I, graficul său este o dreaptă. O dreaptă este determinată de două puncte ale sale, prin urmare G_f este dreapta MN din figura alăturată.

În loc să calculăm $f(1)$ și $f(3)$, puteam calcula $f(a)$ și $f(b)$ pentru orice $a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$, obținând alte două puncte $M'(a, f(a))$ și $N'(b, f(b))$ ale aceleiași drepte. De obicei, folosim un **tabel de valori** ca cel de mai jos atunci când determinăm două puncte ale graficului.

x	1	3
$f(x)$	1	-3



b) Întrucât $f(-1) = -2 \cdot (-1) + 3 = 5$, $f(0) = -2 \cdot 0 + 3 = 3$ și $f(2) = -2 \cdot 2 + 3 = -1$, punctele $A(-1, 5)$, $B(0, 3)$ și $C(2, -1)$ aparțin G_f , care este o dreaptă. Prin urmare, punctele A , B și C sunt coliniare.

2 Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 6$.

a) Determină punctele de intersecție a graficului funcției f cu axele de coordonate, apoi reprezintă grafic funcția f .

b) Calculează sinusul unghiului ascuțit format de dreptele G_f și Ox .

c) Calculează distanța de la originea reperului cartezian la graficul funcției f .

Rezolvare:

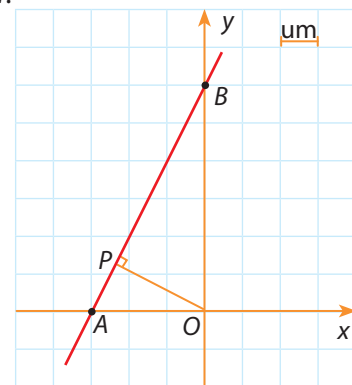
a) Fie $\{A\} = G_f \cap Ox$ și $\{B\} = G_f \cap Oy$. Cum $A \in Ox$, atunci $y_A = 0$, prin urmare $A(a, 0)$, cu $a \in \mathbb{R}$. Din condiția $A \in G_f$ deducem că $f(a) = 0$, de unde $a = -3$, așadar $A(-3, 0)$. Cum $B \in Oy$, atunci $x_B = 0$, deci $B(0, b)$, cu $b \in \mathbb{R}$. Din condiția $B \in G_f$ deducem că $f(0) = b$, de unde $b = 6$, așadar $B(0, 6)$. Graficul funcției f este dreapta AB , reprezentată în figura alăturată.

b) În triunghiul dreptunghic OAB , lungimile catetelor sunt $OA = |x_A| = 3$, respectiv $OB = |y_B| = 6$. Lungimea ipotenuzei se poate determina folosind Teorema lui Pitagora: $AB^2 = OA^2 + OB^2 = 45 \Rightarrow AB = 3\sqrt{5}$. Cum $\angle(G_f, Ox) =$

$$= \angle OAB, \text{ rezultă că } \sin(\angle(G_f, Ox)) = \frac{OB}{AB} = \frac{6}{3\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

c) Construim $OP \perp AB$, cu $P \in AB$; atunci $d(O, G_f) = OP$. Calculând în două moduri

$$\text{aria triunghiului } OAB, \text{ avem: } \mathcal{A}_{\triangle OAB} = \frac{OA \cdot OB}{2} = \frac{AB \cdot OP}{2} \Rightarrow OP = \frac{OA \cdot OB}{AB} = \frac{3 \cdot 6}{3\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}.$$



3 În figura alăturată este reprezentat graficul unei funcții $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- Determină legea de corespondență a funcției f .
- Care este mulțimea absciselor punctelor de pe graficul funcției situate deasupra axei Ox ?
- Determină punctele de pe G_f aflate la distanța 1 față de axa Oy .

Rezolvare:

a) Observăm că G_f intersectează axa Ox în punctul $A(2, 0)$ și axa Oy în punctul $B(0, 2)$. Cum graficul este o dreaptă, funcția f va fi de forma $f(x) = ax + b$, cu $a, b \in \mathbb{R}$. Avem: $A \in G_f \Rightarrow f(2) = 0 \Rightarrow 2a + b = 0$; $B \in G_f \Rightarrow f(0) = 2 \Rightarrow b = 2$. Deducem că $a = -1$, prin urmare $f(x) = -x + 2$.

b) Abscisele punctelor de pe G_f situate deasupra axei Ox sunt soluțiile inecuației $f(x) > 0$. Din $-x + 2 > 0$ obținem că $x \in (-\infty, 2)$. Geometric, acest interval este proiecția semidreptei $(AB$ pe axa Ox .

c) Punctele situate la distanța 1 față de axa Oy au abscisele egale fie cu 1, fie cu -1 . Prin urmare, căutăm punctele $M(1, m) \in G_f$ și $N(-1, n) \in G_f$. Avem: $m = f(1) = 1$, $n = f(-1) = 3$; punctele căutate sunt $M(1, 1)$, respectiv $N(-1, 3)$.

4 Se consideră funcțiile $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1, g(x) = 3x + 2$ și $h(x) = 2x - 2$.

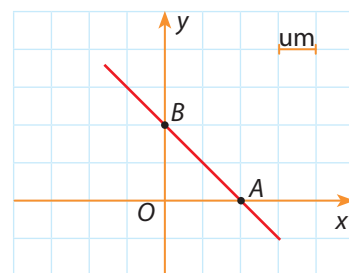
a) Demonstrează că G_f și G_g sunt drepte concurente și determină coordonatele punctului de intersecție a celor două drepte.

b) Demonstrează că G_f și G_h sunt drepte paralele.

Rezolvare:

a) Căutăm un punct $A(a, b)$ care să fie situat atât pe G_f , cât și pe G_g . Avem: $A \in G_f \Rightarrow f(a) = b \Rightarrow 2a + 1 = b$; $A \in G_g \Rightarrow g(a) = b \Rightarrow 3a + 2 = b$. Prin urmare, avem de rezolvat sistemul liniar de două ecuații cu două necunoscute $\begin{cases} 2a + 1 = b \\ 3a + 2 = b \end{cases}$. Obținem soluția (unică) $a = -1, b = -1$, așadar G_f și G_g sunt drepte concurente, iar $G_f \cap G_g = \{A\}$, unde $A(-1, -1)$.

b) Căutăm un punct $B(c, d)$ care să fie situat atât pe G_f , cât și pe G_h . Avem: $B \in G_f \Rightarrow f(c) = d \Rightarrow 2c + 1 = d$; $B \in G_h \Rightarrow h(c) = d \Rightarrow 2c - 2 = d$. Prin urmare, avem de rezolvat sistemul liniar de două ecuații cu două necunoscute $\begin{cases} 2c + 1 = d \\ 2c - 2 = d \end{cases}$. Scăzând cele două ecuații, obținem că $3 = 0$, imposibil. Rezultă că sistemul nu are soluții, așadar $G_f \cap G_h = \emptyset$, deci $G_f \parallel G_h$.



Observăm și descoperim cunoștințe noi

Ne punem întrebarea cum arată graficul unei funcții de forma $f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, al cărei domeniu de definiție nu este întreaga mulțime $\mathbb{R}$ a numerelor reale, ci doar o submulțime $\mathcal{D}$ a acesteia.

În acest caz, G_f nu mai este o întreagă dreaptă, ci doar o porțiune din aceasta, astfel încât proiecția G_f pe axa Ox să fie chiar domeniul $\mathcal{D}$ al funcției.

Domeniul $\mathcal{D}$	Graficul funcției $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$
$(-\infty, \alpha], [\beta, +\infty)$	semidreaptă care își conține originea
$(-\infty, \alpha), (\beta, +\infty)$	semidreaptă care nu își conține originea
$[\alpha, \beta]$	segment care își conține capetele
(α, β)	segment care nu își conține capetele
$[\alpha, \beta), (\alpha, \beta]$	segment care își conține doar unul dintre capete
$\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$	n puncte coliniare





Aplicăm cunoștințele

Trasează graficul funcției $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 2$ în fiecare dintre următoarele situații:

a) $\mathcal{D} = (-\infty, 2]$;

b) $\mathcal{D} = (-1, \infty)$;

c) $\mathcal{D} = [-2, 1]$;

d) $\mathcal{D} = (0, 3]$;

e) $\mathcal{D} = (-1, 2]$;

f) $\mathcal{D} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

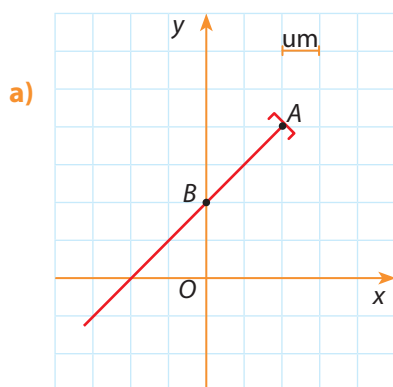
Rezolvare:

a) G_f este o semidreaptă care își conține originea, astfel încât proiecția sa pe axa Ox să fie intervalul $(-\infty, 2]$. Determinăm originea semidreptei și încă un punct al acesteia, folosind un tabel de valori. Graficul este semidreapta AB care își conține originea A , din figura a), unde $A(2, 4)$, iar $B(0, 2)$.

b) În acest caz, G_f este o semidreaptă care nu își conține originea, astfel încât proiecția sa pe axa Ox să fie intervalul $(-1, \infty)$. Observăm că $-1 \notin \mathcal{D} = (-1, \infty)$, așadar nu putem calcula $f(-1)$. Cu toate acestea, pentru a putea determina originea semidreptei, în tabelul de valori trebuie să dăm lui x valoarea -1 , calculând $f(-1)$ nu pentru funcția $f: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 2$, ci pentru „prelungirea la $\mathbb{R}$ ” a acesteia, $\bar{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \bar{f}(x) = x + 2$. Suntem îndreptățiți să facem acest lucru, deoarece semidreapta care reprezintă graficul funcției f este o porțiune a dreptei care reprezintă graficul lui $\bar{f}$. În concluzie, G_f va fi semidreapta CA care nu își conține originea C , din figura b), unde $C(-1, 1)$, iar $A(2, 4)$.

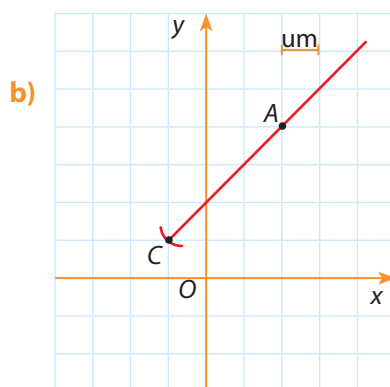
Procedând analog, obținem graficele din figurile c), d) și e).

f) Modalitatea de a trasa graficul unei funcții având ca domeniu o mulțime finită a fost studiată în lecția precedentă. În cazul nostru, $G_f = \{A, B, C, D, E\}$ este reprezentat în figura f). Nu avem voie să unim cele cinci puncte (sau o parte dintre ele): proiecția G_f pe axa Ox nu va mai coincide cu domeniul funcției, care este o mulțime cu cinci elemente.



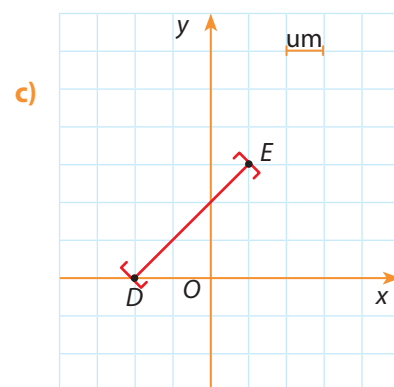
x	0	2]
$f(x)$	2	4]

G_f este semidreapta AB care își conține originea A



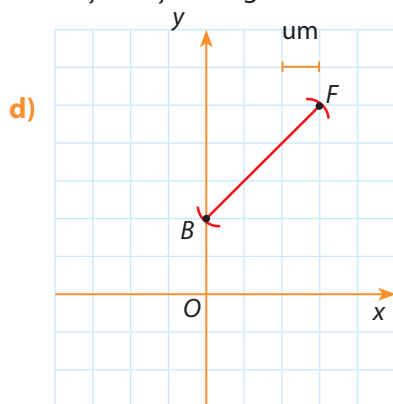
x	-1	2
$f(x)$	1	4

G_f este semidreapta CA care nu își conține originea C



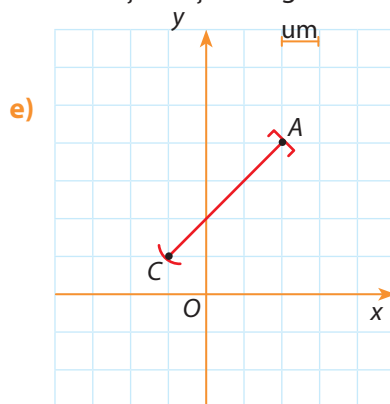
x	-2	1]
$f(x)$	0	3]

G_f este segmentul DE care își conține ambele capete



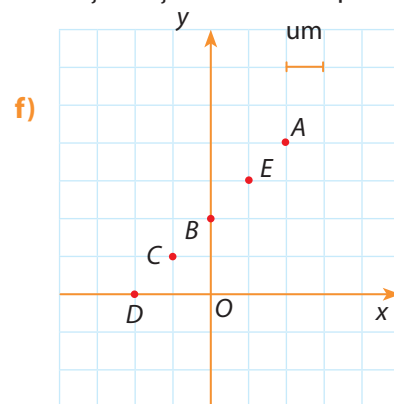
x	(0	3]
$f(x)$	(2	5]

G_f este segmentul BF care nu își conține capetele



x	-1	2]
$f(x)$	(1	4]

G_f este segmentul CA care își conține doar capătul A



x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	0	1	2	3	4

$G_f = \{A, B, C, D, E\}$



Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1 Reprezintă graficele funcțiilor $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ în raport cu un sistem de axe ortogonale xOy în fiecare dintre cazurile:

a) $f(x) = 2$;

c) $f(x) = x$;

b) $f(x) = -\sqrt{3}$;

d) $f(x) = -x$.

2 Determină două puncte ale graficului, apoi trasează graficul fiecăreia dintre următoarele funcții:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 4$;

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{2} - 1$;

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -3x + 3$;

d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x\sqrt{2} + 4$.

3 Determină punctele axelor de coordonate care aparțin graficelor funcțiilor și trasează graficele pentru:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 1$;

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -\frac{x}{3} + 1$;

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 2$;

d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2x + 1$.

4 Reprezintă graficele funcțiilor $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ în raport cu un sistem de axe ortogonale xOy , cunoscând:

a) $\mathcal{D} = \{-1, 0, 1, 2\}, f(x) = x - 1$;

c) $\mathcal{D} = [-3, 5], f(x) = \frac{x+1}{2}$;

b) $\mathcal{D} = (-\infty, 2], f(x) = 2 - x$;

d) $\mathcal{D} = \left(\frac{1}{2}, \infty\right), f(x) = 4x - 1$.

5 Determină funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ în fiecare dintre următoarele situații:

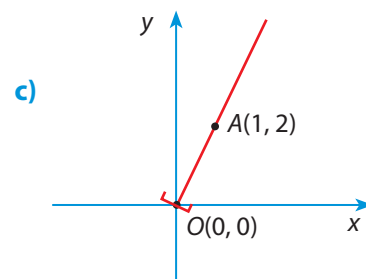
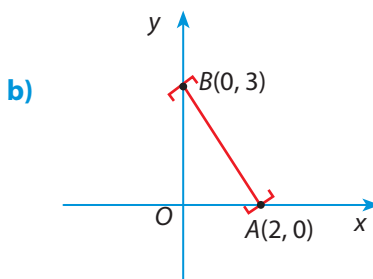
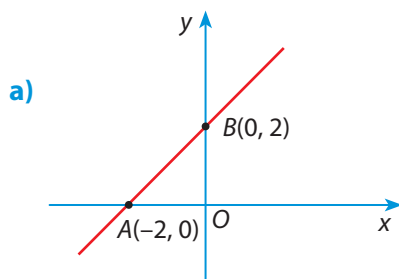
a) $f(0) = 1$ și $f(1) = 2$;

c) $A(-2, 1) \in G_f$ și $B(1, 7) \in G_f$;

b) $A(-2, 0) \in G_f$ și $f(1) = -3$;

d) $f(4) - f(1) = -1$ și $A(6, -1) \in G_f$.

6 Determină funcțiile având următoarele grafice:



7 Se consideră punctele $A(1, 1)$, $B(-1, -5)$ și $C(4, 10)$.

a) Determină funcția al cărei grafic este dreapta AB .

b) Arată că punctele A , B și C sunt coliniare.

8 Stabilește dacă următoarele puncte sunt coliniare:

a) $A(1, 1)$, $B(2, 3)$ și $C(0, -1)$;

b) $A(3, -1)$, $B(1, 3)$ și $C(0, 4)$.

9 Determină valoarea numărului real m pentru care următoarele puncte sunt coliniare:

a) $A(2, 3)$, $B(-1, 6)$, $C(3, m)$;

b) $A(\sqrt{2}, 3)$, $B(-\sqrt{2}, -1)$, $C(m, 1 + \sqrt{8})$.

10 Dacă A și B sunt punctele de pe axele Ox , respectiv Oy care se află pe graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x-4}{2}$, determină perimetrul și aria triunghiului OAB .

11 Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -\frac{x}{2} + 1$. Calculează distanța de la originea sistemului de axe ortogonale xOy la graficul funcției f .

12 Se dă funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 4$. Determină distanța de la punctul $C(0, 2)$ la graficul funcției f .

13 Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x\sqrt{3} + 3$. Stabilește natura triunghiului OAM , unde A și B sunt punctele de pe axele Ox , respectiv Oy care aparțin graficului funcției f , iar punctul M este mijlocul segmentului AB .

- 14** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 5$ și punctele $A(-1, a), B(b, -2)$ de pe graficul său. Punctele A' și B' sunt proiecțiile punctelor A și B pe axele Oy , respectiv Ox .
- Determină coordonatele punctelor A' și B' .
 - Calculează aria pentagonului $OA'ABB'$.
- 15** Se dau funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - 2$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 2x + 1$.
- Determină punctele A și B de pe axa absciselor care sunt situate pe graficele funcțiilor f , respectiv g .
 - Determină coordonatele punctului P care aparține graficelor ambelor funcții și calculează aria triunghiului PAB .
- 16** Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 1$ și $g(x) = \frac{5+2x}{2}$.
- Demonstrează că nu există niciun punct care să aparțină graficelor ambelor funcții.
 - Reprezintă graficele celor două funcții în același sistem de axe ortogonale xOy . Ce se poate remarca?
- 17** **Lucru în echipă:** Împreună cu colegul de bancă, rezolvați sarcinile propuse, analizați rezultatele găsite și formulați concluziile.
- Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x + 3$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x - 1$.
- Determină coordonatele următoarelor puncte: $\{A\} = G_f \cap Ox, \{B\} = G_f \cap Oy, \{C\} = G_g \cap Ox, \{D\} = G_g \cap Oy$ și $\{P\} = G_f \cap G_g$.
 - Stabilește natura fiecăruia dintre triunghiurile AOB, DOC și PAC .
 - Care este poziția dreptelor care reprezintă graficele celor două funcții?
- 18** Între localitățile A și B este o distanță de 100 km. Un biciclist pleacă din A către B la ora 9:00 și rulează cu o viteză constantă de 20 km/h. Un alt biciclist pleacă din B către A la ora 10:00 și rulează cu viteza constantă de 25 km/h. Notăm cu $f(x)$ și $g(x)$ distanțele, în kilometri, la care se află față de localitatea A primul, respectiv al doilea biciclist la ora x .
- Determină legile de corespondență ale funcțiilor $f, g: [9, 14] \rightarrow \mathbb{R}$.
 - Trasează graficele celor două funcții.
 - Determină ora la care se vor întâlni cei doi bicicliști (cu aproximație de 1 minut).



Din oficiu: 1 punct

AUTOEVALUARE

Timp de lucru: 40 de minute

- 1** Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F. **3 puncte**
- Graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x + 1$ nu trece prin originea sistemului de axe xOy . A F
 - Graficul funcției $f: \{-3, 4, 7\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x + 5$ este o dreaptă. A F
 - $P(-1, -1)$ este punctul având coordonatele egale situat pe graficul funcției $f: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$. A F
- 2** Încercuiește litera care indică singurul răspuns corect. **3 puncte**
- Graficul funcției $f: [-3, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -4x + 7$ este:
 - o semidreaptă;
 - o dreaptă;
 - un segment.
 - Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ al cărei grafic este dreapta AB , cu $A(0, -1)$ și $B(f(0), -6)$ este:
 - $f(x) = 6x - 1$;
 - $f(x) = 5x - 1$;
 - $f(x) = -3x + 1$.
 - Valoarea lui m pentru care punctele $A(1, 1), B(0, 5)$ și $C(m, 9)$ sunt coliniare este:
 - $m = -1$;
 - $m = 4$;
 - $m = 1$.
- 3** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 1$. Determină punctele situate pe graficul funcției f care se află la o distanță egală cu 5 față de originea sistemului de axe xOy . **3 puncte**

LECȚIA 4

Elemente de statistică: indicatorii tendinței centrale a unei serii de date statistice



Rezolvăm împreună

Mediile la matematică în clasa a VII-a ale actualei clase a VIII-a B, în ordine alfabetică a elevilor, au fost următoarele:

8, 7, 10, 9, 6, 5, 7, 7, 8, 6, 6, 7, 10, 5, 7, 6, 9, 8, 9, 8, 7, 5, 6, 8, 7.

a) Reprezintă situația școlară la matematică cu ajutorul unei diagrame cu bare verticale și al unui grafic.

b) Determină media clasei la matematică.

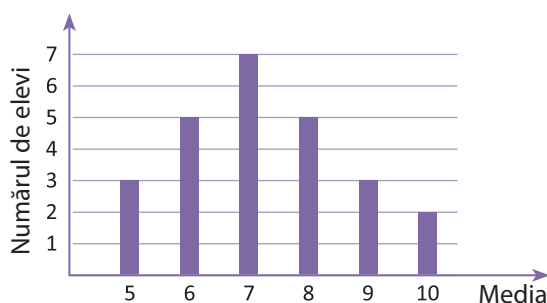
Rezolvare:

a) În clasă sunt 25 de elevi, dintre care: trei au avut media 5, cinci au avut media 6, șapte au avut media 7, cinci au avut media 8, trei au avut media 9 și 2 au obținut, în clasa a VII-a, media 10 la matematică. Putem sintetiza această situație cu ajutorul următorului tabel:

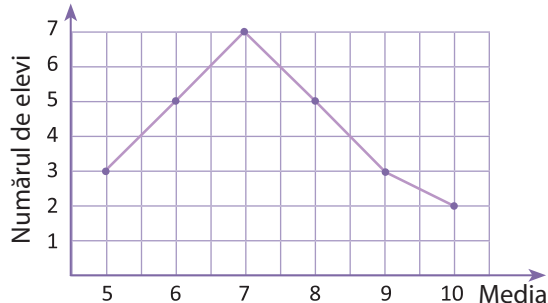
Media	5	6	7	8	9	10
Numărul de elevi	3	5	7	5	3	2

Reprezentările situației școlare sunt cele din figurile de mai jos.

Diagramă cu bare verticale



Grafic



b) Suma mediilor obținute de elevi în clasa a VII-a a fost $(5 + 5 + 5) + (6 + 6 + 6 + 6 + 6) + (7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7) + (8 + 8 + 8 + 8 + 8) + (9 + 9 + 9) + (10 + 10) = 5 \cdot 3 + 6 \cdot 5 + 7 \cdot 7 + 8 \cdot 5 + 9 \cdot 3 + 10 \cdot 2 = 181$.

Media clasei la matematică a fost $\frac{181}{25} = 7,24$.



Observăm și descoperim cunoștințe noi

1. Atunci când studiem o anumită proprietate (o *caracteristică*) a unei mulțimi, numită *populație statistică*, formată din *unități* (sau *indivizi*), obținem un set de valori (*date statistice*): $x_1, x_2, \dots, x_N$.

Nu întotdeauna aceste valori sunt diferite. Dacă $x_1, x_2, \dots, x_k$ sunt valorile distincte din lista de mai sus, astfel încât x_1 se repetă de n_1 ori, x_2 se repetă de n_2 ori, $\dots$, x_k se repetă de n_k ori, unde $n_1 + n_2 + \dots + n_k = N$, vom reprezenta **seria de date statistice** printr-un tabel de forma:

x	x_1	x_2	$\dots$	x_k
n	n_1	n_2	$\dots$	n_k

Spunem că $n_1, n_2, \dots, n_k$ sunt **frecvențele (absolute)** corespunzătoare valorilor $x_1, x_2, \dots$, respectiv x_k (reprezentarea seriei printr-un grafic se mai numește poligonul frecvențelor).

EXEMPLU: În problema pe care am rezolvat-o împreună la începutul lecției, mulțimea elevilor clasei a VII-a B din anul școlar precedent este formată din $N = 25$ de copii, iar datele statistice sunt cele 25 de medii la obiectul Matematică obținute de aceștia. Observăm că există $k = 6$ medii distincte ($x_1 = 5, x_2 = 6, x_3 = 7, x_4 = 8, x_5 = 9$ și $x_6 = 10$). Există 3 elevi cu media 5, prin urmare frecvența valorii x_1 este $n_1 = 3$; există 5 elevi cu media 6,



așadar frecvența valorii x_2 este $n_2 = 5$ etc. Seria de date se reprezintă prin tabelul:

x	5	6	7	8	9	10
n	3	5	7	5	3	2

Atunci când analizăm o serie statistică, de cele mai multe ori suntem interesați de comportarea populației ca întreg și nu de fiecare individ în parte. Informații importante oferă indicatorii tendinței centrale: media, modul (dominanta) și mediana.

2. Media unei serii de date statistice este media aritmetică a tuturor valorilor seriei:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}.$$

În cazul în care avem doar k valori distincte $x_1, x_2, \dots, x_k$, cu frecvențele corespunzătoare $n_1, n_2, \dots, n_k$, media seriei se poate calcula ca medie aritmetică ponderată:

$$\bar{x} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_k n_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k}.$$

EXEMPLU: În problema pe care am rezolvat-o la începutul lecției, media seriei de date statistice este:

$$\bar{x} = \frac{5 \cdot 3 + 6 \cdot 5 + 7 \cdot 7 + 8 \cdot 5 + 9 \cdot 3 + 10 \cdot 2}{3 + 5 + 7 + 5 + 3 + 2} = 7,24$$

(după cum, de altfel, am văzut deja în soluția punctului b)).

OBSERVAȚIE: Media unei serii de date statistice nu este, obligatoriu, valoare a seriei: în exemplul nostru, media este 7,24, iar valorile seriei sunt numerele naturale de la 5 la 10.

3. Modul (sau **dominanta**) unei serii de date statistice este cea valoare a seriei căreia îi corespunde cea mai mare frecvență. Niciuna dintre denumirile mod/dominantă nu s-a impus în limbajul statistic, prin urmare le vom folosi alternativ.

EXEMPLU: În problema pe care am rezolvat-o împreună la începutul lecției, modul seriei mediilor la matematică este 7, deoarece acestei valori îi corespunde cea mai mare frecvență. Modul este ușor identificabil în reprezentarea cu bare verticale (este valoarea de pe axa orizontală în dreptul căreia se ridică bara cea mai înaltă) sau în reprezentarea cu ajutorul graficului (este valoarea de pe axa orizontală căreia îi corespunde punctul situat cel mai sus).

OBSERVAȚIE: Este posibil ca mai multor valori ale unei serii să le corespundă o aceeași cea mai mare frecvență. În acest caz, spunem că seria de date statistice este *multimodală*.

De exemplu, seria de date alăturată este bimodală, atât valoarea 2, cât și valoarea 6 fiind dominante (cu frecvența maximală 10).

x	2	3	4	5	6	7
n	10	5	7	9	10	8

4. Presupunem că valorile unui set de date statistice sunt ordonate crescător: $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_N$.

Amplitudinea seriei statistice este diferența dintre cea mai mare și cea mai mică valoare: $x_N - x_1$.

Mediana seriei statistice se definește astfel:

• dacă N este număr impar, $N = 2p + 1$, mediana este valoarea „din centru”, x_{p+1} (există p valori ale seriei cel mult egale cu x_{p+1} și p valori ale seriei cel puțin egale cu x_{p+1});

• dacă N este număr par, $N = 2p$, mediana este media aritmetică a valorilor „din centru”, $\frac{x_p + x_{p+1}}{2}$.

EXEMPLU: În problema pe care am rezolvat-o împreună la începutul lecției, mediana seriei mediilor la matematică este egală cu 7. Într-adevăr, ordonăm crescător cele 25 de valori:

$$\underbrace{5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7}_{12 \text{ valori}} \boxed{7} \underbrace{7, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 10, 10}_{12 \text{ valori}}$$

Cum $25 = 2 \cdot 12 + 1$, mediana este cea de-a 13-a valoare a seriei, adică 7. Ne puteam da seama de la bun început că a 13-a valoare a seriei se află în grupa celor șapte medii de 7, deoarece medii de 5 sau de 6 sunt $3 + 5 = 8$, medii de 5, de 6 sau de 7 sunt $3 + 5 + 7 = 15$, iar $8 < 13 \leq 15$.

OBSERVAȚIE: În cazul unei serii de date cu număr par de valori, este posibil ca mediana să nu fie valoare a seriei. De exemplu, în cazul seriei cu 28 de valori reprezentată prin tabelul alăturat, mediana este media aritmetică dintre a 14-a și a 15-a valoare, adică $\frac{4 + 5}{2} = 4,5$.

x	2	3	4	5	6	7
n	7	2	5	3	6	5



**Aplicăm cunoștințele**

1 Alina, Bianca și Carmen participă la un concurs de dans. Există șase arbitri, care acordă punctaje întregi, maximul posibil fiind 10. Notele primite de cele trei fete sunt:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
Alina	7	10	7	6	8	7
Bianca	7	8	7	4	8	8
Carmen	8	8	8	5	8	7

a) În cazul în care clasamentul este dat de media punctajelor obținute, cu două zecimale exacte, cum vor fi ordonate cele trei fete?

b) Pentru a reduce factorul subiectivitate în notare se stabilește ca cel mai mic și cel mai mare dintre punctajele obținute de un concurent să fie eliminate, calculându-se doar media celor patru punctaje rămase. Cum vor fi ordonate în clasament cele trei fete în acest caz?

Rezolvare:

a) Media Alinei este: $\frac{7+10+7+6+8+7}{6} = \frac{45}{6} = 7,50$. Media Biancăi este $\frac{7+8+7+4+8+8}{6} = \frac{42}{6} = 7,00$.

Media lui Carmen este $\frac{8+8+8+5+8+7}{6} = \frac{44}{6} \approx 7,33$ (am efectuat împărțirea cu două zecimale exacte). Între cele trei fete, ordinea este Alina – Carmen – Bianca.

b) În acest caz, media Alinei este $\frac{7+7+8+7}{4} = 7,25$, media Biancăi este $\frac{7+7+8+8}{4} = 7,50$, iar media lui

Carmen este $\frac{8+8+8+7}{4} = 7,75$. Între cele trei fete, ordinea devine Carmen – Bianca – Alina.

Observăm că valorile extreme ale unei serii statistice influențează media seriei. Uneori, acestea sunt eliminate, pentru o mai mare acuratețe a informației.

2 Dispecerul unei firme de taximetrie dintr-un oraș înregistrează comenzile primite de-a lungul unei zile, în intervalul orar 6:00 – 22:00:

Interval orar	[6 – 8]	(8 – 10]	(10 – 12]	(12 – 14]	(14 – 16]	(16 – 18]	(18 – 20]	(20 – 22]
Număr comenzi	220	250	175	200	210	220	150	125

a) În ce interval de două ore trebuie să se asigure dispecerul că sunt cele mai multe mașini pe stradă?

b) În ce interval orar se află momentul în care numărul comenzilor înregistrate până atunci este egal cu numărul comenzilor care au fost înregistrate ulterior?

Rezolvare:

a) Cea mai mare frecvență este 250 și corespunde intervalului orar 8 – 10. Prin urmare, în acest interval orar trebuie asigurate cât mai multe mașini pe stradă.

b) Înregistrăm într-un tabel numărul comenzilor primite de dimineață până în respectivul interval orar, inclusiv:

Interval orar	[6 – 8]	(8 – 10]	(10 – 12]	(12 – 14]	(14 – 16]	(16 – 18]	(18 – 20]	(20 – 22]
Număr comenzi	220	470	645	845	1055	1275	1425	1550

Numărul total de comenzi din acea zi a fost 1550, iar $1550 : 2 = 775$. Intervalul median al seriei statistice (cel care include comenzile cu numerele 775 și 776) este 12 – 14.

Reține!

♦ Indicatorii tendinței centrale a unei serii de date statistice sunt: media, mediana, modul și amplitudinea.

♦ **Media** ($\bar{x}$) unei serii cu N date, care iau valorile $x_1, x_2, \dots, x_N$, este media aritmetică a tuturor valorilor seriei:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}$$

♦ **Modul (sau dominantă)** unei serii de date statistice este cea valoare a seriei căreia îi corespunde cea mai mare frecvență.

Se consideră valorile setului de date ordonate crescător: $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_N$.

♦ **Amplitudinea** seriei statistice este diferența dintre cea mai mare și cea mai mică valoare: $x_N - x_1$.

♦ **Mediana** seriei statistice se definește astfel:

• dacă N este număr impar ($N = 2p + 1$), atunci mediana este valoarea „din centru”, x_{p+1} ;

• dacă N este număr par ($N = 2p$), atunci mediana este media aritmetică a valorilor „din centru”, $\frac{x_p + x_{p+1}}{2}$.



Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1 Determină media, mediana și modul seriei de date statistice:

a) 9, 12, 10, 11, 10;

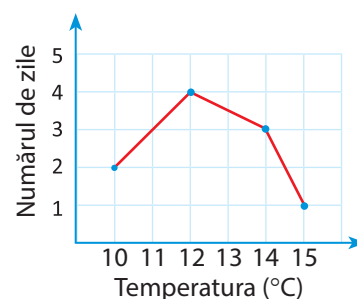
b) 7, 3, 9, 7, 4, 7, 1, 2.

2 Graficul alăturat prezintă temperatura zilnică maximă înregistrată într-o decadă a lunii martie.

a) Reprezintă seria statistică folosind un tabel.

b) Determină temperatura medie din perioada înregistrărilor.

c) Compară mediana seriei cu modul acesteia.



3 Vârstele membrilor clubului de lectură al școlii sunt date în următorul tabel:

Vârsta	11	12	13	14	15
Număr de elevi	2	3	4	5	2

a) Reprezintă această serie statistică cu ajutorul unei diagrame cu bare verticale și cu ajutorul unui grafic.

b) Determină media, mediana și modul seriei.

4 Se consideră seria de date statistice 2, 5, 8, 6, 7, x , având media egală cu 6. Determină mediana și modul seriei.

5 Andrei are la matematică notele 8, 6, 8, 9, 8, 10, 9. Înainte de încheierea mediei, este anunțată o ultimă evaluare. Este posibil ca Andrei să obțină o notă care să-i permită să termine anul cu media 9 la matematică?

6 Se consideră seria statistică 2, 5, 7, 7, 7, 9, 12. Este posibil să eliminăm o valoare astfel încât seria rămasă să aibă aceeași medie, același mod, aceeași amplitudine și aceeași mediană cu cele ale seriei inițiale?

7 Se consideră seria de date statistice 2, 5, 7, 7, 7, 9, 12.

a) Adaugă o valoare astfel încât seria obținută să aibă media egală cu 20.

b) Cum se modifică mediana și modul seriei inițiale?

8 Se consideră seria statistică: 5, 7, 8, 9, x , y . Determină valorile x și y în cazurile:

a) modul este 8 și media este 8;

b) media este 8,5 și amplitudinea este 10.

9 Tabelul de mai jos arată cât timp petrec în sala de antrenament, după terminarea orelor, fetele din lotul echipei de handbal a școlii.

Timp (minute)	(0-20]	(20-40]	(40-60]	(60-80]	(80-100]
Număr de sportive	2	8	6	3	1

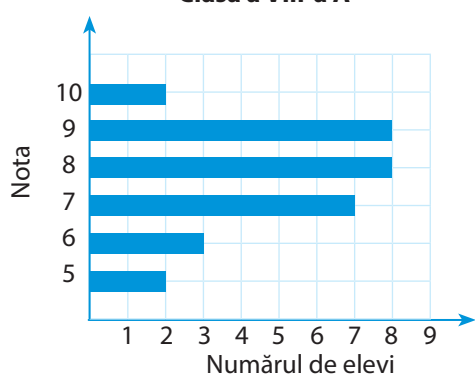
În calcule, folosim pentru fiecare interval de timp valoarea sa „centrală”: 10 pentru intervalul (0-20], 30 pentru interval (20-40] etc.

a) Determină media, mediana și modul acestei serii de date.

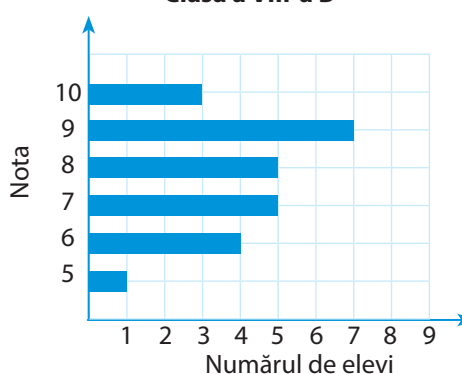
b) Care dintre indicatorii tendinței centrale caracterizează mai bine timpul petrecut în sala de antrenament?

10 Notele obținute la testul inițial de matematică de elevii claselor a VIII-a A, a VIII-a B, a VIII-a C sunt cele din diagramele de mai jos. Pentru fiecare clasă, determină media, mediana și modul seriei notelor la test. Compară rezultatele.

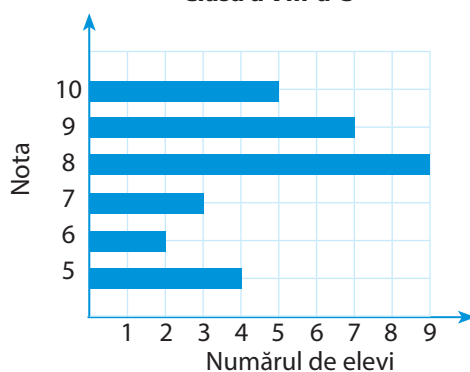
Clasa a VIII-a A



Clasa a VIII-a B



Clasa a VIII-a C



Portofoliu

În grupe de câte cinci elevi, studiați evoluția cursului de schimb leu-euro din ultimii cinci ani. Culegeți date de pe site-ul oficial <https://www.cursvalutar.ro/arhiva-curs-bnr> și răspundeți la următoarele cerințe:

- Pentru prima zi a fiecărei luni a unui an calendaristic, notați câți lei corespund la 1 euro, cu aproximație prin rotunjire la sutimi.
- Reprezentați cu ajutorul unui grafic evoluția cursului de schimb în anul respectiv.
- Calculați costul mediu de schimb din anul respectiv.
- Stabiliți care a fost prețul pentru 1 euro la care s-au realizat cele mai multe tranzacții în anul respectiv.
- Determinați amplitudinea și mediana seriei statistice obținute.

Referatele vor fi prezentate în fața colegilor.

Adăugați materialele la portofoliul personal.

**Din oficiu: 1 punct****AUTOEVALUARE****Timp de lucru: 20 de minute****1** Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F. **3 puncte**

a) Media unui set de date statistice este mereu egală cu mediana acestuia.

A F

b) Modul unui set de date statistice este valoarea căreia îi corespunde cea mai mare frecvență.

A F

c) Media, mediana și modul unui set de date statistice pot fi egale.

A F

2 Unește prin săgeți fiecare enunț din coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta. **3 puncte**

Mediile la matematică ale elevilor clase a VII-a C în anul școlar precedent au fost următoarele:

Media	5	6	7	8	9	10
Numărul de elevi	2	5	6	8	2	2

a) Media clasei a VII-a C la matematică a fost ...

1) 7;

b) Modul seriei de date este egal cu ...

2) 7,36;

c) Mediana seriei de date este egală cu ...

3) 7,50;

4) 8.

3 La antrenament, cinci jucători execută câte 10 lovituri de la 11 m. Portarul apără 2, 3, 1, 2, respectiv x lovituri. Determină numărul x, știind că portarul a apărut, în medie, două dintre loviturile de la 11 m executate de cei cinci jucători. **3 puncte****FIȘĂ DE OBSERVARE SISTEMATICĂ A ACTIVITĂȚII ȘI A COMPORTAMENTULUI ELEVULUI**

Autoevaluarea activității elevului în procesul de învățare este un instrument util atât cadrului didactic, cât și elevului, pentru a putea determina implicarea acestuia pe parcursul unui capitol.

Copiază pe o foaie de hârtie următorul tabel, completează-l, solicită observațiile profesorului și adaugă-l la portofoliul personal.

Răspunsuri	Autoevaluarea elevului Da/Nu/Parțial	Observațiile profesorului
Am participat activ la fiecare lecție.		
Am recapitulat înainte de fiecare lecție noțiunile învățate anterior.		
Am pus întrebări atunci când am avut nelămuriri.		
Am răspuns la întrebările profesorului sau ale colegilor.		
Am colaborat cu colegii la activitățile desfășurate.		
Am obținut la testul de recapitulare și evaluare nota ...		

1. PROBLEME RECAPITULATIVE

- 1** Scrie legile de corespondență pentru toate funcțiile $f: \{0, 1, 2\} \rightarrow \{3, 4\}$ cu proprietatea că $f(1)$ este număr prim.
- 2** Determină domeniul de definiție și mulțimea valorilor funcției pentru care reprezentarea geometrică a graficului este mulțimea $\{A, B, C, D, E\}$, unde $A(-3, 1)$, $B(-2, 2)$, $C(-1, 1)$, $D(0, 4)$ și $E(5, 2)$.
- 3** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ 2, & x \in [0, 1) \\ \frac{x}{x+1}, & x \geq 1 \end{cases}$.
 - a)** Dă exemplu de un număr irațional x pentru care $f(x)$ este număr natural.
 - b)** Dacă $a \geq 1$, demonstrează că $f(a) + f(a+1) + f(a+2) < 3$.
- 4** Se consideră funcțiile $f, g: \{-1, 0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + |x|$ și $g(x) = x^2 + m$, unde m este un număr real. Stabilește valoarea de adevăr a afirmației: „Dacă $f(0) = g(0)$, atunci funcțiile f și g sunt egale.”
- 5** Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 3$.
 - a)** Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $f(2x) + f(x-1) \geq 17$.
 - b)** Calculează media geometrică a numerelor $a = f(\sqrt{5})$ și $b = f(-\sqrt{5})$.
- 6** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 4$.
 - a)** Determină aria triunghiului format de graficul funcției f și axele sistemului de coordonate xOy .
 - b)** Demonstrează că $OM \geq \frac{4}{\sqrt{5}}$, oricare ar fi M un punct situat pe graficul funcției f , iar O este originea sistemului de axe xOy .
- 7** Se dă funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)^2 - x^2$.
 - a)** Determină distanța de la punctul $M(2, 0)$ la graficul funcției f .
 - b)** Calculează $\sqrt{f(0) + f(1) + \dots + f(10)}$.
- 8** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x-4}{3}$. Determină punctele $P(x_p, y_p)$ ale graficului funcției f în fiecare dintre cazurile:
 - a)** $x_p = -1$;
 - b)** $y_p = 0$;
 - c)** $x_p = y_p$.
- 9*** Determină funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(x-1) \leq x \leq f(x)-1$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
- 10** Găsește funcția care are drept grafic:
 - a)** dreapta AB , unde $A(\sqrt{2}, -3)$ și $B(\sqrt{8}, -1)$;
 - b)** segmentul $[PQ]$, unde $P(-4, -1)$ și $Q(1, \frac{3}{2})$.
- 11** Fie $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții care verifică simultan condițiile:

$$2f(x) + g(x) = -x + 7 \quad \text{și} \quad g(x) - f(x) = 2x - 2, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R}.$$
 - a)** Demonstrează că punctul $A(1, 2)$ se află pe graficele ambelor funcții.
 - b)** Determină aria triunghiului ABC , unde B și C sunt punctele de pe axa absciselor care aparțin graficelor funcțiilor f și g .
- 12** **a)** Stabilește dacă punctele $M(-4, 3)$, $N(6, -2)$ și $P(5, -\frac{3}{2})$ sunt coliniare.
b) Aceeași cerință pentru punctele $A(1, 3)$, $B(2, 12)$ și $C(0, 1)$.
- 13** Determină media, mediana și amplitudinea următorului set de date statistice: 6, 8, 10, 12, 9.
- 14** În cadrul programului educațional Săptămâna Verde, un grup de elevi împreună cu doi însoțitori au vizitat Grădina Botanică. Biletul pentru însoțitori are prețul de 20 de lei. Pentru elevi, un bilet cu preț redus costă 8 lei.
 - a)** Determină prețul plătit pentru achiziționarea biletelor a 11 copii și doi însoțitori.
 - b)** Găsește $p(n)$, prețul plătit pentru n elevi și doi însoțitori.
 - c)** Știind că $140 < p(n) < 150$ și că n reprezintă numărul elevilor participanți, determină valoarea lui n .

2. TEST DE EVALUARE

Timp de lucru: 45 de minute.

I. Completează spațiul punctat cu răspunsul corect.

20 de puncte

- (5p) 1. Mulțimea valorilor funcției $f: \{-2, -1, 0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + |x|$ este egală cu
- (5p) 2. Dacă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1-x, & x < 2 \\ 2x-5, & x \geq 2 \end{cases}$, atunci $f(3) - f(0)$ este egal cu
- (5p) 3. Punctul de abscisă -1 situat pe graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3 - x$ are ordonata egală cu
- (5p) 4. Fie funcția $f: (-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1 + x^2$. Dintre punctele $A(0, 1)$, $B(\sqrt{2}, 3)$ și $C(-1, 2)$, **nu** se află pe graficul funcției f punctul

II. Unește prin săgeți fiecare enunț aflat în coloana A cu rezultatul corespunzător din coloana B.

A

B

20 de puncte

- (5p) 1. Mediana seriei de date statistice 5, 3, 2, 4, 3 este egală cu ... **a) 7;**
- (5p) 2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2x + 3$. Valoarea lui a pentru care $P(a, 2a - 1)$ se află pe graficul funcției f este egală cu ... **b) 0;**
- (5p) 3. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x - 4$ și u, v numere reale astfel încât $f(u) + f(v) = 13$. Valoarea sumei $u + v$ este egală cu ... **c) 1;**
- (5p) 4. Punctul de coordonate egale situat pe graficul funcției $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - x$ are abscisa egală cu ... **d) 2;**
- e) 3.**

III. Alege litera corespunzătoare răspunsului corect.

20 de puncte

- (5p) 1. Amplitudinea seriei de date statistice: 5, 8, 7, 8, x , care are media egală cu 7,6, este egală cu:
A. 3; **B. 1;** **C. 5.**
- (5p) 2. Domeniul maximal de definiție al funcției $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x+1}{4-x^2}$ este:
A. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$; **B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$;** **C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.**
- (5p) 3. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ al cărei grafic conține punctele $A(1, 1)$ și $B(-1, 7)$ are legea de corespondență:
A. $f(x) = -3x + 4$; **B. $f(x) = 3x - 4$;** **C. $f(x) = 3x + 4$.**
- (5p) 4. Știind că $A(x_A, y_A)$ este punct comun graficelor funcțiilor $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1 - x$ și $g(x) = 2x - 5$, atunci suma $x_A + y_A$ este egală cu:
A. 3; **B. -1 ;** **C. 1.**

La subiectele IV și V scrie rezolvările complete.

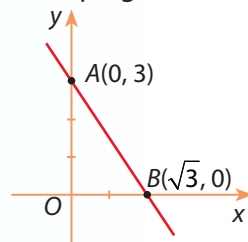
30 de puncte

IV. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x - 6$.

- (5p) a) Dacă u și v sunt numere reale distincte, demonstrează că $\frac{f(u) - f(v)}{u - v}$ este număr prim.
- (5p) b) Calculează aria suprafeței plane mărginite de graficul funcției f și axele sistemului ortogonal xOy .
- (5p) c) Găsește valoarea numărului real m , știind că simetricul punctului $P(m, 3)$ față de axa absciselor aparține graficului funcției f .

V. În figura alăturată sunt reprezentate punctele axelor de coordonate situate pe graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = mx + n$.

- (5p) a) Demonstrează că $f(x) = -x\sqrt{3} + 3$.
- (5p) b) Determină măsura unghiului ascuțit format de dreptele AB și Oy .
- (5p) c) Determină valorile numerelor raționale a și b , știind că punctul $P(a, b\sqrt{12} - a)$ aparține graficului funcției f .



Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota se obține împărțind punctajul final la 10.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4	IV.a	IV.b	IV.c	V.a	V.b	V.c
Punctajul																		
Nota																		

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE 4

ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAȚIU

- 
- L1. Puncte, drepte, plane: convenții de notare, reprezentări, determinarea dreptei, determinarea planului, relații între puncte, drepte și plane
 - L2. Corpuri geometrice: piramida, piramida regulată, tetraedrul regulat; reprezentare, elemente caracteristice, desfășurări
 - L3. Corpuri geometrice: prisma dreaptă, paralelipipedul dreptunghic, cubul; reprezentare, elemente caracteristice, desfășurări
 - L4. Corpuri geometrice: cilindrul circular drept, conul circular drept; reprezentare, elemente caracteristice, desfășurări
 - L5. Paralelism: drepte paralele, unghiul a două drepte
 - L6. Dreaptă paralelă cu un plan
 - L7. Plane paralele
 - L8. Aplicații: secțiuni paralele cu baza în corpurile geometrice studiate; trunchiul de piramidă și trunchiul de con circular drept (descriere și reprezentare)
 - L9. Perpendicularitate: drepte perpendiculare, dreaptă perpendiculară pe un plan
 - L10. Aplicații: înălțimea unei piramide, înălțimea unui con circular drept
 - L11. Distanța dintre două plane paralele, înălțimea prisme drepte, a paralelipipedului dreptunghic, a cilindrului circular drept, a trunchiului de piramidă și a trunchiului de con circular drept
 - L12. Plane perpendiculare, aplicații: secțiuni diagonale, secțiuni axiale în corpurile studiate
 - L13. Proiecții de puncte, de segmente și de drepte pe un plan; unghiul dintre o dreaptă și un plan, aplicație: lungimea proiecției unui segment pe un plan
 - L14. Unghi diedru, unghi plan corespunzător diedrului; unghiul a două plane; plane perpendiculare
 - L15. Teorema celor trei perpendiculare; calculul distanței de la un punct la o dreaptă; calculul distanței de la un punct la un plan; calculul distanței dintre două plane paralele

Recapitulare și evaluare

1. Probleme recapitulative
2. Test de evaluare

Introducere

Primele cunoștințe teoretice de geometrie în spațiu au apărut în Grecia antică (~ 600 î.H.). Totuși, cunoștințele practice despre forme tridimensionale (cuburi, piramide) și calculele aproximative ale ariilor și volumelor au fost folosite mult mai devreme de civilizații precum cele din Egiptul antic (~ 3000 î.H.), Mesopotamia (~ 2000 î.H.), civilizațiile precolumbiene (~ 2000 î.H.), China și India antică (~ 1600-500 î.H.). Aceste cunoștințe erau utilizate în arhitectură, construcții și ritualuri religioase, marcând o etapă importantă în înțelegerea spațiului cu trei dimensiuni, mult înainte de dezvoltarea geometriei teoretice.

Începuturile cunoștințelor teoretice de geometrie în spațiu pot fi considerate studiile empirice (bazate pe observații) ale lui **Thales din Milet** (cel care a calculat înălțimea mării piramide din Giza, folosind lungimea umbrei ei și proporții), extinse mai târziu de **Pitagora** și apoi de **Platon**, care au studiat forme geometrice tridimensionale, cum ar fi solidele platonice (corpuri regulate cu fețe poligoane identice, cărora Platon le-a asociat elemente fundamentale ale naturii: tetraedru – foc, cub – pământ, octaedru – aer, icosaedru – apă, dodecaedru – eter). Aceste idei au fost sistematizate de **Euclid** în celebra sa carte *Elementele*, unde geometria în spațiu este studiată riguros, cu definiții și teoreme clare.

Arhimede duce mai departe această tradiție, calculând ariile și volumele unor corpuri geometrice, punând astfel bazele matematicii tridimensionale. Mai târziu, **Descartes** (sec. al XVII-lea) a conectat algebra și geometria introducând sistemul de coordonate tridimensional, care permite ca un punct din spațiu să fie descris prin trei coordonate (x, y, z) . În secolul al XX-lea, **Riemann** a extins geometria spațială pentru a descrie nu doar trei, ci și patru sau chiar mai multe dimensiuni.

Să pornim acum împreună pe urmele marilor matematicieni, pentru a descoperi lumea uimitoare a geometriei în spațiu. Vom învăța să privim dincolo de suprafețe plane și să explorăm puncte, linii, plane și corpuri, așa cum au făcut Pitagora, Euclid, Arhimede. Așa cum ei au observat piramidele, cuburile și sferile din lumea înconjurătoare, și noi vom învăța să descoperim aceste forme în natură, în construcții, în lucrurile de zi cu zi.

Fiecare dintre voi va deveni un adevărat explorator și va vedea lumea într-un mod nou.

LECȚIA 1

Puncte, drepte, plane: convenții de notare, reprezentări, determinarea drepte, determinarea planului, relații între puncte, drepte și plane



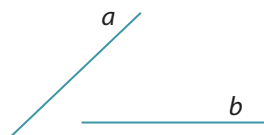
Observăm și descoperim cunoștințe noi

Noțiunile fundamentale ale geometriei în spațiu sunt: **punctul**, **dreapta**, **planul**.

Punctul nu are nicio dimensiune, este doar un loc bine definit și ni-l putem imagina ca semnul obținut când înțepăm o foaie de hârtie cu un ac sau cu vârful unui creion. Punctele se notează cu litere mari din alfabetul latin.



Dreapta este comparabilă cu un fir de ață bine întins, prelungit infinit în ambele direcții și fără grosime (are o singură dimensiune). Notăm dreptele cu litere mici din alfabetul latin.



Planul poate fi imaginat ca o foaie de hârtie care se întinde infinit în toate direcțiile (are două dimensiuni). Un plan va fi desenat pe caiet sub forma unui paralelogram (așa cum se vede o foaie de hârtie care nu este în direcția razei vizuale). Planele se notează cu litere mici din alfabetul grecesc.



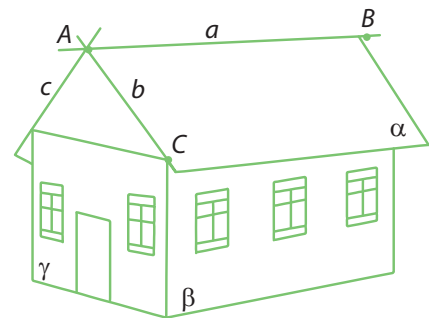
Exemple din viața cotidiană

Privind figura alăturată, putem învăța să observăm, la o casă, elementele de geometrie în spațiu prezentate mai sus.

Puncte: A, B, C

Drepte: a, b, c

Plane: α, β, γ

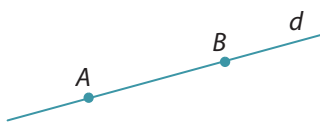


Observăm și descoperim cunoștințe noi

Următoarele șase **propoziții** (axiome), pe care le considerăm adevărate fără demonstrație, ne vor ajuta să înțelegem mai bine relațiile dintre puncte, drepte și plane în spațiu.

P1. Prin două puncte diferite trece o dreaptă și numai una. Altfel spus, două puncte diferite determină o dreaptă.

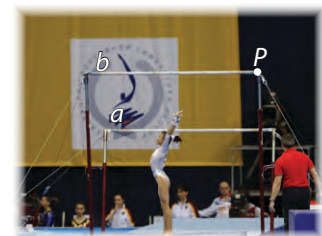
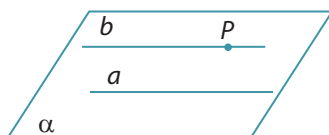
Dacă A și B sunt două puncte diferite, atunci dreapta determinată de ele se notează cu AB sau BA (ordinea nu contează).



$$A, B \in d; A \neq B \Rightarrow d = AB = BA$$

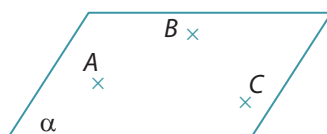


P2. (Axioma lui Euclid). Printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o singură paralelă la dreapta considerată; cele două drepte paralele sunt în același plan (sunt coplanare).



P3. Prin trei puncte necoliniare trece un plan și numai unul. Altfel spus, trei puncte necoliniare determină un plan.

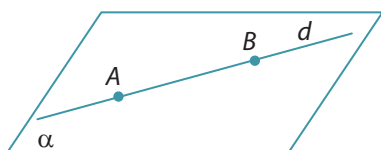
Dacă A, B, C sunt trei puncte necoliniare, atunci planul determinat de acestea se notează cu (ABC) sau (ACB) sau (BAC) etc.



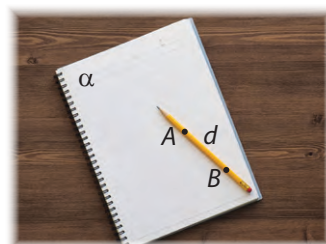
$$A, B, C \in \alpha; A, B, C - \text{necoliniare} \Rightarrow \alpha = (ABC)$$



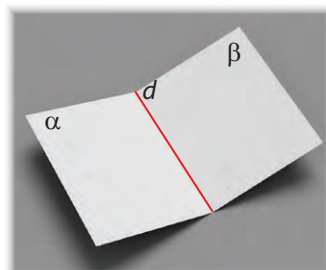
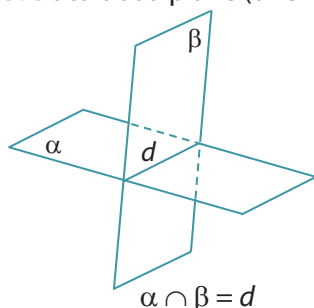
P4. Dacă o dreaptă are două puncte (diferite) comune cu un plan, atunci dreapta este inclusă în acel plan.



$$A \neq B; A, B \in d; A, B \in \alpha \Rightarrow d \subset \alpha$$



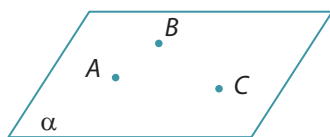
P5. Dacă două plane (diferite) au un punct comun, atunci intersecția lor este o dreaptă.



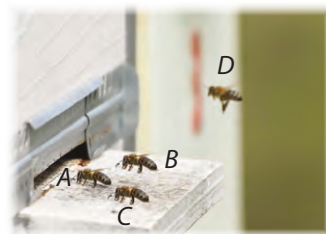
Observăm în figura de mai sus două linii punctate; acestea corespund porțiunilor care nu se văd dacă cele două plane ar fi reprezentate de foi opace (netransparente).

P6. În spațiu există patru puncte nesituate în același plan (necoplanare).

• D



$$A, B, C \in \alpha; A, B, C - \text{necoliniare}; D \notin \alpha$$

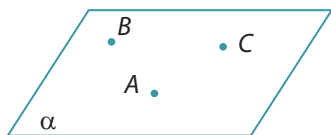


Observăm în figura de mai sus că punctele A, B, C, care sunt în planul α , le desenăm în interiorul paralelogramului care reprezintă planul α , iar punctul D, care nu aparține planului, îl desenăm în exteriorul paralelogramului.

Determinarea planului

Vom prezenta acum patru modalități de determinare a unui plan, care sunt, de fapt, variante practice de fixare a unei mese sau a unui raft, polițe etc.

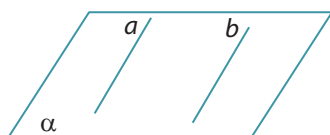
I. Trei puncte necoliniare determină un plan.



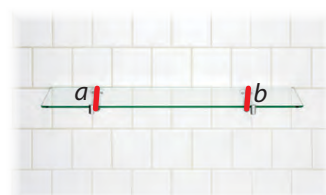
$A, B, C - \text{necoliniare} \Rightarrow$ există și este unic planul α , astfel încât $A, B, C \in \alpha$; notăm $\alpha = (ABC) = (BAC) = \dots$



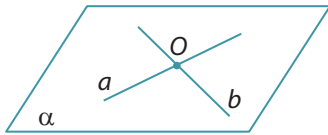
II. Două drepte paralele determină un plan.



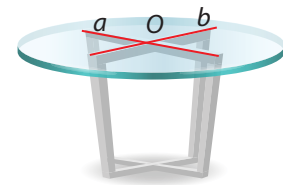
$a \parallel b \Rightarrow$ există și este unic planul α , astfel încât $a \subset \alpha$ și $b \subset \alpha$; notăm $\alpha = (a, b) = (b, a)$.



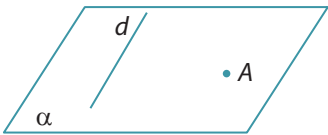
III. Două drepte concurente determină un plan.



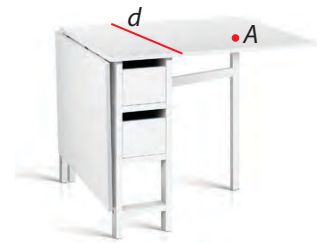
$a \cap b = \{O\} \Rightarrow$ există și este unic planul α , astfel încât $a \subset \alpha$ și $b \subset \alpha$; notăm $\alpha = (a, b) = (b, a)$.



IV. O dreaptă și un punct exterior ei determină un plan.

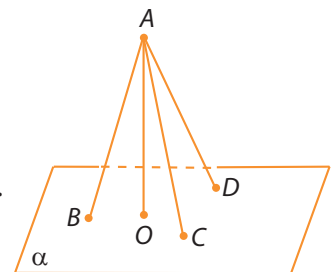


$A \notin d \Rightarrow$ există și este unic planul α , astfel încât $A \in \alpha$, $d \subset \alpha$; notăm $\alpha = (d, A) = (A, d)$.



Aplicăm cunoștințele

În figura alăturată este reprezentat schematic stâlpul AO , ancorat prin cablurile AB , AC și AD , care sunt fixate în punctele B , C și D de planul solului, α ($A \notin \alpha$). Presupunem că punctul O este interior triunghiului BCD , iar cablurile sunt bine întinse (porțiuni de drepte).



- Stabilește care dintre dreptele BC , DO , AB este inclusă în planul α .
- Găsește toate planele care conțin cel puțin trei dintre punctele A , B , C , D , O .
- Determină dreapta de intersecție a planelor (ABC) și (COD) .
- Calculează lungimea totală a celor trei cabluri, știind că $AO = 4$ m, $BO = CO = DO = 3$ m și $\angle AOB = \angle AOC = \angle AOD = 90^\circ$.

Rezolvare:

- Dreapta BC este inclusă în planul α , deoarece are două puncte (diferite), B și C , comune cu planul α . Analog, dreapta DO este și ea inclusă în planul α . Deoarece $A \notin \alpha$, dreapta AB nu este inclusă în planul α .
- Planele cu proprietatea cerută sunt: (ABC) , (ACD) , (ADB) , (ABO) , (ACO) , (ADO) și $\alpha = (BCD) = (BOC) = \dots$; sunt, în total, 7 plane.
- Aici este bine să observăm că $(COD) = (BCD)$ și acum este clar că planele (diferite) (ABC) și (BCD) au în comun punctele B și C , deci intersecția lor este dreapta BC . Putem scrie astfel: $(ABC) \cap (COD) = (ABC) \cap (BCD) = BC$.
- Aplicând teorema lui Pitagora în fiecare dintre triunghiurile dreptunghice AOB , AOC și AOD , obținem: $AB = AC = AD = \sqrt{3^2 + 4^2} \text{ m} = 5 \text{ m}$. Așadar, lungimea totală a celor trei cabluri este 15 m.



Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

- Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare (figura 1), astfel încât $\angle ABC = \angle ABD = \angle ACD = 90^\circ$, $AB = 4$ cm, $BC = 3$ cm și $CD = 12$ cm.
 - Calculează lungimile segmentelor AC , AD și BD .
 - Demonstrează că $\angle BCD = 90^\circ$.
- Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare și un punct M situat pe segmentul CD . Determină:
 - $(ABM) \cap (BCD)$;
 - $(BMC) \cap (ABD)$.
- În figura 2 sunt desenate: planul α și punctele $A \in \alpha$, $B \in \alpha$ și $C \notin \alpha$.
 - Arată că dreapta AB este inclusă în planul α , iar dreapta AC nu este inclusă în planul α .
 - Demonstrează că punctele A, B, C sunt necoliniare.

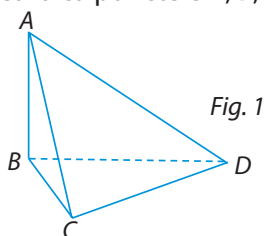


Fig. 1

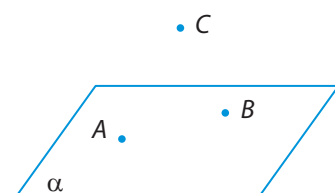


Fig. 2

4 În figura 3 sunt reprezentate dreptele paralele a și b și punctele $A \in a, B \in b$. Demonstrează că dreapta AB este inclusă în planul (a, b) .

5 În figura 4 sunt reprezentate dreptele a și b , concurente în punctul O , punctele $A \in a, B \in b, A \neq O, B \neq O$ și punctul P situat în afara planului (a, b) .

- Arată că $AB \subset (a, b)$.
- Determină intersecția planelor (P, a) și (P, b) .
- Determină intersecția planelor (PAB) și (a, b) .

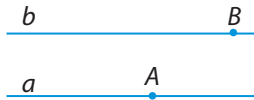


Fig. 3

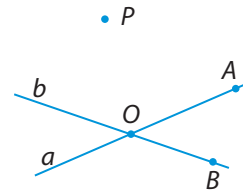


Fig. 4

6 În figura 5 se pot observa 4 vrăbii, A, B, C, D , pe care le vom lua drept 4 puncte. Trei dintre ele, A, B și C , se odihnesc pe un gard (dreapta d), iar vrabia D zboară. Stabilește valoarea de adevăr a afirmației: „Cele patru vrăbii nu se află în același plan.”

7 În figura 6 sunt reprezentate: paralelogramul $ABCD$, cu centrul în O , și punctul E situat în afara planului (ABC) . Punctul F este simetricul lui E față de punctul O .

- Arată că $F \in (ACE)$.
- Demonstrează că $AF \parallel CE$.
- Determină $(ABC) \cap (CEF)$.

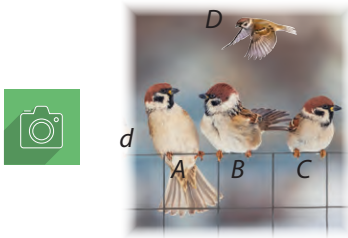


Fig. 5

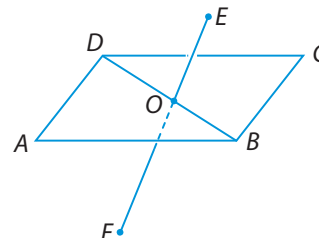


Fig. 6



Din oficiu: 1 punct

AUTOEVALUARE

Temp de lucru: 40 de minute

La problemele 1, 2, 3 și 4, alege litera corespunzătoare răspunsului corect.

1 Dacă A, B, C, D sunt patru puncte necoplanare, atunci numărul planelor care conțin cel puțin trei dintre punctele considerate este egal cu: **2 puncte**

- 2;
- 3;
- 4;
- 5.

2 Tu stai în bancă și notezi pe caietul tău un punct cu litera A , iar profesorul tău spune: „Pot marca trei puncte cu creta pe tablă, B, C, D , astfel încât punctele noastre, A, B, C, D , să fie coplanare.” Afirmația profesorului este: **2 puncte**

- adevărată;
- falsă.

Justifică răspunsul tău.

3 Fie a și b două drepte paralele și punctele distincte: $M \in a, N \in a, P \in a, Q \in b, R \in b$. Punctele M, N, P, Q, R sunt: **2 puncte**

- coliniare;
- coplanare;
- necoplanare;
- conciclice.

4 Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare. Dreapta de intersecție a planelor (ABC) și (BCD) este: **2 puncte**

- AB ;
- BC ;
- CD ;
- DA .

5 Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare și M, N, P mijloacele laturilor CD, DB , respectiv BC ale triunghiului BCD . Demonstrează că planele (ABM) , (ACN) și (ADP) au o dreaptă comună. **1 punct**

LECȚIA 2

Corpuri geometrice: piramida, piramida regulată, tetraedru regulat; reprezentare, elemente caracteristice, desfășurări

Observăm și descoperim cunoștințe noi

În clasele a VI-a și a VII-a am învățat despre figuri plane (triunghi, dreptunghi, cerc etc.). Figurile geometrice plane au două dimensiuni, de exemplu lungimea și lățimea.

Un **corp geometric** este o figură tridimensională, ocupă un spațiu și are volum. De exemplu, piramida, cubul, conul sau sfera sunt corpuri geometrice. Ele se deosebesc de figurile plane prin faptul că au trei dimensiuni, cum ar fi lungimea, lățimea și înălțimea, iar, datorită acestui lucru, pot fi „umplute” sau au un spațiu interior.

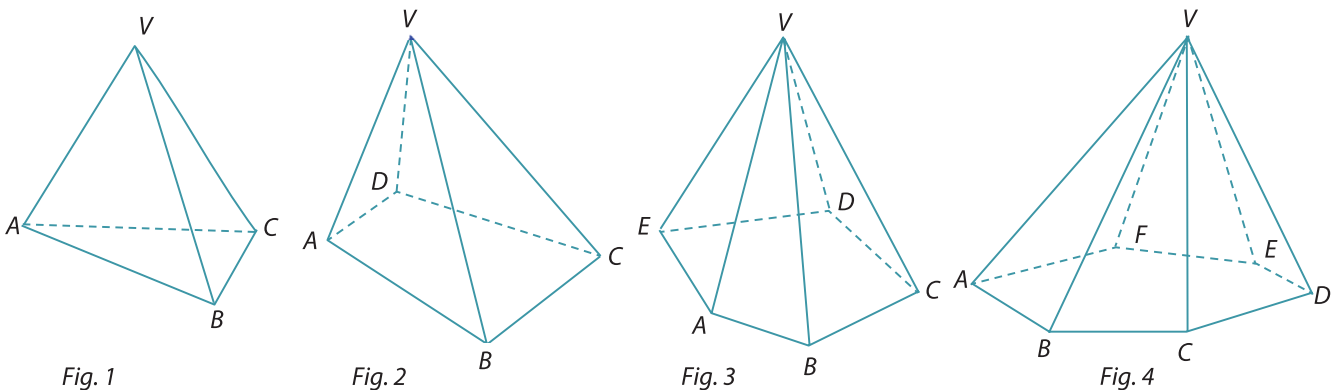
Un tip special de corpuri geometrice este reprezentat de **poliedre**, care au toate fețele poligoane (triunghiuri, patrulatere, pentagoane etc.).

O **piramidă** este un poliedru care are baza un poligon (triunghi, patrulater, pentagon, hexagon etc.) și fețele laterale triunghiuri cu un vârf comun numit vârful piramidei sau apex.

Celebre sunt piramidele egiptene sau piramida din sticlă din fața muzeului Luvru din Paris. Mai aproape de noi, putem vedea cutii de lapte sau bomboane în formă de piramidă.



Desenează și tu, pe caiet, câteva piramide după modelele din figurile 1-4. Fii atent la liniile punctate, care reprezintă muchii care nu se văd din perspectiva desenatorului.



În funcție de numărul de laturi ale poligonului bază a piramidei, aceasta se numește: **piramidă triunghiulară** (figura 1), **piramidă patrulateră** (figura 2), **piramidă pentagonală** (figura 3), **piramidă hexagonală** (figura 4) etc.

OBSERVAȚIE: O piramidă triunghiulară se mai numește și **tetraedru**. Deci, în figura 1 este desenat tetraedrul VABC.



Știi că...

Numele „piramidă” provine din grecescul *pyramis*, care se referea inițial la o formă de prăjitură sau turtă conică, ce semăna oarecum cu silueta unei piramide. Ulterior, grecii au adoptat acest termen pentru a descrie piramidele egiptene.

„Tetraedru” provine din grecescul *tetra*, care înseamnă „patru”, și *hedra*, care înseamnă „față” sau „bază”.



Să vedem, în continuare, care sunt **elementele caracteristice ale unei piramide**.

Evidențiem aceste elemente la o piramidă patrulateră $VABCD$ cu baza patrulaterul $ABCD$ și vârful (apexul) V ; pentru orice altă piramidă elementele caracteristice se definesc în mod analog.

Vârfurile piramidei sunt punctele V, A, B, C, D .

Muchiile (laturile) piramidei sunt segmentele $VA, VB, VC, VD, AB, BC, CD, DA$.

Muchiile laterale sunt VA, VB, VC și VD , iar **muchiile bazei** sunt AB, BC, CD și DA .

Fețele piramidei sunt VAB, VBC, VCD, VDA și $ABCD$ (fiecare față este poligonul respectiv împreună cu punctele sale interioare; totuși, pentru simplitatea formulării, o față o vom numi după numărul de laturi: triunghi, patrulater etc.);

fețele laterale ale piramidei sunt VAB, VBC, VCD și VDA .

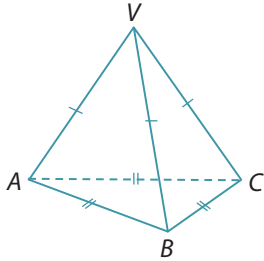
Prin urmare, orice piramidă patrulateră are 5 vârfuri, 8 muchii și 5 fețe.

Piramidele cel mai des întâlnite sunt piramidele regulate.

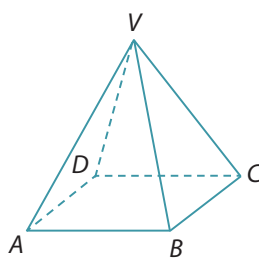
DEFINIȚIE: O piramidă cu baza poligon regulat și muchiile laterale egale se numește **piramidă regulată**.

OBSERVAȚIE: Fețele laterale ale unei piramide regulate sunt triunghiuri isoscele congruente.

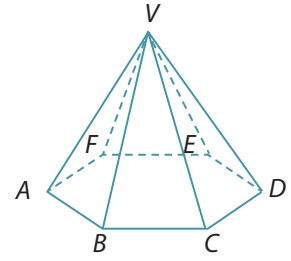
Să desenăm câteva piramide regulate și să evidențiem proprietățile lor.



$VABC$ este **piramidă triunghiulară regulată** cu vârful (apexul) V dacă ABC este triunghi echilateral și $VA = VB = VC$.



$VABCD$ este **piramidă patrulateră regulată** cu vârful (apexul) V dacă $ABCD$ este pătrat și $VA = VB = VC = VD$.



$VABCDEF$ este **piramidă hexagonală regulată** cu vârful (apexul) V dacă $ABCDEF$ este hexagon regulat și $VA = VB = VC = VD = VE = VF$.

OBSERVAȚIE: Piramidele egiptene sunt piramide patrulatere regulate.

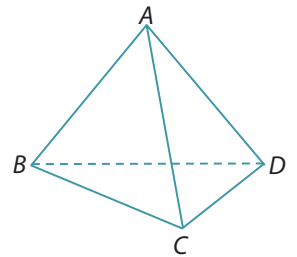
DEFINIȚIE: O piramidă triunghiulară cu toate muchiile egale se numește **tetraedru regulat**.

$ABCD$ este tetraedru regulat dacă $AB = AC = AD = BC = CD = DB$.

OBSERVAȚII:

1. Un tetraedru regulat are toate fețele triunghiuri echilaterale congruente.

2. Orice tetraedru regulat este și piramidă triunghiulară regulată, dar o piramidă triunghiulară regulată nu este neapărat tetraedru regulat.

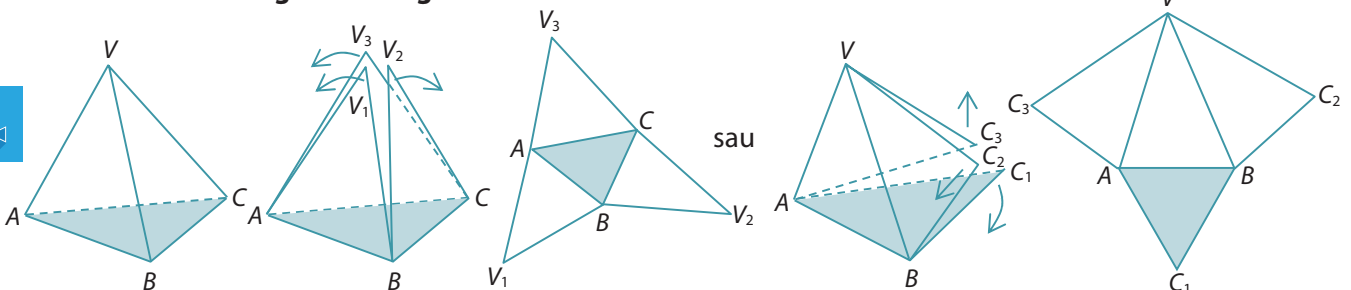


Desfășurarea unei piramide

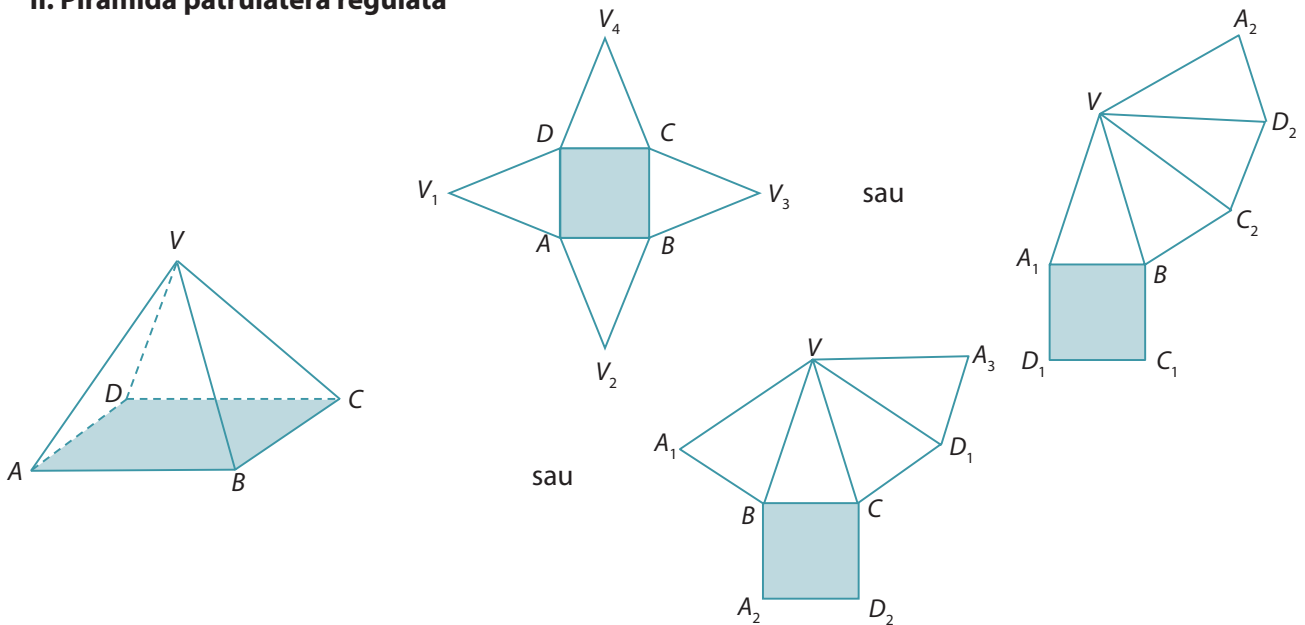
Considerăm o piramidă confecționată din hârtie (piramidă-suprafață, nu piramidă-corp). Dacă tăiem această piramidă de-a lungul muchiilor laterale și „rabatăm”, fără a le deforma, triunghiurile (fețele laterale) obținute pe planul bazei, atunci poligonul astfel format reprezintă una dintre desfășurările posibile ale piramidei considerate (sau, altfel spus, ale suprafeței piramidei).

Prezentăm mai jos câteva desfășurări posibile ale unor piramide învățate.

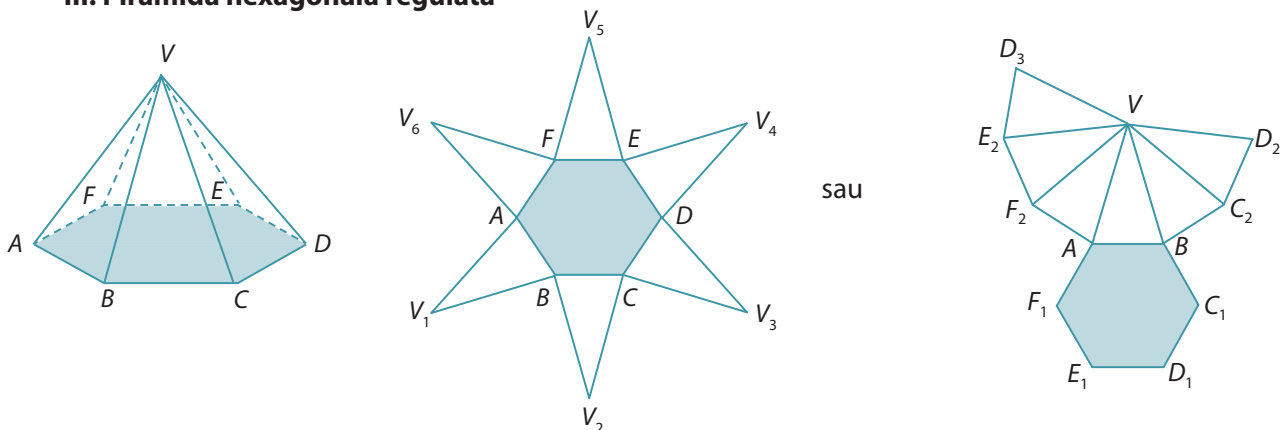
I. Piramida triunghiulară regulată



II. Piramida patrulateră regulată



III. Piramida hexagonală regulată



Aplicăm cunoștințele

1 În figura alăturată este desenat tetraedrul regulat $ABCD$ cu latura $AB = 6$ cm. Punctele M și N sunt mijloacele laturilor AD , respectiv BC .

- Calculează aria feței BCD .
- Determină lungimea segmentului MN .
- Determină dreapta comună a planelor (BMC) și (AND) .

Rezolvare:

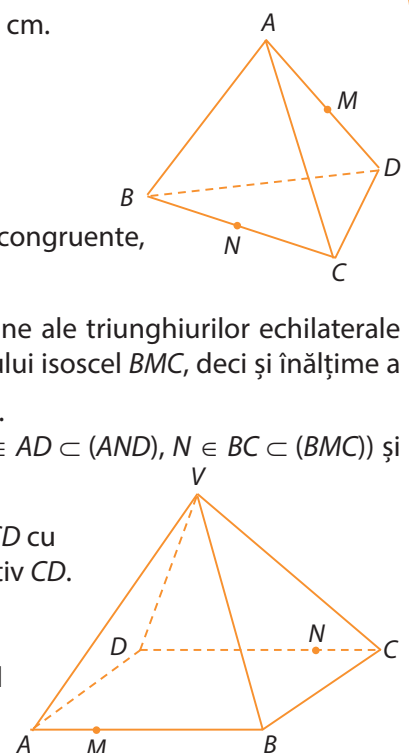
a) Deoarece toate fețele unui tetraedru regulat sunt triunghiuri echilaterale congruente, rezultă că $\mathcal{A}_{\triangle BCD} = \frac{BC^2 \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

b) Avem $BM = MC = 6\sqrt{3} : 2 \text{ cm} = 3\sqrt{3} \text{ cm}$, pentru că BM și MC sunt mediane ale triunghiurilor echilaterale ABD , respectiv ACD . Cum MN este mediana corespunzătoare bazei triunghiului isoscel BMC , deci și înălțime a triunghiului, avem: $MN^2 = MC^2 - NC^2 = (3\sqrt{3})^2 - 3^2 = 18$, deci $MN = 3\sqrt{2} \text{ cm}$.

c) Întrucât M și N sunt puncte comune ale planelor (BMC) și (AND) (căci $M \in AD \subset (AND)$, $N \in BC \subset (BMC)$) și $M \neq N$, rezultă că dreapta comună a celor două plane este MN .

2 În figura alăturată este reprezentată piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu vârful V , $VA = 5$ cm și $AB = 6$ cm. Punctele M și N se află pe laturile AB , respectiv CD .

- Calculează suma lungimilor tuturor muchiilor piramidei $VABCD$.
- Calculează lungimea înălțimii din V a triunghiului VBD .
- Demonstrează că perimetrul triunghiului VMN este mai mare sau egal cu 14 cm.

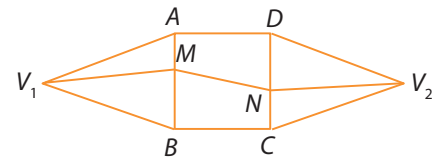


Rezolvare:

a) În orice piramidă regulată, muchiile laterale sunt egale între ele și muchiile bazei sunt, de asemenea, egale între ele. Așadar, suma lungimilor muchiilor piramidei $VABCD$ este egală cu $4 \cdot VA + 4 \cdot AB = 44$ cm.

b) Fie O piciorul înălțimii din V a triunghiului VBD . Cum $VB = VD = 5$ cm și $BD = AB\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ cm, rezultă că $BO = OD = 3\sqrt{2}$ cm, deci $VO^2 = VB^2 - BO^2 = 25 - 18 = 7$, de unde obținem $VO = \sqrt{7}$ cm.

c) Desfășurăm suprafața laterală a piramidei pe planul bazei. În figura alăturată este desenată o parte a desfășurării. Avem $\mathcal{P}_{\Delta VMN} = VM + MN + NV$ (lungimi de segmente în piramidă, măsurate în cm) $= V_1M + MN + NV_2$ (lungimi de segmente în desfășurare, măsurate în cm) $\geq V_1V_2$ (desfășurare). Dacă notăm cu M_1 și N_1 mijloacele segmentelor AB , respectiv CD , avem $V_1M_1 = \sqrt{V_1A^2 - AM_1^2} = 4$ cm, $M_1N_1 = BC = 6$ cm și $N_1V_2 = \sqrt{V_2C^2 - CN_1^2} = 4$ cm, deci $V_1V_2 = V_1M_1 + M_1N_1 + N_1V_2 = 14$ cm.



Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1 Considerăm o piramidă și notăm cu v numărul vârfurilor sale, cu f numărul fețelor sale și cu m numărul muchiilor piramidei. Completează următorul tabel. Poți să determini numărul $v + f - m$ pentru o piramidă oarecare?

Piramida	v	f	m	$v + f - m$
triunghiulară				
patrulateră				
pentagonală				
hexagonală				

2 O piramidă triunghiulară regulată $VABC$, cu vârful V , are muchia laterală $VA = 10$ cm și muchia bazei $AB = 5$ cm. Calculează suma lungimilor tuturor muchiilor piramidei.

3 Fie $ABCD$ un tetraedru regulat. Calculează suma măsurilor unghiurilor: DAB , DBC și DCA .

4 Tetraedrul regulat $ABCD$ are o muchie egală cu $2\sqrt{3}$ cm. Calculează suma lungimilor muchiilor tetraedrului $ABCD$ și suma ariilor fețelor sale.

5 Dacă o piramidă regulată are, în total, 8 muchii, ce fel de poligon este baza piramidei?

6 Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu vârful V și $VA = AB = 4$ cm (figura 5).

a) Demonstrează că muchiile VB și VD sunt perpendiculare.

b) Determină $(ABD) \cap (VBC)$.

7 Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu baza $ABCD$ (figura 5). Calculează aria unei fețe laterale, știind că triunghiul VAC este dreptunghic și $AB = 2$ cm.

8 Se consideră o piramidă patrulateră regulată cu vârful V . Demonstrează că, dacă O este mijlocul segmentului AC , iar M este mijlocul segmentului VB , atunci punctele V , D , O și M sunt coplanare.

9 În figura 6 este desenată piramida hexagonală regulată $VABCDEF$ cu vârful V , $VA = 10$ cm și $AB = 12$ cm.

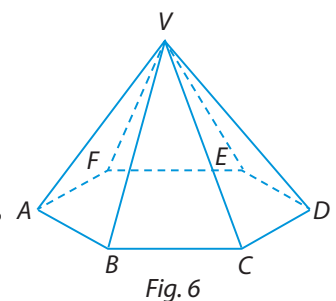
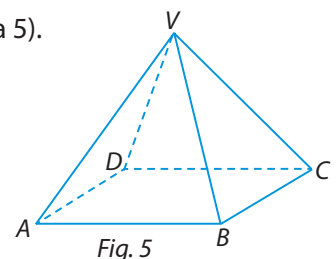
a) Calculează aria bazei piramidei.

b) Calculează aria unei fețe laterale a piramidei.

10 Considerăm tetraedrul $ABCD$ cu $AB = AC = AD = 1$ cm, $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle CAD = 90^\circ$ și $\angle BAD = 120^\circ$.

a) Arată că triunghiul BCD este dreptunghic.

b) Calculează suma ariilor fețelor tetraedrului.

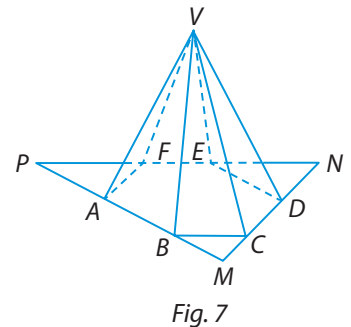


11 Fie tetraedrul $ABCD$, având fețele ABC și ABD triunghiuri dreptunghice isoscele cu $\angle BAC = \angle BAD = 90^\circ$, $AB = 10$ cm și $CD = 16$ cm. Demonstrează că muchia AB este perpendiculară pe mediana AM a triunghiului ACD .

12 Se consideră piramida hexagonală regulată $VABCDEF$ cu vârful V , $AB = 6$ cm, $VA = 10$ cm și . Dreptele AB , CD și EF se intersectează două câte două în punctele M , N , P (figura 7). Arată că $VMNP$ este piramidă triunghiulară regulată și calculează suma lungimilor muchiilor sale.

13 Fie piramida triunghiulară regulată $VABC$ cu vârful V , $VA = 8$ cm și $\angle AVB = 30^\circ$. Determină lungimea celui mai scurt drum $B-M-C$, unde M este punct pe muchia VA .

14 Se consideră o piramidă patrulateră regulată $VABCD$ cu vârful V , $VA = 10$ cm și $AB = 12$ cm. Determină valoarea minimă a sumei $AP + PC$, unde P este punct pe muchia VB .



Reține!

- ♦ O piramidă regulată are baza un poligon regulat și muchiile laterale egale. Fețele laterale ale unei piramide regulate sunt triunghiuri isoscele congruente.
- ♦ Tetraedrul regulat are toate muchiile egale. Cele patru fețe ale tetraedrului regulat sunt triunghiuri echilaterale congruente.

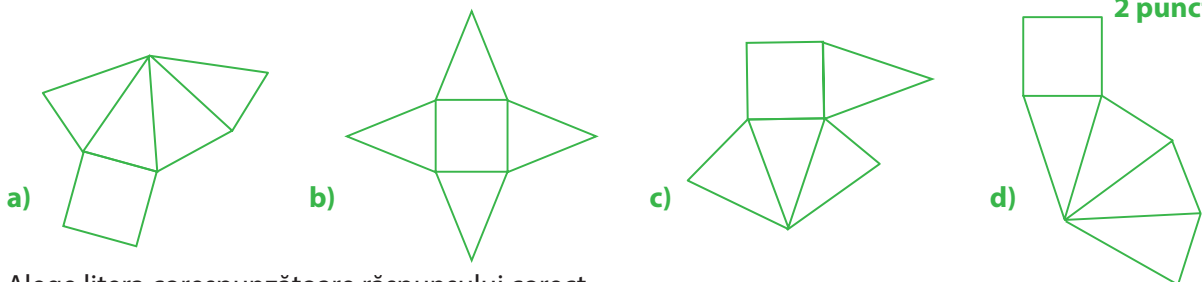
Din oficiu: 1 punct

AUTOEVALUARE

Timp de lucru: 40 de minute

- 1** Alege litera corespunzătoare răspunsului corect.
O piramidă triunghiulară regulată $VABC$ are vârful V , $\angle AVB = 90^\circ$ și $AV = 4$ cm. Perimetrul bazei piramidei este egal cu: **2 puncte**
- a) 12 cm; b) $12\sqrt{2}$ cm; c) $12\sqrt{3}$ cm; d) 24 cm.

- 2** Care dintre următoarele desene **nu** reprezintă desfășurarea unei piramide patrulater regulate? **2 puncte**



- 3** Alege litera corespunzătoare răspunsului corect.
Piramida patrulateră regulată $VABCD$, cu baza $ABCD$, are $VA = AB$ și aria feței laterale VAB egală cu $9\sqrt{3}$ cm². Aria bazei piramidei este egală cu: **2 puncte**
- a) $9\sqrt{3}$ cm²; b) 24 cm²; c) 36 cm²; d) $36\sqrt{3}$ cm².

- 4** Vrem să construim din carton un tetraedru regulat cu latura de 8 dm. Este posibil să facem acest lucru având la dispoziție o coală de carton în formă de pătrat cu latura de 10 dm? **2 puncte**

- 5** Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu vârful V , $\angle AVB = 30^\circ$ și $VA = 4$ cm. Determină minimul sumei $AM + MN + NB$, unde $M \in VD$ și $N \in VC$. **1 punct**



LECȚIA 3

Corpuri geometrice: prisma dreaptă, paralelipipedul dreptunghic, cubul; reprezentare, elemente caracteristice, desfășurări

Civilizații străvechi, cum ar fi cele din Egiptul antic sau Mesopotamia, au folosit cuburi și paralelipede în arhitectură și construcții, observând că aceste corpuri geometrice au o mare stabilitate, durabilitate și se îmbină ușor. În Grecia antică, cubul reprezenta un simbol al perfecțiunii.

În zilele noastre, cubul, paralelipipedul, prisma sunt folosite în arhitectură, construcții, optică, în jocuri, dau forma unor ambalaje etc.

 Observăm și descoperim cunoștințe noi

O **prismă dreaptă** este un poliedru care are două baze poligoane congruente și fețele laterale dreptunghiuri. O prismă dreaptă ale cărei baze sunt poligoane regulate se numește **prismă regulată**.



Iată câteva desene care prezintăisme drepte (desenează și tu, pe caiet):

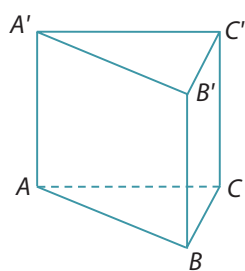


Fig. 1

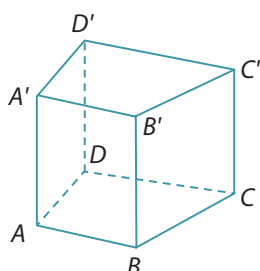


Fig. 2

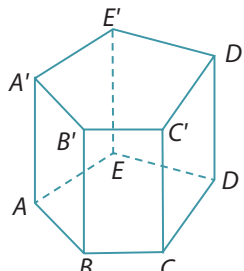


Fig. 3

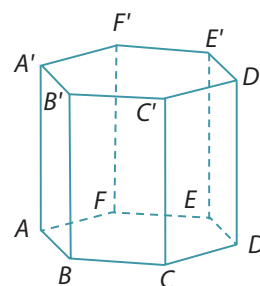


Fig. 4

În funcție de numărul de laturi ale unei baze, **prismele drepte** se numesc: **triunghiulare** (figura 1), **patrulaterale** (figura 2), **pentagonale** (figura 3), **hexagonale** (figura 4) etc.

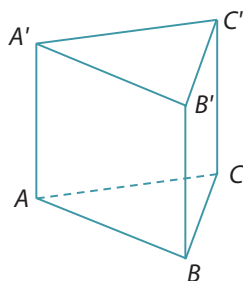


Știi că...

Termenul prismă provine din cuvântul grecesc *prisma* care înseamnă „ceva tăiat” sau „obiect decupat”.



Să descriem **elementele caracteristice** ale unei prismе drepte, exemplificând pentru prismă triunghiulară dreaptă $ABCA'B'C'$ desenată mai jos.



Vârfurile prismei drepte sunt punctele A, B, C, A', B', C' .

Prisma dreaptă are două tipuri de **muchi**:

- **muchiile laterale**: AA', BB' și CC' sunt paralele și egale între ele;
- **muchiile bazelor**: $AB, BC, CA, A'B', B'C'$ și $C'A'$ ($AB = A'B', BC = B'C', CA = C'A'$).

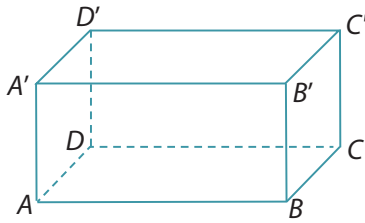
Prisma dreaptă are două tipuri de **fețe**:

- **fețele laterale** sunt dreptunghiurile (împreună cu punctele lor interioare): $ABB'A', BCC'B'$ și $CAA'C'$;
- **bazele** sunt triunghiurile (împreună cu punctele lor interioare): ABC și $A'B'C'$ ($\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$).

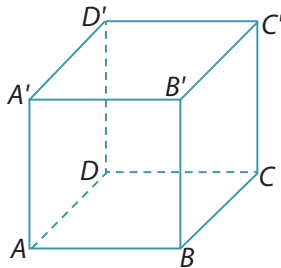
Diagonala unei prismе este segmentul determinat de două vârfuri care nu aparțin aceleiași fețe. Într-o prismă patrulateră, segmentele $AC', BD', A'C, B'D$ sunt diagonale. Prismă triunghiulară nu are diagonale.

Dintre prismele drepte, cel mai des întâlnite în viața cotidiană sunt paralelipipedul dreptunghic și cubul.

Paralelipipedul dreptunghic este o prismă cu toate fețele dreptunghiuri. Altfel spus, este o prismă patrulateră dreaptă cu bazele dreptunghiuri.



Cubul este o prismă cu toate fețele pătrate.



Știi că...

Cuvântul „paralelipiped” provine din termenii grecești *parallelos* – „paralel” și *epipedos* – „plan”, descriind astfel că fețele opuse sunt în plane paralele.

Termenul „cub” provine din cuvântul latin *cubus*, care își are originea în grecescul *kybos*, folosit pentru a desemna zarurile.

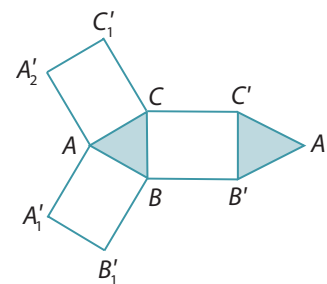
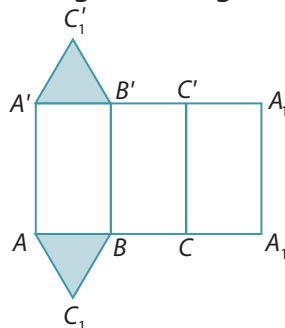
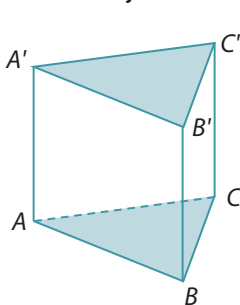


Activitate practică (proiect)

Fotografiază obiecte din lumea înconjurătoare care seamănă cu prismele, paralelipipede dreptunghice, cuburi. Creează cu acestea un colaj cu „geometria realității”. Pregătește proiectul tău pentru a-l prezenta lecția următoare.

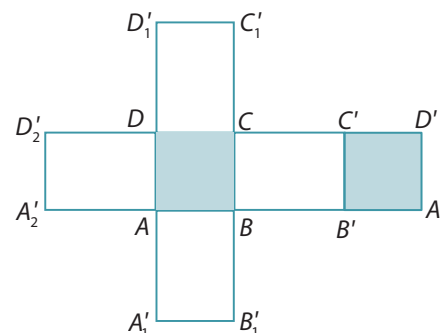
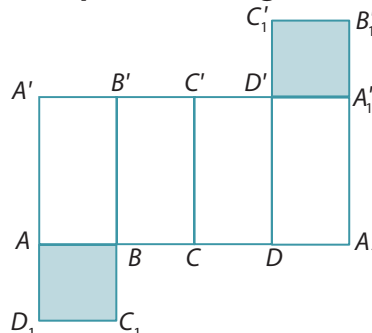
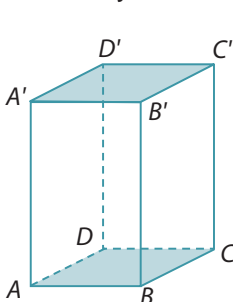
Ca în cazul piramelor, putem desfășura suprafața unei prismă pe un plan. Prezentăm mai jos câteva desfășurări posibile.

I. Desfășurarea unei prismă triunghiulare regulate



etc.

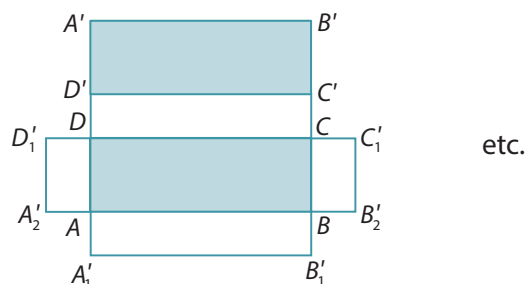
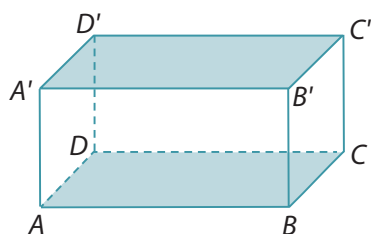
II. Desfășurarea unei prismă patrulatere regulate



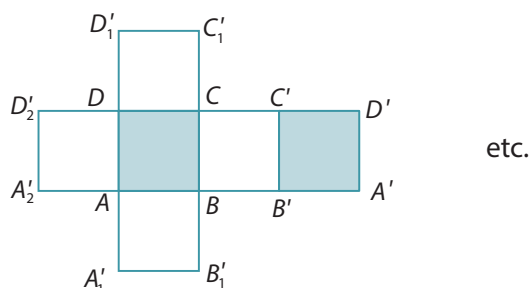
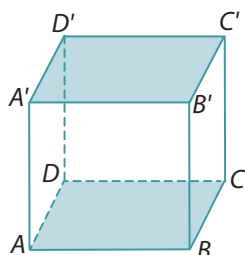
etc.



III. Desfășurarea unui paralelipiped dreptunghic



IV. Desfășurarea unui cub



Aplicăm cunoștințele

1 O cutie de bomboane are forma unui paralelipiped dreptunghic cu lungimea de 40 cm, lățimea de 30 cm și înălțimea de 6 cm. Putem împacheta cutia folosind o coală de hârtie dreptunghiulară cu dimensiunile de 64 cm și 50 cm?

Rezolvare: Suma ariilor fețelor cutiei este egală cu $2 \cdot (40 \cdot 30 + 40 \cdot 6 + 30 \cdot 6) \text{ cm}^2 = 3240 \text{ cm}^2$, iar aria colii de hârtie este egală cu $64 \cdot 50 \text{ cm}^2 = 3200 \text{ cm}^2$. Cum $3240 > 3200$, rezultă că nu putem împacheta cutia de bomboane folosind coala de hârtie dată.

2 Considerăm cubul $ABCD A' B' C' D'$ cu latura $AB = 6 \text{ cm}$. Fie M mijlocul muchiei CC' .

a) Calculează raportul ariilor triunghiurilor $A'BD$ și MBD (figura 5. a)).

b) Fie punctele E, F și G situate pe muchiile $BB', CC',$ respectiv DD' . Determină minimul sumei lungimilor segmentelor AE, EF, FG și GA' (figura 5. b)).

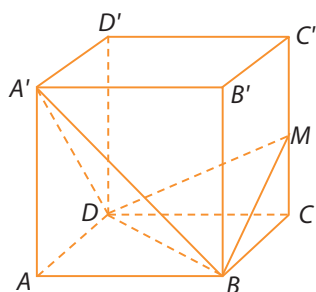


Fig. 5. a)

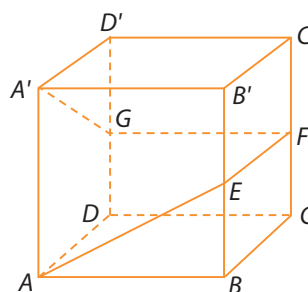
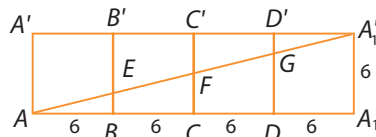


Fig. 5. b)

Rezolvare:

a) Deoarece $A'B, BD$ și $A'D$ sunt diagonale ale pătratelor $ABB'A', ABCD,$ respectiv $ADD'A',$ rezultă că $A'B = BD = A'D = 6\sqrt{2} \text{ cm}$, ceea ce înseamnă că triunghiul $A'BD$ este echilateral, deci $\mathcal{A}_{\Delta A'BD} = 18\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Triunghiul MBD este isoscel cu $MB = MD = 3\sqrt{5} \text{ cm}$ și $BD = 6\sqrt{2} \text{ cm}$; înălțimea corespunzătoare bazei este $MO = 3\sqrt{3} \text{ cm}$ (O fiind mijlocul laturii BD). Prin urmare, $\mathcal{A}_{\Delta MBD} = MO \cdot BD : 2 = 9\sqrt{6} \text{ cm}^2$ și atunci $\mathcal{A}_{\Delta A'BD} : \mathcal{A}_{\Delta MBD} = \sqrt{2}$.

b) Desfășurăm suprafața laterală a cubului pe un plan astfel:



Lungimile segmentelor AE , EF , FG și GA' , situate pe fețele cubului $ABCA'B'C'D'$ rămân nemodificate când desfășurăm suprafața sa laterală, deoarece punctele de pe aceeași față vor fi la fel poziționate unele față de celelalte după desfășurare. Deci, $\min(AE + EF + FG + GA')$ se atinge când, pe desfășurare, avem punctele A , E , F , G , A' coliniare, adică $\min(AE + EF + FG + GA') = AA' = \sqrt{24^2 + 6^2} \text{ cm} = 6\sqrt{17} \text{ cm}$.



Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1 În figura 6 este desenată prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ cu toate muchiile egale. Dacă suma lungimilor tuturor muchiilor prisme este 18 cm, calculează aria feței $ABB'A'$ și aria bazei ABC .

2 Un container are forma unui paralelipiped dreptunghic cu lungimea de 5 m, lățimea de 2 m și înălțimea de 2,5 m. Determină care este numărul maxim de cutii în formă de cub, cu latura de 50 cm, care încap în container.

3 Considerăm o prismă triunghiulară dreaptă $ABCA'B'C'$ (notată ca în figura 6) cu $\angle BAC = 90^\circ$ și $AB = AC = AA' = 4 \text{ cm}$. Determină măsura unghiului $BA'C$.

4 Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată, ca în figura 6. Notăm cu M mijlocul segmentului $A'B'$. Demonstrează că $\angle BMC' = 90^\circ$, știind că $AB = 6 \text{ cm}$ și $AA' = 8 \text{ cm}$.

5 Prisma patrulateră regulată $ABCA'B'C'D'$ (figura 7) are latura bazei $AB = 4 \text{ cm}$ și muchia laterală $AA' = 8 \text{ cm}$. Calculează:

- suma lungimilor tuturor muchiilor laterale;
- aria bazei $ABCD$;
- aria feței $ABB'A'$.

6 O prismă hexagonală regulată $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$ are fețele laterale pătrate cu latura egală cu 6 cm (figura 8). Calculează suma lungimilor tuturor muchiilor prisme și aria unei baze.

7 Un paralelipiped dreptunghic are muchiile egale cu 2 cm, 3 cm, 4 cm. Calculează:

- suma lungimilor tuturor muchiilor;
- suma perimetrelor fețelor;
- suma ariilor fețelor.

8 Fie $ABCA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic (notat ca în figura 7) cu $A'B = C'B = 4\sqrt{2} \text{ cm}$ și $AA' = 4 \text{ cm}$. Arată că $ABCA'B'C'D'$ este, de fapt, un cub.

9 Fie paralelipipedul $ABCA'B'C'D'$ (vezi figura 7), astfel încât $\mathcal{A}_{ABB'A'} = 48 \text{ cm}^2$, $\mathcal{A}_{BCC'B'} = 64 \text{ cm}^2$ și $AA' = 4 \text{ cm}$.

- Calculează aria feței $ABCD$.
- Calculează lungimea segmentului determinat de mijloacele segmentelor $A'D$ și $D'C$.

10 Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară dreaptă (cu notațiile din figura 6) cu baza ABC triunghi dreptunghic în A . Demonstrează că $\mathcal{A}_{BCC'B'}^2 = \mathcal{A}_{ABB'A'}^2 + \mathcal{A}_{ACC'A'}^2$.

11 În figura 9 este reprezentat un rezervor format dintr-un cub $ABCA'B'C'D'$ cu latura $AB = 4 \text{ m}$ și piramidele patrulater regulate $EADD'A'$ și $FBCC'B'$ cu fețele laterale triunghiuri echilaterale. Vopsim tot rezervorul, cu excepția bazei $ABCD$. Dacă pentru 1 m^2 de suprafață folosim 150 g de vopsea, determină câte kilograme de vopsea sunt necesare pentru vopsirea rezervorului (considerăm $\sqrt{3} \approx 1,73$).

12 În figura 10 este reprezentată schematic o clădire în formă de paralelipiped dreptunghic $ABCA'B'C'D'$, având dimensiunile $AB = 20 \text{ m}$, $BC = 10 \text{ m}$ și $AA' = 25 \text{ m}$. Scara exterioră $A - M - N - P - A'$ are lungimea minimă posibilă și punctele M , N , P sunt situate pe muchiile BB' , CC' , respectiv DD' . Calculează lungimea acestei scări (gândită ca o linie).

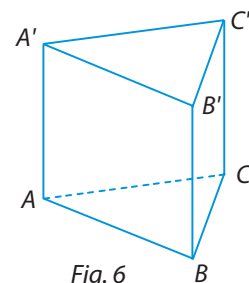


Fig. 6

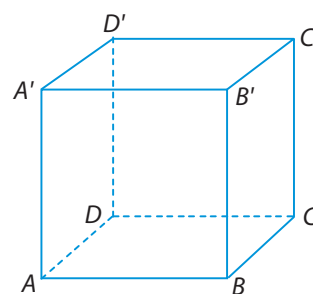


Fig. 7

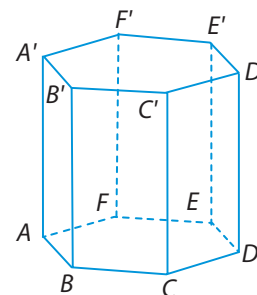


Fig. 8

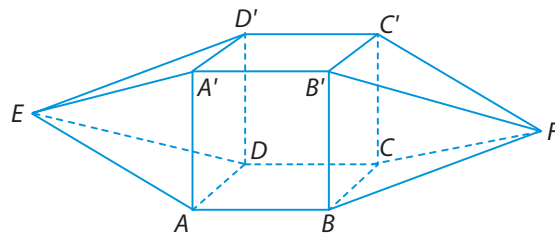


Fig. 9

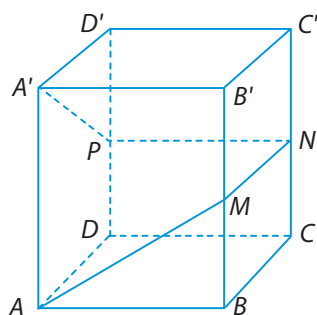


Fig. 10

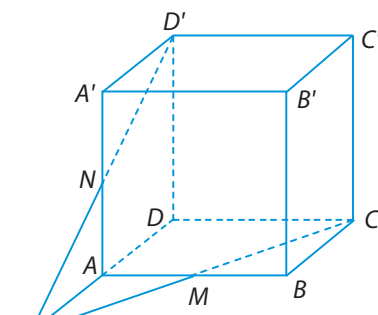


Fig. 11

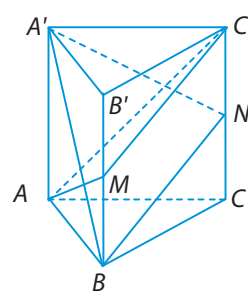


Fig. 12

13 În figura 11 este desenat cubul $ABCA'B'C'D'$ cu latura $AB = 6$ cm. Punctele M și N sunt mijloacele laturilor AB , respectiv AA' , iar P simetricul vârfului D față de vârful A .

- Calculează lungimile segmentelor CM și $D'N$.
- Arată că punctele P, M, C sunt coliniare.
- Demonstrează că punctele C, M, N, D' sunt coplanare.
- Demonstrează că $CMND'$ este trapez isoscel și calculează aria sa.

14 În figura 12 se poate observa prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ și punctele M, N , care sunt mijloacele laturilor BB' , respectiv CC' .

- Arată că triunghiurile AMC' și $A'NB$ sunt isoscele.
- * Demonstrează că dreapta de intersecție a planelor (AMC') și $(A'NB)$ este paralelă cu dreapta $C'M$.

Reține!

- O prismă dreaptă este un poliedru cu două baze poligoane congruente și fețele laterale dreptunghiuri.
- O prismă dreaptă ale cărei baze sunt poligoane regulate se numește prismă regulată.
- Toate fețele unui paralelipiped dreptunghic sunt dreptunghiuri.
- Toate fețele unui cub sunt pătrate (congruente).



Din oficiu: 1 punct

AUTOEVALUARE

Timp de lucru: 40 de minute

1 Alege litera corespunzătoare răspunsului corect.

2 puncte

O prismă regulată cu 12 muchii are bazele:

- triunghiuri echilaterale;
- pătrate;
- dreptunghiuri;
- hexagoane regulate.

2 Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară cu bazele ABC și $A'B'C'$ și muchiile laterale AA', BB', CC' . Verifică dacă următoarele propoziții sunt adevărate sau false:

2 puncte

- $P_1: C \in (ABB')$; $P_2: C' \notin (CBB')$;
 $P_3: \text{dreptele } AA' \text{ și } CC' \text{ sunt coplanare};$ $P_4: \text{dreptele } CC' \text{ și } A'B' \text{ sunt concurente}.$

3 Alege litera corespunzătoare răspunsului corect.

Dacă desfășurăm suprafața laterală a unei prisme hexagonale regulate pe un plan, obținem un pătrat cu aria 36 cm^2 . Suma lungimilor muchiilor prisme este:

2 puncte

- 18 cm;
- 36 cm;
- 48 cm;
- 108 cm.

4 În figura 13 este desenat cubul $ABCA'B'C'D'$ cu latura $AB = 4$ cm. Calculează aria triunghiului $BA'C'$.

2 puncte

5 În figura 14 este reprezentată prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ cu $AB = 6$ cm și $AA' = 6\sqrt{2}$ cm. Fie M mijlocul muchiei CC' .

a) Calculează suma ariilor fețelor laterale ale prisme considerate.

b) Demonstrează că dreptele $A'M$ și BM sunt perpendiculare.

1 punct

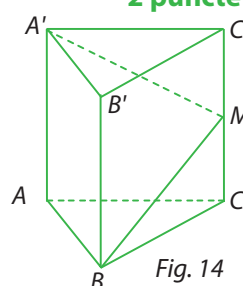


Fig. 14

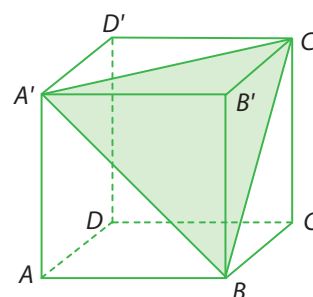


Fig. 13

LECȚIA 4

Corpuri geometrice: cilindrul circular drept, conul circular drept; reprezentare, elemente caracteristice, desfășurări

Cilindrul circular drept și conul circular drept sunt forme geometrice comune printre obiectele din jurul nostru. De exemplu, cutiile de băuturi, trunchiurile copacilor, borcanele, bateriile, cutiile de conserve au toate forma unui cilindru circular drept.

Cilindrul este o structură practică pentru ambalaje și depozitare, permițând o utilizare eficientă a spațiului.

Pe de altă parte, cornetele de înghețată, vârfurile creioanelor ascuțite, pâlniile, unele corturi sunt toate de forma unui con circular drept.

Conul circular drept are un vârf specific și o bază circulară, ceea ce îi conferă stabilitate și o estetică simplă, dar eficientă.

Observăm și descoperim cunoștințe noi

Un **cilindru circular drept** este un corp geometric care poate fi obținut prin rotația completă a unei suprafețe dreptunghiulare în jurul uneia dintre laturile sale sau printr-o rotație de 180° în jurul uneia dintre axele de simetrie a suprafeței dreptunghiulare.

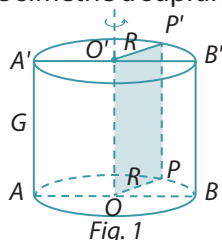


Fig. 1



Avem următoarele elemente caracteristice pentru un cilindru circular drept.

- Prin rotația suprafeței dreptunghiulare $OO'PP'$ în jurul laturii OO' (cum se poate observa în figura 1), segmentul OP descrie discul de centru O și rază R , iar segmentul $O'P'$ descrie discul de centru O' și rază R . Aceste două discuri sunt **bazele** cilindrului.

- Dreapta OO' se numește **axa** (de rotație a) cilindrului.

- Segmentul PP' și oricare dintre pozițiile sale din rotația pe care o face în jurul axei OO' este o **generatoare** a cilindrului. În figura 1, AA' și BB' sunt generatoare ale cilindrului, iar A, B , respectiv A', B' sunt puncte diametral opuse în cercurile care determină bazele. Lungimea unei generatoare se notează cu G .

- Când o generatoare face o rotație completă în jurul axei OO' , ea descrie (generează) **suprafața laterală** a cilindrului circular drept.



OBSERVAȚIE: Un astfel de cilindru (circular drept) este circular pentru că bazele sale sunt determinate de cercuri și este drept pentru că fiecare generatoare formează unghiuri drepte cu razele bazelor duse în punctele de contact cu acestea. De exemplu, în figura 1, generatoarea PP' este perpendiculară pe razele OP și $O'P'$, pentru că $OO'PP'$ este dreptunghi.

Desfășurând suprafața laterală a unui cilindru circular drept pe un plan, obținem un dreptunghi cu una dintre dimensiuni egală cu G , generatoarea cilindrului, și cealaltă dimensiune egală cu $2\pi R$, lungimea unuia dintre cercurile bazelor (figura 2).

În figura 3 se poate observa un exemplu de desfășurare pe un plan a întregii suprafețe a unui cilindru circular drept.

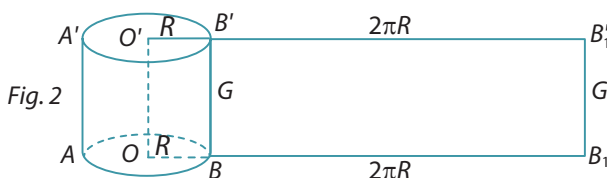


Fig. 2

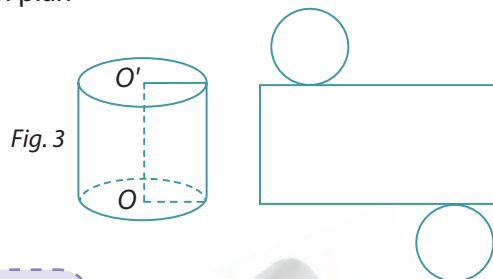


Fig. 3

Activitate practică (proiect)

Determină raza bazei unei role de hârtie de bucătărie folosind metoda sugerată în figura 4.

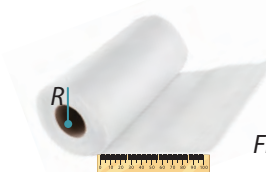


Fig. 4

$$x \text{ cm}, x = 2\pi R$$

Un **con circular drept** este un corp geometric care se poate obține prin rotația unei suprafețe triunghiulare dreptunghice în jurul unei catete sau printr-o rotație de 180° a unei suprafețe în formă de triunghi isoscel în jurul axei de simetrie a triunghiului.

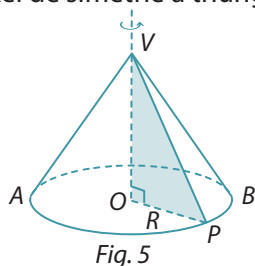


Fig. 5



Avem următoarele elemente caracteristice pentru un con circular drept.

- Prin rotația suprafeței triunghiulare dreptunghice VOP , cu $\angle O = 90^\circ$, în jurul catetei VO (figura 5), segmentul OP descrie discul de centru O și rază R . Acest disc este **baza** conului.
- Dreapta VO se numește **axa** (de rotație a) conului, iar punctul V se numește **vârful** sau **apexul** conului.
- Segmentul VP și oricare dintre pozițiile sale din rotația pe care o face în jurul axei VO este o **generatoare** a conului. În figura 5, VA și VB sunt generatoare ale conului, iar punctele A și B sunt diametral opuse în cercul care delimitează baza. Lungimea unei generatoare se notează cu G .
- Când o generatoare face o rotație completă în jurul axei VO , ea descrie (generează) **suprafața laterală** a conului circular drept.

OBSERVAȚIE: Un astfel de con (circular drept) este circular pentru că baza sa este determinată de un cerc și este drept pentru că axa VO formează unghiuri drepte cu oricare dintre razele bazei. De exemplu, în figura 5 avem $\angle VOP = \angle VOA = \angle VOB = 90^\circ$.

Desfășurând suprafața laterală a unui con circular drept pe un plan, obținem suprafața unui sector de cerc, având raza egală cu generatoarea conului și lungimea egală cu lungimea cercului bazei (figura 6).

Dacă notăm cu u măsura unghiului sectorului de cerc care reprezintă desfășurarea suprafeței laterale a conului, atunci are loc relația $u = 360^\circ \cdot \frac{R}{G}$.

În figura 7 se observă un exemplu de desfășurare pe un plan a întregii suprafețe a unui con circular drept.

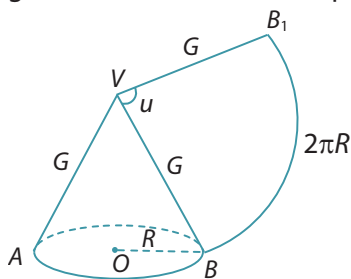


Fig. 6

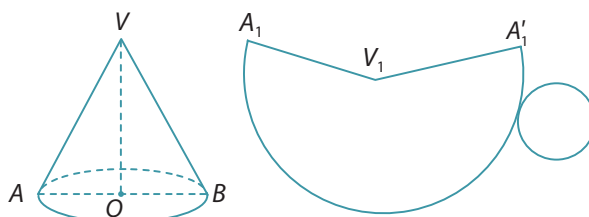


Fig. 7



Știi că...

Cuvântul „cilindru” provine din grecescul *kylindros*, care înseamnă „a rostogoli”. Forma cilindrului a fost studiată încă din Antichitate de matematicieni precum Arhimede.

Cuvântul „con” provine din grecescul *kōnos*, care înseamnă „pin” sau „con de pin”. Matematicienii greci, precum Euclid și Apoloni, au studiat conul și secțiunile sale (secțiunile conice), folosind acest termen.



Aplicăm cunoștințele

1 În figura 8 este reprezentat schematic trunchiul unui copac, având forma unui cilindru circular drept, cu grosimea de 1 m și înălțimea de 2 m. Grosimea este diametrul unei baze (de exemplu, $AB = 1$ m), iar înălțimea trunchiului este generatoarea cilindrului (de exemplu, $AA' = 2$ m).

- Calculează aria unei baze.
- O furnică merge pe scoarța copacului din punctul A până în punctul B' . Arată că furnică merge mai mult de 2,5 m.

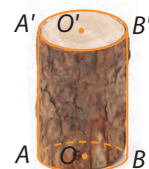


Fig. 8

Rezolvare:

a) Raza bazei trunchiului este $R = \frac{AB}{2} = \frac{1}{2}$ m, deci aria unei baze este egală cu

$$\pi R^2 = \frac{\pi}{4} \text{ m}^2 \approx \frac{3,14}{4} \text{ m}^2 = 0,785 \text{ m}^2.$$

b) Desfășurăm suprafața laterală a cilindrului pe un plan, ca în figura 9. Lungimea drumului minim, pe scoarța copacului, din punctul A până în punctul B', este egală cu lungimea segmentului AB' din desfășurarea suprafeței laterale a cilindrului.

$$\text{Avem } AB = \pi R = \frac{\pi}{2} \text{ m și } AB' = \sqrt{AB^2 + BB'^2} = \sqrt{4 + \frac{\pi^2}{4}} \text{ m} > \sqrt{4 + \frac{9}{4}} \text{ m} = \frac{5}{2} \text{ m} = 2,5 \text{ m}.$$

2 Dintr-o bucată de carton în formă de semicerc cu raza de 20 cm, obținem, prin înfășurare, un coif în formă de con circular drept (figura 10).

a) Calculează aria suprafeței laterale a conului.

b) Determină măsura unghiului AVB, unde V este vârful coifului, iar AB este un diametru al bazei conului.

Rezolvare:

a) Aria suprafeței laterale a conului este totuna cu aria semicercului, deci este egală cu $\pi \cdot 20^2 : 2 \text{ cm}^2 = 200\pi \text{ cm}^2$.

b) Avem $VA = VB = 20 \text{ cm}$. Pentru a afla raza bazei conului, OA, observăm că lungimea semicercului din carton este egală cu lungimea cercului de la baza conului, adică $20\pi = 2 \cdot \pi \cdot AO$, de unde rezultă că $AO = 10 \text{ cm}$, deci $AB = 20 \text{ cm}$.

Prin urmare, triunghiul VAB este echilateral, ceea ce înseamnă că $\angle AVB = 60^\circ$.

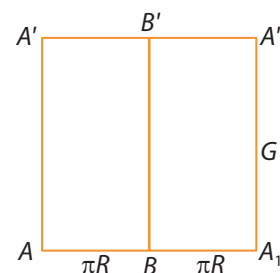


Fig. 9

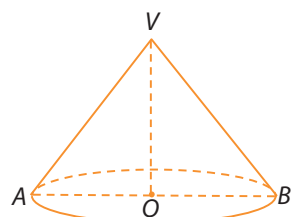
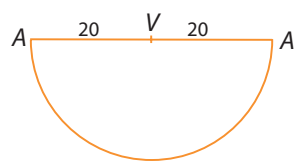


Fig. 10



Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1 Un cilindru circular drept are diametrul unei baze egal cu 8 cm. Calculează aria bazei și lungimea circumferinței sale.

2 Câte țevi, în formă de cilindru circular drept cu diametrul bazei de 40 cm și generatoarea de 200 cm, încap într-un container în formă de paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile 160 cm, 120 cm și 200 cm?

3 Într-un cilindru circular drept, lungimea generatoarei G este egală cu lungimea cercului de bază (de rază R). Arată că raportul $\frac{R}{G}$ este mai mic decât $\frac{1}{6}$.

4 Într-un cilindru circular drept, raza bazei este egală cu $\frac{3}{\pi}$ cm, iar generatoarea este egală cu 4 cm.

Calculează perimetrul suprafeței dreptunghiulare care reprezintă desfășurarea suprafeței laterale a cilindrului.

5 Desfășurarea suprafeței laterale a unui cilindru circular drept este o suprafață pătrată cu aria de 36 cm^2 . Calculează aria bazei cilindrului.

6 Un con circular drept de vârf V are raza bazei $R = 20 \text{ cm}$ și generatoarea $G = 25 \text{ cm}$. Dacă AB este un diametru al cercului bazei conului, calculează aria triunghiului VAB (figura 11) și aria bazei.

7 Un con circular drept de vârf V are generatoarea $G = 13 \text{ cm}$. Fie M și N două puncte situate pe cercul bazei, astfel încât $MN = 10 \text{ cm}$.

a) Calculează aria triunghiului VMN.

b) Dacă, în plus, $\angle MON = 90^\circ$, unde O este centrul bazei, determină raza bazei conului.

8 Fie un con circular drept cu vârful V și generatoarea $G = 6 \text{ cm}$. Pe cercul bazei conului considerăm trei puncte, A, B, C, astfel încât $\angle AVB = \angle BVC = \angle CVA = 90^\circ$ (figura 12).

a) Arată că triunghiul ABC este echilateral.

b) Calculează aria bazei conului.

9 Într-un con circular drept de vârf V, raportul dintre lungimea cercului bazei și lungimea generatoarei este $\pi\sqrt{2}$. Dacă AB este un diametru al bazei, demonstrează că generatoarele VA și VB sunt perpendiculare (figura 11).

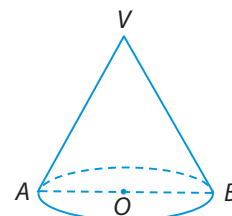


Fig. 11

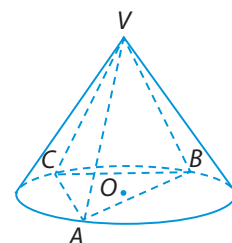


Fig. 12

10 Fie un con circular drept cu vârful V și AB un diametru al cercului bazei (figura 11). Dacă triunghiul VAB este echilateral, de arie $9\sqrt{3} \text{ cm}^2$, determină:

- aria bazei conului;
- unghiul sectorului de cerc ce delimitează desfășurarea suprafeței laterale a conului.

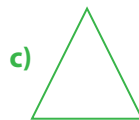
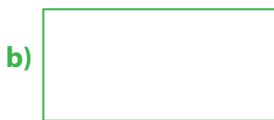


Din oficiu: 1 punct

AUTOEVALUARE

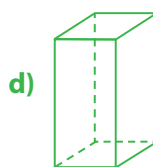
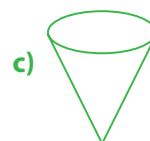
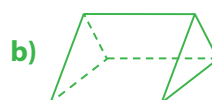
Timp de lucru: 40 de minute

1 Care dintre următoarele desene ar putea reprezenta umbra unui cilindru circular drept pe un plan? **2 puncte**



2 Găsește perechile potrivite, după modelul 1) – d). **2 puncte**

- 1) Paralelipiped dreptunghic
- 2) Con circular drept
- 3) Tetraedru regulat
- 4) Cilindru circular drept
- 5) Prismă triunghiulară regulată



3 Desfășurarea suprafeței laterale a unui cilindru circular drept este o suprafață dreptunghiulară cu dimensiunile de $6\pi \text{ cm}$ și $8\pi \text{ cm}$. Cât poate fi aria bazei cilindrului? **2 puncte**

4 Într-un con circular drept de vârf V , lungimea generatoarei este egală cu 6 cm , iar diametrul bazei este $AB = 6\sqrt{3} \text{ cm}$. Determină măsura unghiului VAO . **2 puncte**

5 Se consideră un con circular drept cu vârful V , generatoarea $G = 6 \text{ cm}$ și raza bazei $R = 2\sqrt{3} \text{ cm}$. Triunghiul echilateral ABC este înscris în cercul bazei conului. **1 punct**

- Arată că tetraedrul $VABC$ este regulat.
- Calculează aria triunghiului VAB .

LECȚIA 5 Paralelism: drepte paralele, unghiul a două drepte

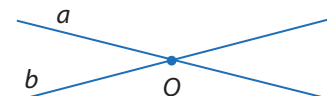


Ne amintim

În clasa a VI-a, am învățat că, într-un plan, două drepte pot fi concurente (au un punct comun) sau paralele (nu au niciun punct comun).

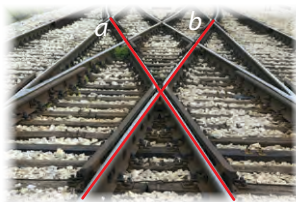
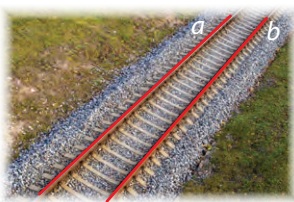


Dreptele a și b sunt paralele;
notăm: $a \parallel b$.



Dreptele a și b sunt concurente în
punctul O ; notăm: $a \cap b = \{O\}$.

Observăm și descoperim cunoștințe noi



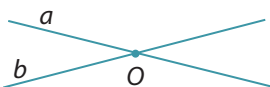
În pozele de mai sus se observă diversele poziții pe care le pot avea două drepte în spațiu. Sintetizând, în spațiu, două drepte pot fi:

- **paralele:** drepte sunt coplanare și nu au niciun punct comun;



a, b sunt coplanare și $a \cap b = \emptyset \Rightarrow a, b$ sunt paralele: $a \parallel b$

- **concurente:** drepte au (exact) un punct comun; în acest caz, drepte sunt coplanare;



$a \cap b = \{O\} \Rightarrow a, b$ sunt concurente

- **necoplanare:** drepte nu au niciun punct comun și nu există un plan care să le conțină.



$a \cap b = \emptyset$ și $a \not\parallel b \Rightarrow a, b$ sunt necoplanare



Ca în plan, legătura dintre mai multe drepte paralele este descrisă de următoarea teoremă.

TEOREMĂ: În spațiu, două drepte paralele cu o a treia dreaptă sunt paralele între ele.



$a \parallel c, b \parallel c \Rightarrow a \parallel b$

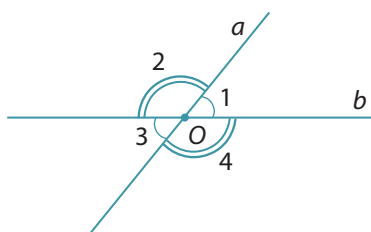
Să definim acum măsura unghiului format de două drepte, a și b , din spațiu.

I. Dacă drepte a și b sunt paralele, atunci ele sunt coplanare și, la fel ca în plan, măsura unghiului dintre ele este 0° .



$a \parallel b \Rightarrow \sphericalangle(a, b) = 0^\circ$

II. Dacă drepte a și b sunt concurente, atunci ele sunt coplanare și, la fel ca în plan, măsura unghiului dintre ele este cea mai mică măsură a unghiurilor formate de cele două drepte.

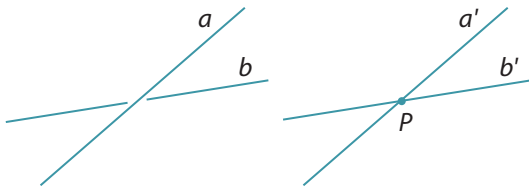


$a \cap b = \{O\}$ și $\sphericalangle O_1 \leq \sphericalangle O_2 \Rightarrow \sphericalangle(a, b) = \sphericalangle O_1$

OBSERVAȚII:

1. $\sphericalangle O_1 = \sphericalangle O_3$ și $\sphericalangle O_2 = \sphericalangle O_4$, fiind unghiuri opuse la vârf.
2. Dacă $\sphericalangle O_1 = 90^\circ$, atunci $\sphericalangle(a, b) = 90^\circ$, iar drepte a și b se numesc perpendiculare și notăm $a \perp b$.

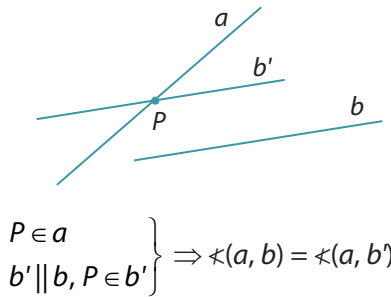
III. Dacă dreptele a și b sunt necoplanare, atunci măsura unghiului lor este măsura unghiului format de paralele duse printr-un punct oarecare la cele două drepte.



$$\left. \begin{array}{l} a' \parallel a, P \in a' \\ b' \parallel b, P \in b' \end{array} \right\} \Rightarrow \sphericalangle(a, b) = \sphericalangle(a', b')$$

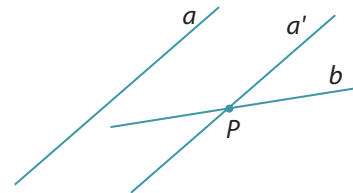
OBSERVAȚII:

1. De multe ori, în problemele de geometrie, punctul P este ales pe dreapta a sau pe dreapta b :



$$\left. \begin{array}{l} P \in a \\ b' \parallel b, P \in b' \end{array} \right\} \Rightarrow \sphericalangle(a, b) = \sphericalangle(a, b')$$

sau



$$\left. \begin{array}{l} P \in b \\ a' \parallel a, P \in a' \end{array} \right\} \Rightarrow \sphericalangle(a, b) = \sphericalangle(a', b)$$

2. Dacă a și b sunt drepte necoplanare și $P \in a'$, $P \in b'$, $a' \perp b'$, atunci $\sphericalangle(a, b) = \sphericalangle(a', b') = 90^\circ$, ceea ce înseamnă că dreptele a și b sunt perpendiculare și notăm $a \perp b$. Deci, în spațiu, avem drepte perpendiculare care nu sunt concurente (sunt necoplanare).

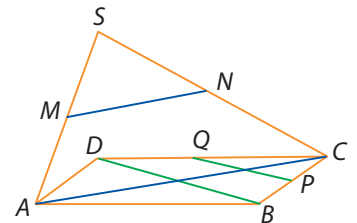


Aplicăm cunoștințele

1 Fie $ABCD$ un romb și S un punct situat în afara planului rombului. Notăm mijloacele segmentelor SA , SC , BC și CD cu M , N , P , respectiv Q . Demonstrează că dreptele MN și PQ sunt perpendiculare.

Rezolvare:

Ideea! Căutăm două drepte concurente, una paralelă cu MN și cealaltă paralelă cu PQ . Fiindcă punctele M , N , P , Q sunt mijloacele segmentelor SA , SC , BC , respectiv CD , ne gândim să folosim proprietățile liniei mijlocii. Cum MN și PQ sunt linii mijlocii în triunghiurile SAC , respectiv BCD , avem $MN \parallel AC$ și $PQ \parallel BD$, deci $\sphericalangle(MN, PQ) = \sphericalangle(AC, BD) = 90^\circ$, deoarece $ABCD$ este romb și orice romb are diagonalele perpendiculare. Prin urmare, dreptele MN și PQ sunt perpendiculare.



2 În figura alăturată este reprezentată prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ cu muchia bazei $AB = \sqrt{2}$ cm și muchia laterală $AA' = 2$ cm. Fie O și M mijloacele segmentelor $A'B$, respectiv AC .

a) Demonstrează că dreptele OM și $B'C$ sunt paralele.

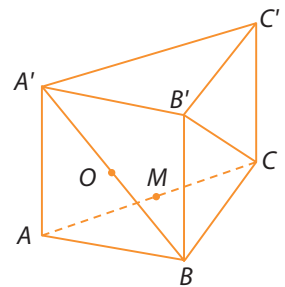
b) Determină măsura unghiului dintre dreptele $A'B$ și $B'C$.

Rezolvare:

a) Deoarece $ABB'A'$ este dreptunghi, rezultă că punctul O este și mijlocul diagonalei AB' . În triunghiul $AB'C$, punctele O și M sunt mijloacele laturilor AB' și AC , deci OM este linie mijlocie, ceea ce implică $OM \parallel B'C$.

b) Cum $B'C \parallel OM$, avem $\sphericalangle(A'B, B'C) = \sphericalangle(A'B, OM)$. Pentru a determina măsura unghiului dintre dreptele $A'B$ și OM , calculăm lungimile laturilor triunghiului BOM . Avem: $A'B = B'C = \sqrt{2^2 + (\sqrt{2})^2}$ cm = $\sqrt{6}$ cm, deci $OB = \frac{A'B}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ cm și $OM = \frac{B'C}{2}$ (linie mijlocie în triunghiul $AB'C$) = $\frac{\sqrt{6}}{2}$ cm. Deoarece BM este mediană a triunghiului echilateral

ABC , $BM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ cm. Așadar, $OB = OM = BM = \frac{\sqrt{6}}{2}$ cm, deci triunghiul BOM este echilateral și atunci $\sphericalangle(A'B, B'C) = \sphericalangle(A'B, OM) = \sphericalangle BOM = 60^\circ$.





Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

- 1 Lucru în echipă:** Împreună cu colegul de bancă, rezolvați sarcinile propuse și analizați rezultatele găsite. În figura 1 este reprezentat cubul $ABCD A' B' C' D'$.

a) Arată că muchiile laterale AA' și CC' sunt paralele între ele.

b) Demonstrează că $AC \parallel A'C'$ și $AC \perp B'D'$.

- 2** În figura 2 este desenat paralelipipedul dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$ cu $AD = AA'$. Determină măsura fiecăruia dintre următoarele unghiuri:

a) $\sphericalangle(AD, B'C')$;

b) $\sphericalangle(AA', BC)$;

c) $\sphericalangle(AD', BC)$.

- 3** Fie $ABCD A' B' C' D'$ un cub (vezi figura 1). Determină măsura fiecăruia dintre următoarele unghiuri:

a) $\sphericalangle(AD, CB')$;

b) $\sphericalangle(AA', CD)$;

c) $\sphericalangle(AD', B'C)$.

- 4** Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu vârful V și $VA = AB$ (vezi figura 3). Determină măsura fiecăruia dintre unghiurile:

a) $\sphericalangle(VA, BC)$;

b) $\sphericalangle(AB, DC)$;

c) $\sphericalangle(VB, VD)$.

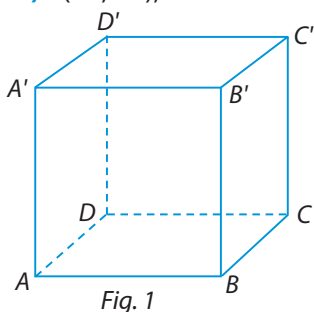


Fig. 1

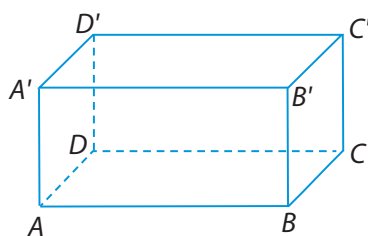


Fig. 2

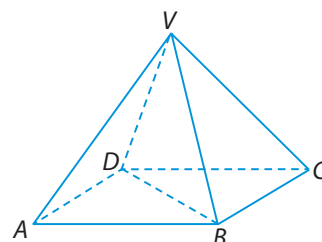


Fig. 3

- 5** În figura 4 este reprezentată prisma triunghiulară regulată $ABCA' B' C'$ cu $AB = AA'$. Punctul M este mijlocul laturii BC . Determină măsura fiecăruia dintre unghiurile:

a) $\sphericalangle(AB, B'C')$;

b) $\sphericalangle(AM, A'C')$;

c) $\sphericalangle(AA', BC)$;

d) $\sphericalangle(AM, B'C')$.

- 6** Fie $SABC$ o piramidă triunghiulară regulată cu vârful S , $SA = 3\sqrt{2}$ cm și $AB = 6$ cm (figura 5). Punctele M și N sunt mijloacele laturilor AB , respectiv BC . Determină măsura fiecăruia dintre unghiurile:

a) $\sphericalangle(SA, SB)$;

b) $\sphericalangle(SA, MN)$;

c) $\sphericalangle(AC, MN)$;

d) $\sphericalangle(SM, AC)$.

- 7** Considerăm piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu vârful V . Fie O centrul bazei $ABCD$, M este mijlocul muchiei VC , $AB = 2\sqrt{6}$ cm și $VA = 4$ cm.

a) Demonstrează că triunghiul OMV este echilateral.

b) Calculează măsura unghiului determinat de dreptele AO și OM .

- 8** Considerăm cubul $ABCD A' B' C' D'$, desenat în figura 1. Determină măsura unghiului format de dreptele $A'B$ și AD' .

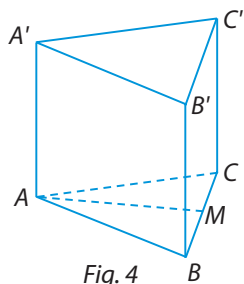


Fig. 4

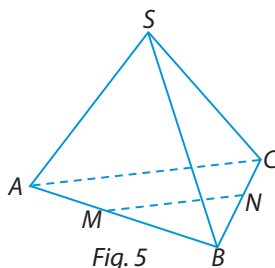


Fig. 5

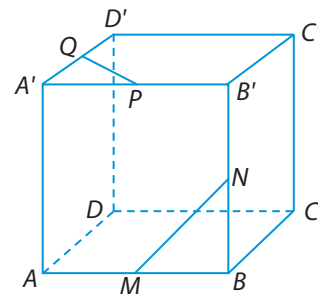


Fig. 6

- 9** În figura 6 este desenat un cub $ABCD A' B' C' D'$. Punctele M, N, P, Q sunt mijloacele laturilor $AB, BB', A'B'$, respectiv $A'D'$. Determină măsura unghiului format de dreptele MN și PQ .

- 10** În figura 7 sunt reprezentate pătratele $ABCD$ și $ABMN$, situate în plane diferite, astfel încât $\sphericalangle CMB = 30^\circ$.

a) Arată că punctele C, D, N și M sunt coplanare.

b) Determină măsura fiecăruia dintre unghiurile: $\sphericalangle(BC, AN)$, $\sphericalangle(AM, CD)$ și $\sphericalangle(DN, BC)$.

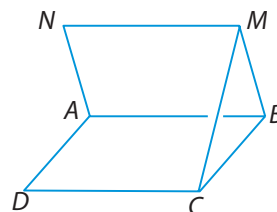


Fig. 7

11 În figura 8 este reprezentat tetraedrul regulat $ABCD$ cu $AB = 6$ cm. Punctele M , N , P sunt mijloacele laturilor BC , AC , respectiv AD .

- Arată că dreptele AD și MP sunt perpendiculare.
- Calculează lungimile laturilor triunghiului MNP .
- Determină măsura fiecăruia dintre următoarele două unghiuri: $\angle(AB, MP)$ și $\angle(AB, CD)$.

12 Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată cu $AB = 6$ cm și $AA' = 8$ cm, ca în figura 4. Punctul M este mijlocul laturii BC .

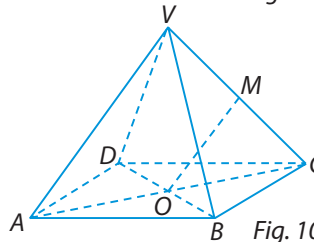
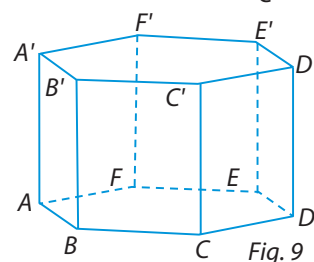
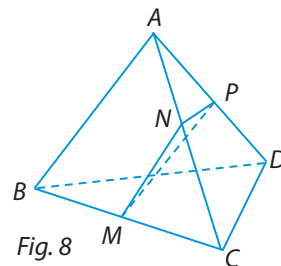
- Calculează suma ariilor fețelor laterale ale prisme.
- Calculează $\text{tg}(\angle(AA', C'M))$.
- Demonstrează că dreptele AM și $C'M$ sunt perpendiculare.

13 În figura 9 este desenată prisma hexagonală regulată $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$ cu $AB = AA'$. Determină măsura fiecăruia dintre unghiurile:

- $\angle(E'C', AB)$;
- $\angle(BC, F'E)$;
- $\angle(B'D', BE)$.

14 Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu fețele laterale triunghiuri echilaterale. Notăm cu O centrul bazei și cu M mijlocul laturii VC (vezi figura 10).

- Arată că dreptele BD și OM sunt perpendiculare.
- Determină măsura fiecăruia dintre unghiurile: $\angle(VA, BD)$ și $\angle(VB, OM)$.
- Calculează $\cos(\angle(VA, MB))$.



Din oficiu: 1 punct

AUTOEVALUARE

Timp de lucru: 40 de minute

1 Alege litera corespunzătoare răspunsului corect.

Dacă triunghiul ABC este isoscel cu baza BC și $\angle B = 30^\circ$, atunci măsura unghiului format de dreptele AB și AC este egală cu:

- 30° ;
- 45° ;
- 60° ;
- 120° .

2 puncte

2 Fie $ABCD A'B'C'D'$ un cub. Verifică dacă următoarele propoziții sunt adevărate sau false:

- P_1 : $AA' \perp BC$; P_2 : $\angle(A'B', DC) = 0^\circ$;
 P_3 : $\angle(AD', B'C) = 45^\circ$; P_4 : $\angle(A'D', AB) = 90^\circ$.

2 puncte

3 Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu $VA = AB$ și baza $ABCD$. Punctul O este centrul bazei, iar punctul M este mijlocul laturii VB . Completează următorul tabel:

2 puncte

$\angle(AC, BD)$	$\angle(VA, BC)$	$\angle(OM, AC)$	$\angle(OM, VA)$
a)	b)	c)	d)

4 Fie $ABCD$ un tetraedru și M, N, P, Q mijloacele muchiilor AB, BC, CD , respectiv AD .

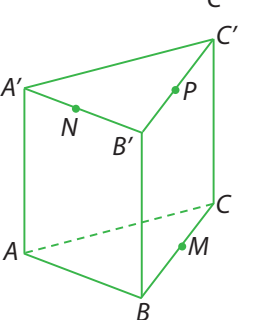
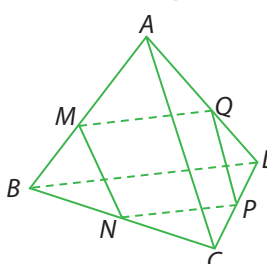
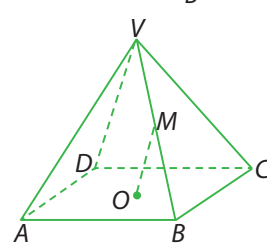
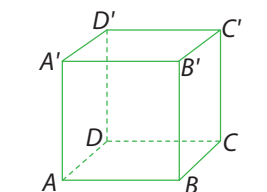
- Arată că patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram.
- Dacă, în plus $AC \perp BD$, demonstrează că $MNPQ$ este dreptunghi.

2 puncte

5 Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată cu $AB = 12$ cm și $AA' = 8$ cm. Notăm cu M, N și P mijloacele laturilor $BC, A'B'$, respectiv $B'C'$.

- Arată că dreptele MP și $A'C'$ sunt perpendiculare.
- Determină lungimea segmentului MN .

1 punct



LECȚIA 6 Dreaptă paralelă cu un plan

Observăm și descoperim cunoștințe noi

În spațiu, o dreaptă poate avea următoarele trei poziții față de un plan.

I. Din prima lecție de geometrie a acestui an ai aflat că, dacă o dreaptă d are două puncte comune cu un plan α , atunci **dreapta d este inclusă în planul α** (imaginea de mai jos și figura 1).

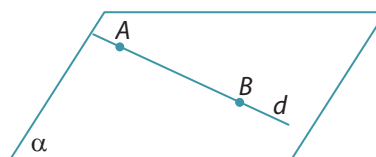


Fig. 1

$$A \neq B; A \in d, B \in d, A \in \alpha, B \in \alpha \Rightarrow d \subset \alpha$$

II. În spațiu, o dreaptă d poate avea un singur punct comun cu un plan α (imaginea de mai jos și figura 2). În acest caz, spunem că **dreapta d și planul α sunt secante** sau că **dreapta d „înțeapă” planul α** .

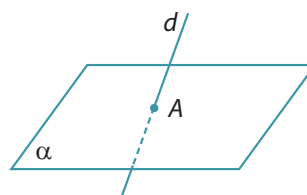
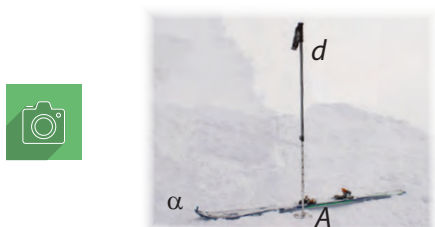


Fig. 2

$$d \cap \alpha = \{A\}$$

III. În spațiu, o dreaptă d poate să nu aibă niciun punct comun cu un plan α (imaginea de mai jos și figura 3). În acest caz, spunem că **dreapta d este paralelă cu planul α** și notăm $d \parallel \alpha$.

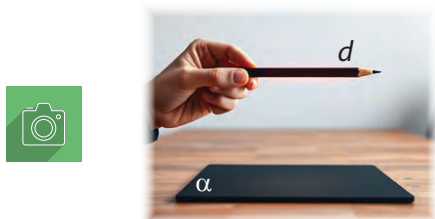


Fig. 3

$$d \cap \alpha = \emptyset \Rightarrow d \parallel \alpha$$

Pentru a demonstra că o dreaptă este paralelă cu un plan, putem folosi teorema 1.

TEOREMA 1: O dreaptă paralelă cu o dreaptă dintr-un plan este paralelă cu planul sau conținută în el.

Demonstrație: Fie un plan α , o dreaptă a inclusă în α și o dreaptă d paralelă cu a , dar care nu este inclusă în planul α (vezi figura 4). Vom demonstra că $d \parallel \alpha$.

Cum dreptele a și d sunt paralele, ele determină un plan β diferit de α . Evident, a este dreapta de intersecție a planelor α și β (vezi figura 5).

Dacă, prin absurd, dreapta d și planul α nu ar fi paralele, atunci ele ar avea un punct comun O ($O \in d, O \in \alpha$). În acest caz, din relațiile $O \in d$ și $d \subset \beta$, rezultă că $O \in \beta$, deci $O \in \alpha \cap \beta = a$, ceea ce ar însemna că dreptele a și d au în comun punctul O , în contradicție cu faptul că $d \parallel a$ (vezi figura 6).

Prin urmare, în condiții din ipoteza teoremei, dreapta d este paralelă cu planul α .

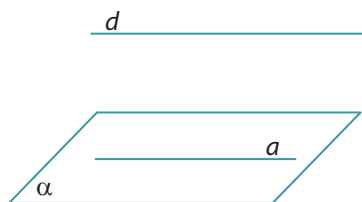


Fig. 4

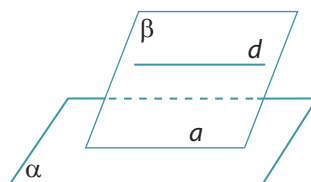


Fig. 5

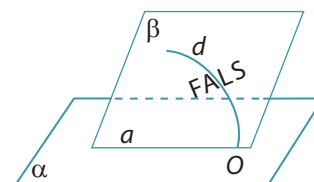


Fig. 6

OBSERVAȚII:

1. Dacă o dreaptă este paralelă cu un plan, ea este paralelă cu o infinitate de drepte din plan, dar nu este paralelă cu orice dreaptă din acel plan.

De exemplu, în cubul $ABCD A'B'C'D'$ din figura 7, dreapta $A'B'$, paralelă cu planul $(ABCD)$, este paralelă cu toate dreptele MN , unde $M \in (AD)$, $N \in (BC)$ și $AM = BN$, dar nu este paralelă cu dreptele AD , BC , BD etc.

2. Teorema 1 este importantă, deoarece ne furnizează o metodă simplă (care ține de geometria plană) pentru a dovedi că o dreaptă d este paralelă cu un plan α : demonstrăm că două drepte sunt paralele, dreapta d și o dreaptă (convenabil aleasă) a din planul α .

EXEMPLU: Fie un plan α și punctele A, B, O, C și D , astfel încât $A \in \alpha, B \in \alpha, O \notin \alpha$, iar C și D sunt simetricele punctelor A , respectiv B față de punctul O (vezi figura 8). Demonstrează că dreapta CD este paralelă cu planul α .

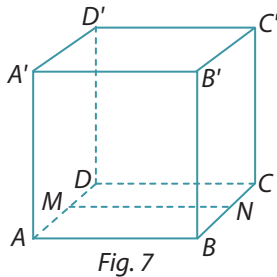


Fig. 7

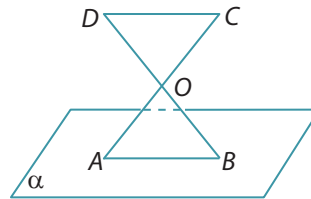


Fig. 8

Cum gândim?

Pentru a folosi teorema 1, ar trebui să găsim o dreaptă în planul α care să fie paralelă cu dreapta CD . Cum în exemplul nostru avem informații doar despre punctele A și B din α , ar fi bine să considerăm dreapta $AB \subset \alpha$.

În continuare, căutăm o metodă să dovedim că $CD \parallel AB$. Deoarece punctele C și D sunt simetricele punctelor A , respectiv B față de punctul O , rezultă că $ABCD$ este paralelogram, deci $CD \parallel AB$.

Cum redactăm soluția?

Avem: $C = \text{sim}_O A$ și $D = \text{sim}_O B \Rightarrow AO = OC$ și $BO = OD \Rightarrow ABCD$ este paralelogram $\Rightarrow CD \parallel AB$.

Din relațiile $CD \parallel AB$, $AB \subset \alpha$ și $CD \not\subset \alpha$ rezultă că $CD \parallel \alpha$.

**Aplicăm cunoștințele**

1 În figura 9 este desenat paralelipipedul $ABCD A'B'C'D'$. Stabilește dacă dreapta BD este paralelă cu planul $(AB'D')$.

Rezolvare:

Căutăm o dreaptă din planul $(AB'D')$ care să fie paralelă cu BD . Observăm că o dreaptă potrivită este $B'D'$, deoarece $BB' \parallel AA'$, $BB' = AA'$ (căci $ABB'A'$ este dreptunghi) și $AA' \parallel DD'$, $AA' = DD'$ (pentru că $ADD'A'$ este dreptunghi), deci $BB' \parallel DD'$, $BB' = DD'$, de unde rezultă că $BDD'B'$ este paralelogram, ceea ce înseamnă că $BD \parallel B'D'$.

Concluzia o scriem astfel: $BD \parallel B'D'$, $B'D' \subset (AB'D')$, $BD \not\subset (AB'D') \Rightarrow BD \parallel (AB'D')$.

2 Demonstrează că, dacă dreapta d este paralelă cu planul α , iar planul β , care conține dreapta d , intersectează pe α după dreapta a , atunci dreptele a și d sunt paralele (vezi figura 10).

Rezolvare:

Cum dreptele d și a sunt coplanare (sunt incluse în planul β), înseamnă că ele sunt concurente sau paralele. Dacă dreptele d și a ar fi concurente în punctul O , atunci $O \in a \subset \alpha$ ($\alpha \cap \beta = a$) și $O \in d$, deci d și α ar avea în comun punctul O și atunci d și α nu ar mai fi paralele, cum se afirmă în ipoteză. Prin urmare, dreptele coplanare d și a nu sunt concurente, deci sunt paralele.

OBSERVAȚIE: Am putea să ne imaginăm dreapta d ca o baghetă (creion, băț), planul α ca un perete, iar dreapta a ca umbra lăsată pe peretele α de bagheta d prin care trece planul razelor de lumină β .

Enunțul problemei poate fi interpretat astfel: dacă bagheta este paralelă cu peretele, atunci va fi paralelă cu umbra sa. Observăm și că, dacă bagheta „înțeapă” peretele în punctul O , atunci ea este concurentă cu umbra sa tot în O .

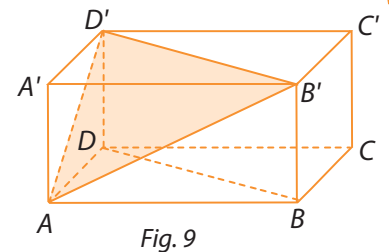


Fig. 9

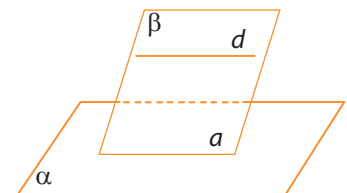


Fig. 10



Fă și tu acest mic experiment, în camera ta, într-o seară, folosind, de exemplu, un creion ca baghetă. Dacă îți este mai ușor, poți reține acest rezultat interesant numindu-l „Teorema Umbrei”.

3 Demonstrează că, dacă d este dreapta de intersecție a planelor α și β , iar planul α conține dreapta a , planul β conține dreapta b și dreptele a și b sunt paralele, atunci d este paralelă cu fiecare dintre dreptele a și b (vezi figura 11).

Rezolvare: Deoarece $a \parallel b$, $b \subset \beta$ și $a \not\subset \beta$, rezultă că $a \parallel \beta$. Din relațiile $a \parallel \beta$, $a \subset \alpha$, $\alpha \cap \beta = d$, obținem, conform rezultatului anterior (Teorema Umbrei), că $a \parallel d$. Cum $d \parallel a$ și $a \parallel b$, avem și $d \parallel b$.

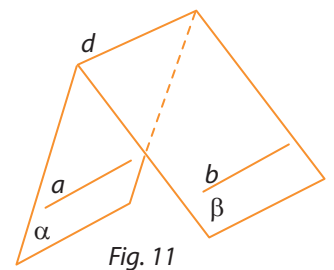


Fig. 11

OBSERVAȚIE: Desenul din figura 11 seamănă cu acoperișul unei case. De aceea, pentru a reține mai ușor acest rezultat, îl poți numi într-un mod nonformal, „Teorema Acoperișului”.



Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1 Fie un plan α și punctele $A, B \in \alpha$, $P \notin \alpha$, $C \in (PA)$, $D \in (PB)$, astfel încât $AC = 6$ cm, $CP = 4$ cm, $BD = 9$ cm și $PD = 6$ cm. Demonstrează că dreapta CD este paralelă cu planul α (figura 12).

2 Fie un plan α și punctele $A, B \in \alpha$, $P \notin \alpha$, $C \in (PA)$, $D \in (PB)$, astfel încât $PC = 2$ cm, $CA = 3$ cm, $PD = 4$ cm și $DB = 5$ cm. Demonstrează că dreapta CD și planul α sunt secante (vezi figura 12).

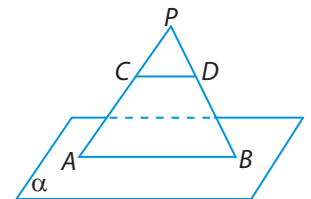


Fig. 12

3 Fie $ABCD$ un tetraedru și M, N, P, Q mijloacele laturilor AB, BC, CD , respectiv DA .

a) Arată că punctele M, N, P și Q sunt coplanare.

b) Dacă α este planul determinat de punctele M, N și P , demonstrează că $AC \parallel \alpha$ și $BD \parallel \alpha$.

4 În figura 13 este reprezentat tetraedrul regulat $ABCD$, unde punctele G și E sunt centrele de greutate ale triunghiurilor DAB , respectiv DBC .

a) Arată că $GE \parallel (ABC)$.

b) Calculează valoarea raportului $\frac{EG}{AB}$.

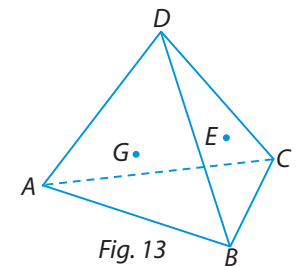


Fig. 13

5 În figura 14 este desenată o piramidă patrulateră regulată $VABCD$ cu vârful V și $VA = AB$. Punctul O este centrul bazei $ABCD$, iar punctul M este mijlocul laturii VC . Verifică dacă următoarele propoziții sunt adevărate sau false:

P_1 : $BC \parallel (VAD)$;

P_2 : $MO \parallel (VAB)$;

P_3 : $BO \parallel (VDC)$;

P_4 : $MO \parallel (VAD)$.

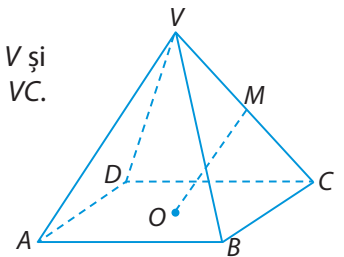


Fig. 14

6 Considerăm un paralelogram $ABCD$, punctul $M \notin (ABC)$ și punctul N , mijlocul segmentului MD . Demonstrează că dreapta MB este paralelă cu planul (NAC) (vezi figura 15).

7 În figura 16 este reprezentat cubul $ABCD A' B' C' D'$. Punctul O este centrul pătratului $ABCD$. Arată că:

a) $BB' \parallel (A'AD)$;

b) $AD' \parallel (BCC')$;

c) $C'O \parallel (AB'D')$.

8 Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată, ca în figura 17.

a) Demonstrează că $AA' \parallel (BCC')$.

b) Este adevărat că $AA' \parallel BC$?

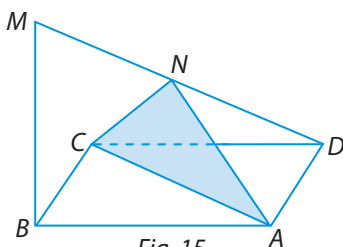


Fig. 15

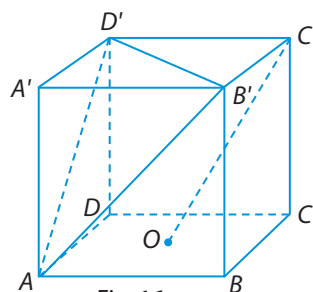


Fig. 16

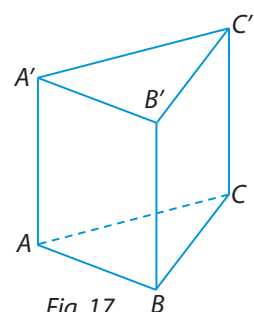


Fig. 17



9 Fie $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$ o prismă hexagonală regulată, cu notațiile din figura 18. Demonstrează că:

- a) $BD \parallel (A'AE)$; b) $A'B \parallel (EDD')$; c) $AF \parallel (BDD')$.

10 În figura 19 sunt desenate două paralelograme, $ABCD$ și $ABMN$, situate în plane diferite. Punctele E și F sunt mijloacele segmentelor BD și AM . Demonstrează că:

- a) $CD \parallel (AMN)$; b) $DN \parallel (AMC)$; c) $EF \parallel (AND)$.

11 Fie $ABCD$ un tetraedru. Planul α intersectează muchiile AB , BC , CD și AD în punctele M , N , P , respectiv Q , astfel încât $MNPQ$ este un paralelogram. Demonstrează că dreptele AC și BD sunt paralele cu planul α (vezi figura 20).

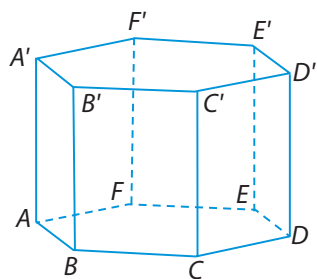


Fig. 18

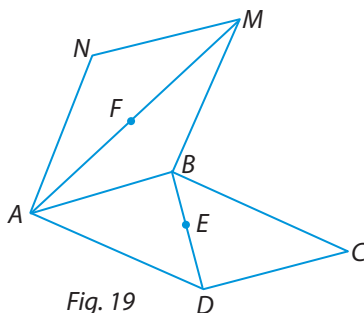


Fig. 19

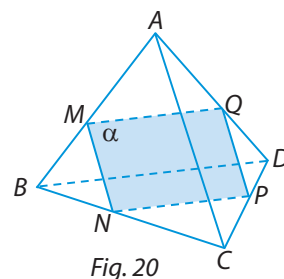


Fig. 20

12 Fie $ABCD$ un tetraedru și E , F proiecțiile punctului A pe bisectoarele unghiurilor ABC , respectiv ABD . Demonstrează că $EF \parallel (BCD)$ (vezi figura 21).

13 În figura 22 este desenat tetraedrul $ABCD$. Punctele E și F sunt simetricele punctului A față de punctele C , respectiv D , iar H și G sunt simetricele punctului B față de punctele C , respectiv D .

- a) Arată că punctele E , F , G și H sunt coplanare.
b) Demonstrează că dreptele AB și CD sunt paralele cu planul $(EFGH)$.

14 În figura 23 este reprezentat paralelipipedul dreptunghic $ABCDEFGH$. Demonstrează că $AG \parallel (CFP)$, unde P este mijlocul laturii AB .

15 În figura 24 este desenată o piramidă patrulateră regulată $VABCD$ cu vârful V . Dacă $a = (VAD) \cap (VBC)$ și $b = (VAB) \cap (VCD)$, demonstrează că:

- a) dreptele a și BC sunt paralele;
b) dreptele a și b sunt perpendiculare.

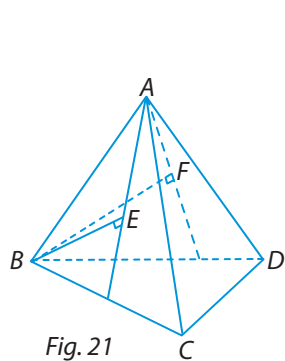


Fig. 21

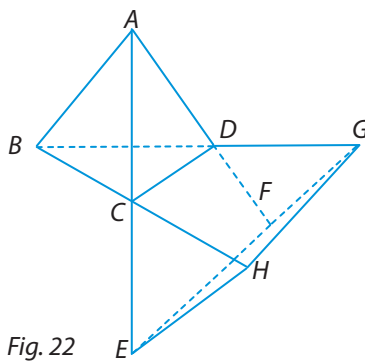


Fig. 22

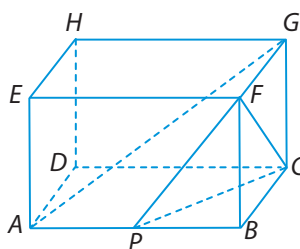


Fig. 23

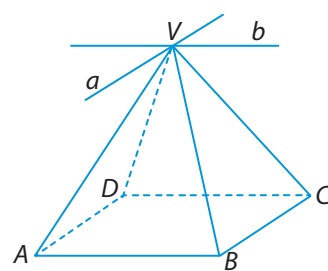


Fig. 24

Reține!

- ♦ O dreaptă poate avea, față de un plan, una dintre următoarele trei poziții:
 - să fie conținută în plan;
 - să aibă un singur punct comun cu planul;
 - să fie paralelă cu planul (nu are niciun punct comun cu planul).
- ♦ O dreaptă paralelă cu un plan este paralelă cu o infinitate de drepte conținute în acel plan, dar nu este paralelă cu toate dreptele din plan.
- ♦ Pentru a demonstra că o dreaptă d este paralelă cu un plan α , $d \not\subset \alpha$, putem arăta că d este paralelă cu o dreaptă conținută în planul α .

LECȚIA 7 Plane paralele

Observăm și descoperim cunoștințe noi

Să privim sala noastră de clasă, care, din punct de vedere geometric, are forma unui paralelipiped dreptunghic:

- peretele din față este un plan, podeaua este alt plan, iar tavanul este un altul;
- planul unui perete se intersectează cu planul podelei de-a lungul unei drepte;
- planul podelei și planul tavanului nu se intersectează; vom spune că ele sunt paralele, așa cum denumim și două drepte coplanare care nu se intersectează.

În spațiu, două plane (diferite) pot fi **concurente** (secante) (figura 1.a)) și atunci intersecția lor este o dreaptă sau **paralele**, dacă nu au niciun punct comun (figura 1.b)).

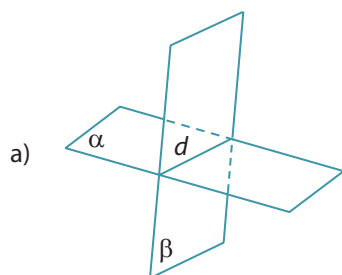
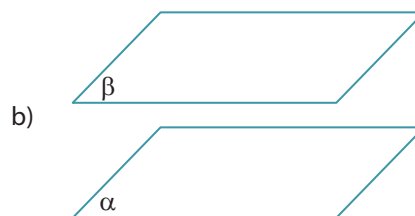


Fig. 1



$$\alpha \cap \beta = d \Rightarrow \alpha \text{ și } \beta \text{ sunt plane concurente}$$

$$\alpha \cap \beta = \emptyset \Rightarrow \alpha \text{ și } \beta \text{ sunt plane paralele}$$

Dacă planele α și β sunt paralele, notăm acest lucru astfel: $\alpha \parallel \beta$.

Cum demonstrăm că două plane sunt paralele?

O metodă ușor de folosit este prezentată în următoarea teoremă.

Teorema 1: Dacă un plan conține două drepte concurente, fiecare dintre ele paralele cu un alt plan, atunci cele două plane sunt paralele.

Demonstrație: Fie α și β două plane și dreptele d_1, d_2 , astfel încât $d_1 \subset \alpha, d_2 \subset \alpha, d_1 \cap d_2 = \{O\}, d_1 \parallel \beta, d_2 \parallel \beta$. Să demonstrăm că planele α și β sunt paralele, adică $\alpha \parallel \beta$ (figura 2).

Presupunem, prin absurd, că planele α și β nu sunt paralele; atunci $\alpha \cap \beta = d$. Cum dreptele d_1, d_2 și d sunt în planul α , iar d_1 și d_2 sunt concurente, rezultă că nu pot fi amândouă paralele cu dreapta d , deoarece s-ar contrazice axioma lui Euclid. Deci, cel puțin una dintre dreptele d_1, d_2 intersectează dreapta d .

Presupunem că $d_1 \cap d = \{P\}$. Atunci $P \in d_1$ și $P \in d \subset \beta$, deci $P \in d_1 \cap \beta$, adică $d_1 \not\parallel \beta$, în contradicție cu ipoteza teoremei. Așadar, presupunerea că planele α și β nu sunt paralele este falsă, ceea ce înseamnă că $\alpha \parallel \beta$.

OBSERVAȚIE: Din teoremă rezultă că, pentru a justifica paralelismul a două plane, α și β , putem scrie pe scurt astfel:

$$\left. \begin{array}{l} d_1, d_2 \subset \alpha, d_1 \cap d_2 = \{O\} \\ a_1, a_2 \subset \beta \\ d_1 \parallel a_1, d_2 \parallel a_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \parallel \beta \text{ (vezi figura 3).}$$

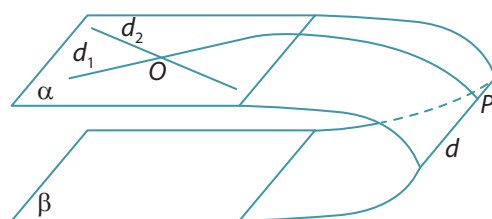


Fig. 2

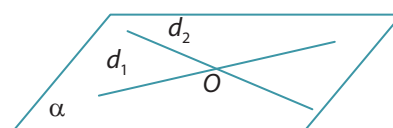


Fig. 3



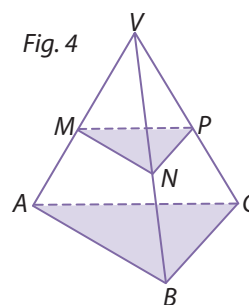
Rezolvăm împreună

1 Fie $VABC$ o piramidă triunghiulară regulată cu vârful V și M, N, P mijloacele muchiilor laterale VA, VB , respectiv VC (vezi figura 4). Demonstrează că planele (MNP) și (ABC) sunt paralele.

Rezolvare:

În triunghiurile VAB și VBC , MN , respectiv NP sunt linii mijlocii, deci $MN \parallel AB$ și $NP \parallel BC$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Avem: } MN, NP \subset (MNP), MN \cap NP = \{N\} \\ AB, BC \subset (ABC) \\ MN \parallel AB, NP \parallel BC \end{array} \right\} \Rightarrow (MNP) \parallel (ABC).$$

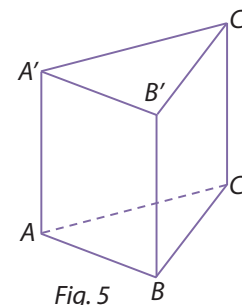


2 În orice prismă regulată, planele bazelor sunt paralele. Să justificăm această proprietate pentru prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ din figura 5, ale cărei baze sunt ABC și $A'B'C'$.

Rezolvare:

Deoarece $ABB'A'$ și $BCC'B'$ sunt dreptunghiuri, $A'B' \parallel AB$ și $B'C' \parallel BC$. Deci:

$$\left. \begin{array}{l} A'B', B'C' \subset (A'B'C'), A'B' \cap B'C' = \{B'\} \\ AB, BC \subset (ABC) \\ A'B' \parallel AB, B'C' \parallel BC \end{array} \right\} \Rightarrow (A'B'C') \parallel (ABC).$$



Observăm și descoperim cunoștințe noi

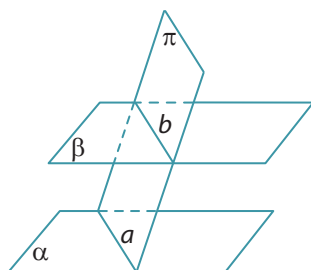
În continuare, prezentăm fără demonstrație câteva rezultate utile și intuitive referitoare la plane paralele.

Propoziția 1: Dacă două plane sunt paralele, atunci orice dreaptă dintr-un plan este paralelă cu celălalt plan.

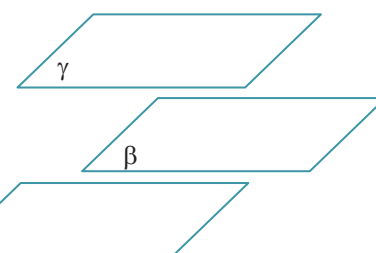
Atenție! Dacă $\alpha \parallel \beta$, atunci orice dreaptă $a \subset \alpha$ este paralelă cu planul β , dar **nu** este paralelă cu orice dreaptă din planul β (am evidențiat acest lucru și în lecția anterioară).

Propoziția 2: Intersecțiile a două plane paralele cu un al treilea plan sunt două drepte paralele.

OBSERVAȚIE: Acest rezultat geometric îl regăsim ori de câte ori tăiem o felie dintr-un tort cu mai multe blaturi: planul lamei cuțitului intersectează planele blaturilor după „drepte” paralele. De aceea, am putea reține propoziția 2 cu denumirea nonformală de „Teorema Tortului”.



$$\alpha \parallel \beta, \pi \cap \alpha = a, \pi \cap \beta = b \Rightarrow a \parallel b$$



$$\alpha \parallel \gamma, \beta \parallel \gamma, \alpha \neq \beta \Rightarrow \alpha \parallel \beta$$

Propoziția 3: Două plane (diferite) paralele cu un al treilea plan sunt paralele între ele.





Aplicăm cunoștințele

Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu vârful V și M, N, P, Q, R și S mijloacele muchiilor VA, AD, AB, BC, VC , respectiv CD (vezi figura 6). Demonstrează că planele (MNP) și (QRS) sunt paralele.

Rezolvare:

Căutăm două drepte din planul (MNP) care să fie respectiv paralele cu două drepte din planul (QRS) .

Folosind proprietățile liniei mijlocii în triunghi, deducem că $MP \parallel VB, VB \parallel RQ$, deci $MP \parallel RQ$ și $NP \parallel BD, BD \parallel SQ$, deci $NP \parallel SQ$. Astfel, avem: $MP \parallel RQ, NP \parallel SQ$, $MP \cap NP = \{P\} \Rightarrow (MNP) \parallel (QRS)$.

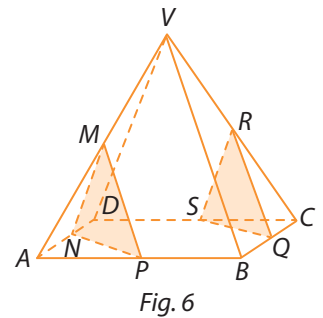


Fig. 6



Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele



1 În figura 7 este desenat cubul $ABCD A'B'C'D'$. Stabilește care dintre următoarele perechi de plane sunt paralele. Pentru perechile de plane concurente, determină dreapta lor de intersecție.

- a)** (ABC) și $(A'B'C')$; **b)** (ADD') și (BCC') ; **c)** (ABB') și $(DD'C')$; **d)** $(A'AC)$ și $(BB'C)$.

2 În figura 8 este reprezentat paralelipipedul dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$. Verifică dacă următoarele propoziții sunt adevărate sau false:

- P_1 : $(A'AD) \parallel (B'BC)$; P_2 : $(A'AC) \parallel (BDD')$; P_3 : $AD' \parallel (B'BC)$; P_4 : $(A'B'C') \cap (ABC) \neq \emptyset$.

3 În figura 9 este desenată o piramidă patrulateră regulată $VABCD$ cu vârful V . Punctele M, N și P sunt mijloacele muchiilor AB, CD , respectiv VC . Demonstrează că planele (MNP) și (VAD) sunt paralele.

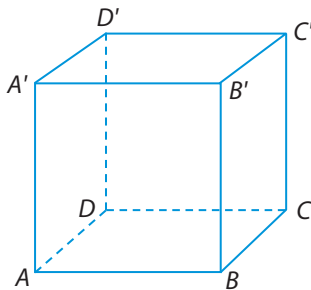


Fig. 7

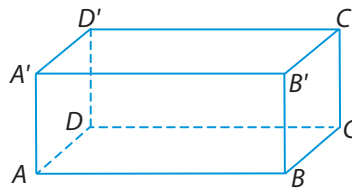


Fig. 8

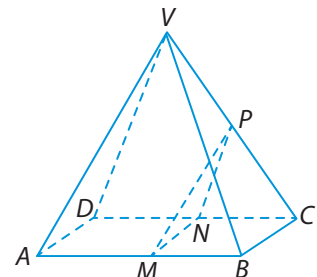


Fig. 9

4 Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată, notată ca în figura 10. Punctele M și N sunt mijloacele segmentelor $A'B$, respectiv $A'C$.

a) Demonstrează că punctele B, M, N, C sunt coplanare.

b) Demonstrează că $BC \parallel (A'B'C')$, $MN \parallel (A'B'C')$, dar planele $(BMNC)$ și $(A'B'C')$ nu sunt totuși paralele. Explică de ce nu se aplică teorema 1 pentru planele $(BMNC)$ și $(A'B'C')$, deși BC și MN sunt paralele cu $(A'B'C')$.

5 În figura 11 este desenată prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$. Punctele M, N, P, Q sunt mijloacele segmentelor $BC', AC', A'C'$, respectiv BC . Demonstrează că punctele M, N, P, Q sunt situate într-un plan paralel cu planul $(A'AB)$.

6 Fie $ABCD A'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic (vezi figura 12). Demonstrează că $(ACB') \parallel (A'C'D)$.

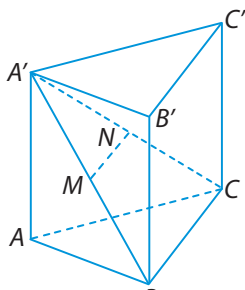


Fig. 10

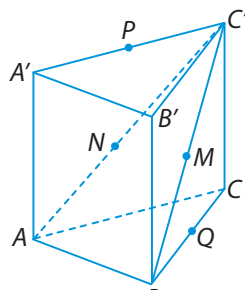


Fig. 11

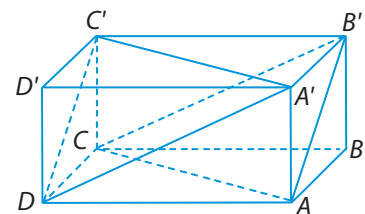


Fig. 12

7 Fie OA, OB, OC trei semidrepte necoplanare, astfel încât $OA = 3$ cm, $OB = 6$ cm și $OC = 0,9$ cm. Se consideră punctele $D \in (OA)$, $OD = 1$ cm, $E \in (OB)$, $OE = 2$ cm și $F \in (OC)$, $OF = 0,3$ cm (vezi figura 13). Demonstrează că $(ABC) \parallel (DEF)$.

8 Fie $ABCD$ un tetraedru și E, F, G centrele de greutate ale triunghiurilor DAB, DBC , respectiv DCA .

a) Demonstrează că planele (EFG) și (ABC) sunt paralele.

b) Calculează raportul perimetrelor și raportul ariilor triunghiurilor EFG și ABC .

9 În figura 14 sunt desenate două paralelograme, $ABCD$ și $ABEF$, situate în plane diferite.

a) Arată că planele (BEC) și (AFD) sunt paralele.

b) Demonstrează că $EM \parallel (AFD)$, pentru orice punct M situat pe dreapta BC .

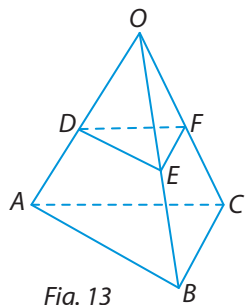


Fig. 13

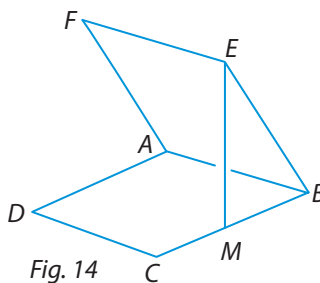


Fig. 14

10 Fie $ABCD A'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic și M, N, P, Q sunt mijloacele muchiilor $AB, BC, B'C'$, respectiv $A'B'$. Demonstrează că:

a) $Q \in (MNP)$;

b) $(MNP) \parallel (A'AC)$;

c) $QN \parallel (A'AC)$.

11 Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu $VA = AB = 4$ cm. Punctele M, N, P sunt mijloacele muchiilor AB, CD , respectiv VD , iar Q este punctul de intersecție dintre planul (MNP) și muchia VA (vezi figura 15).

a) Arată că $(MNP) \parallel (VBC)$.

b) Demonstrează că $MQ \parallel VB$.

c) Calculează aria patrulaterului $MNPQ$.

d) Determină măsura unghiului dintre dreptele AD și MP .

12 În figura 16 este desenat cubul $ABCD A'B'C'D'$. Punctele M, N, P, Q sunt mijloacele laturilor $BC, DC, A'B'$, respectiv $A'D'$.

a) Arată că $(APQ) \parallel (C'MN)$.

b) Demonstrează că, dacă $\{X\} = A'C' \cap PQ$ și $\{Y\} = AC \cap MN$, atunci $AX \parallel C'Y$.

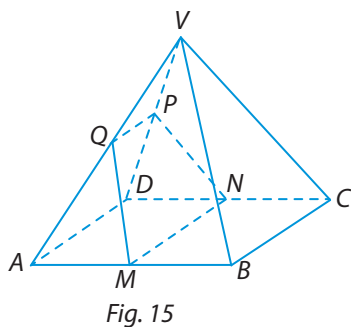


Fig. 15

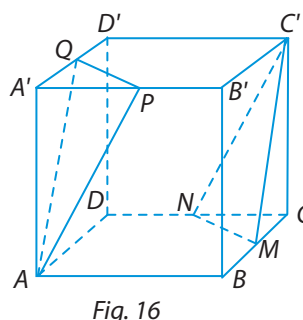


Fig. 16

Reține!

- Două plane care nu au niciun punct comun se numesc plane paralele.
- Dacă planele α și β sunt paralele, orice dreaptă din planul α este paralelă cu planul β , dar nu este paralelă cu orice dreaptă din planul β .
- Pentru a demonstra că două plane, α și β , sunt paralele este suficient să demonstrăm că unul dintre cele două plane, de exemplu α , conține două drepte concurente, fiecare dintre ele paralele cu planul β (sau cu două drepte din planul β).

**Din oficiu: 1 punct****AUTOEVALUARE****Timp de lucru: 40 de minute**

1 Fie $ABCD A'B'C'D'$ un cub. Care dintre următoarele plane este paralel cu planul (ABC) ? **2 puncte**
a) $(A'D'D)$; **b)** $(A'B'C')$; **c)** $(DA'C')$; **d)** (BCC') .

2 Alege litera corespunzătoare răspunsului corect.
 Fie α și β două plane paralele. Propoziția „Orice dreaptă din planul α este paralelă cu planul β ” este: **2 puncte**

a) adevărată; **b)** falsă.

3 În figura 17 este desenată prisma hexagonală regulată $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$. Găsește toate perechile de plane paralele determinate de fețe ale prisme. **2 puncte**

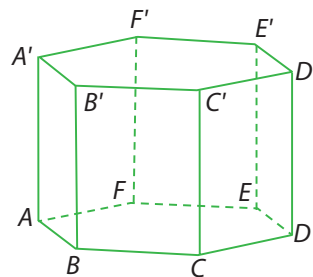


Fig. 17

4 Fie $VABC$ un tetraedru și punctele $M \in (VA)$, $N \in (VB)$, $P \in (VC)$, astfel încât $VM = 2$ cm, $MA = 3$ cm, $VN = 4$ cm, $VB = 10$ cm, $VC = 15$ cm, $PC = 9$ cm. Demonstrează că planele (MNP) și (ABC) sunt paralele. **2 puncte**

5 Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată, O centrul bazei $ABCD$, M și N mijloacele muchiilor BC , respectiv VD . **1 punct**

a) Demonstrează că $(MON) \parallel (VAB)$.

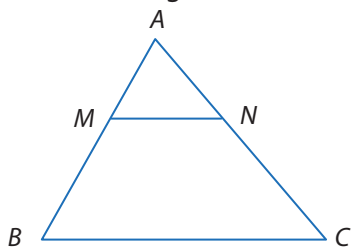
b) Stabilește poziția dreptei MN față de planul (VAB) .

LECȚIA 8

Aplicații: secțiuni paralele cu baza în corpurile geometrice studiate; trunchiul de piramidă și trunchiul de con circular drept (descriere și reprezentare)

**Ne amintim**

În clasa a VII-a, am învățat teorema fundamentală a asemănării (prescurtat TFA): o paralelă la una dintre laturile unui triunghi determină împreună cu celelalte două laturi un triunghi asemenea cu cel dat, astfel:



$$MN \parallel BC, M \in (AB), N \in (AC) \Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC}.$$

Vom extinde acum acest rezultat în spațiu.

**Observăm și descoperim cunoștințe noi**

Considerăm o piramidă triunghiulară $VABC$ cu vârful V . Un plan α , paralel cu baza ABC , intersectează muchiile laterale VA , VB și VC în punctele A' , B' , C' (vezi figura 1). Observăm că $\alpha = (A'B'C')$.

Deoarece $(A'B'C') \parallel (ABC)$, $(VAB) \cap (ABC) = AB$ și $(VAB) \cap (A'B'C') = A'B'$, rezultă că $A'B' \parallel AB$ (Teorema Tortului).

Conform teoremei fundamentale a asemănării, aplicată în triunghiul VAB , avem $\triangle VA'B' \sim \triangle VAB$, deci $\frac{VA'}{VA} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{VB'}{VB}$. Analog, obținem $\triangle VB'C' \sim \triangle VBC$ și

$$\triangle VA'C' \sim \triangle VAC. \text{ Prin urmare, putem scrie } \frac{VA'}{VA} = \frac{VB'}{VB} = \frac{VC'}{VC} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}.$$

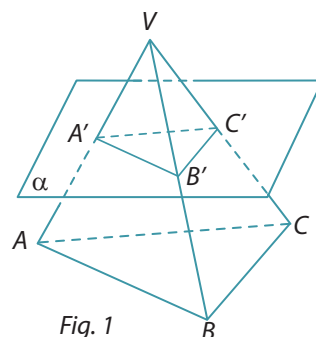


Fig. 1

Propoziție: Dacă secționăm o piramidă cu un plan paralel cu baza sa, atunci obținem o piramidă mică cu același vârf ca piramida inițială și elementele corespunzătoare proporționale cu cele ale piramidei inițiale.

Trunchiul de piramidă este corpul rămas după secționarea unei piramide cu un plan paralel cu baza sa și îndepărtarea piramidei mici astfel obținute (vezi figura 2).

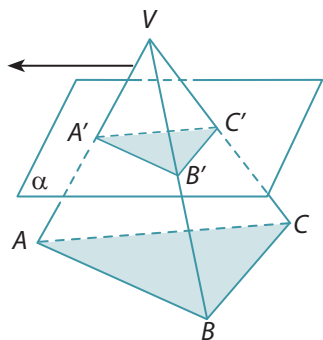
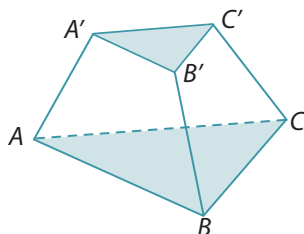


Fig. 2



trunchiul de piramidă $ABCA'B'C'$



În funcție de felul piramidei din care provine trunchiul de piramidă, acesta se numește: trunchi de piramidă triunghiulară, trunchi de piramidă patrulateră etc.

Dacă piramida inițială este regulată, atunci trunchiul obținut din aceasta se va numi trunchi de piramidă (triunghiulară, patrulateră etc.) regulată.

OBSERVAȚIE: Pentru a desena un trunchi de piramidă, este bine să desenăm mai întâi piramida din care provine trunchiul și apoi să ștergem liniile ajutătoare.

Elementele unui trunchi de piramidă

Să considerăm, de exemplu, un trunchi de piramidă triunghiulară $ABCA'B'C'$ (vezi figura 3).

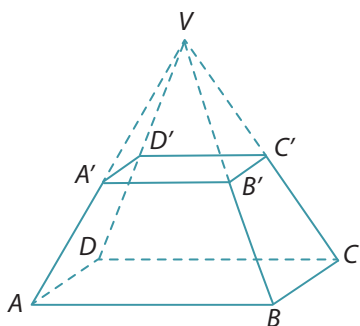
Bazele trunchiului de piramidă sunt poligoane asemenea (au laturile proporționale și unghiurile respectiv congruente). În cazul nostru, **baza mare** este triunghiul ABC , iar **baza mică** este triunghiul $A'B'C'$; $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Fețele laterale ale unui trunchi de piramidă sunt trapeze. Pentru trunchiul de piramidă din figura 3, fețele laterale sunt trapezele $ABB'A'$, $BCC'B'$ și $ACC'A'$.

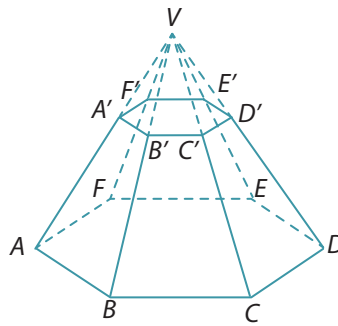
Bazele (mare și mică) și fețele laterale ale unui trunchi de piramidă se numesc, împreună, fețele trunchiului. Dacă trunchiul este trunchi de piramidă regulată, atunci bazele sunt poligoane regulate, iar fețele laterale sunt trapeze isoscele.

Pentru trunchiul din figura 3, **muchiile laterale** sunt: AA' , BB' , CC' (acestea sunt egale dacă avem trunchi de piramidă regulată), **muchiile bazei mari** sunt: AB , BC , CA , iar **muchiile bazei mici** sunt: $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$.

Desenează și tu, pe caiet, alte câteva trunchiuri de piramidă (desenând mai întâi piramida), după modelele următoare:



$ABCD A'B'C'D'$ – trunchi de piramidă patrulateră regulată



$ABCDEF A'B'C'D'E'F'$ – trunchi de piramidă hexagonală regulată

OBSERVAȚIE: Prin secționarea unei piramide cu un plan paralel cu baza sa se obține o piramidă „asemenea” cu piramida dată (și un trunchi de piramidă). Observați analogia cu teorema fundamentală a asemănării, amintită la începutul lecției (rezultat din geometria plană).



La fel ca la piramidă, dacă secționăm un con circular drept cu un plan paralel cu baza conului, obținem un con mic „asemenea” cu cel dat. Corpul rămas prin îndepărtarea conului mic se numește **trunchi de con circular drept** (vezi figura 4).

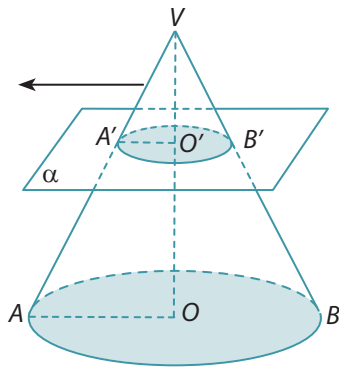
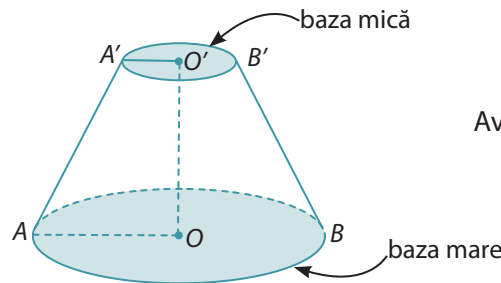


Fig. 4



Avem: $\frac{VA'}{VA} = \frac{VB'}{VB} = \frac{O'A'}{OA}$.

Elemente ale unui trunchi de con circular drept

Bazele trunchiului: baza mare, baza mică sunt discuri cu razele $R = OA$, $r = O'A'$ (conform figurii 4).

Generatoarea trunchiului, din figura 4, este, de exemplu, $G = AA' = VA - VA'$ (VA, VA' sunt generatoare ale conului mare, respectiv conului mic și $A' \in VA$); avem și $G = BB'$ etc.

Suprafața laterală a trunchiului este suprafața laterală a conului dat, din care îndepărtăm suprafața laterală a conului mic obținut prin secționarea cu planul paralel cu baza conului dat.

Aplicăm cunoștințele

1 Se secționează o piramidă triunghiulară regulată $VABC$, având vârful V , $VA = 12$ cm și $AB = 6$ cm, cu un plan paralel cu baza, care intersectează muchiile VA, VB, VC în punctele $A', B',$ respectiv C' (figura 5). Calculează suma lungimilor tuturor muchiilor trunchiului de piramidă $ABCA'B'C'$, știind că $\frac{VA'}{VA} = \frac{1}{3}$.

Rezolvare:

Deoarece $(A'B'C') \parallel (ABC)$, rezultă că $\frac{VA'}{VA} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{1}{3}$ sau $\frac{VA'}{12} = \frac{A'B'}{6} = \frac{1}{3}$ și obținem

$VA' = 4$ cm și $A'B' = 2$ cm. Așadar, $AA' = VA - VA' = 12 - 4$ cm = 8 cm și suma lungimilor muchiilor trunchiului de piramidă este $S = 3 \cdot AB + 3 \cdot A'B' + 3 \cdot AA' = 48$ cm.

2 Fie un trunchi de con circular drept cu raza bazei mari $R = 12$ cm, raza bazei mici $r = 3$ cm și generatoarea $G = 9$ cm. Determină lungimea generatoarei conului circular drept din care provine trunchiul de con (figura 6).

Rezolvare: Cu notațiile din figură, avem $\frac{VA'}{VA} = \frac{A'O'}{AO}$ sau $\frac{VA'}{VA' + 9} = \frac{3}{12}$, de unde deducem că $4VA' = VA' + 9$, deci $VA' = 3$ cm, $VA = VA' + AA' = 12$ cm. Așadar, generatoarea conului circular drept din care provine trunchiul de con are lungimea de 12 cm.

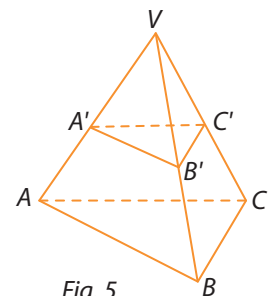


Fig. 5

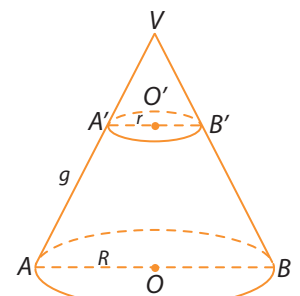


Fig. 6

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1 Fie $ABCA'B'C'$ un trunchi de piramidă triunghiulară regulată, cu $AB = 8$ m, $A'B' = 2$ m și $AA' = 5$ m (vezi figura 3).
a) Determină lungimea muchiei laterale a piramidei din care provine trunchiul.
b) Calculează măsura unghiului dintre dreptele AB și $B'C'$.

2 Se consideră piramida triunghiulară regulată $VABC$ cu vârful V , $AB = 12$ cm, $VA = 15$ cm și punctul $M \in (VA)$, astfel încât $AM = 10$ cm. Planul paralel cu planul (ABC) , dus prin punctul M , intersectează muchiile VB și VC în punctele N , respectiv P (vezi figura 7). Calculează:

- aria triunghiului MNP ;
- suma tuturor muchiilor trunchiului de piramidă $ABCMNP$.

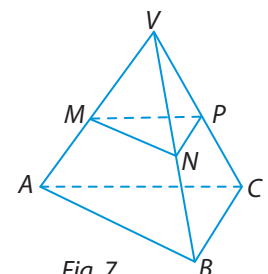


Fig. 7

3 Fie $ABCD A'B'C'D'$ un trunchi de piramidă patrulateră regulată, cu $AB = 24$ cm, $A'B' = 6$ cm și $AA' = 15$ cm (vezi figura 8). Determină:

- suma lungimilor muchiilor trunchiului;
- aria unei fețe laterale a piramidei din care provine trunchiul;
- măsura unghiului dintre dreptele $A'C'$ și BC .

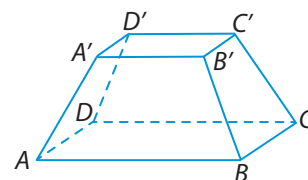


Fig. 8

4 Fie $ABCA'B'C'$ un trunchi de piramidă triunghiulară regulată, cu $AB = 8$ cm, $A'B' = 2$ cm și suma ariilor fețelor laterale de 60 cm².

- Arată că $AA' = 5$ cm.
- Calculează suma lungimilor muchiilor trunchiului $ABCA'B'C'$.
- Determină lungimea muchiei laterale a piramidei din care provine trunchiul.

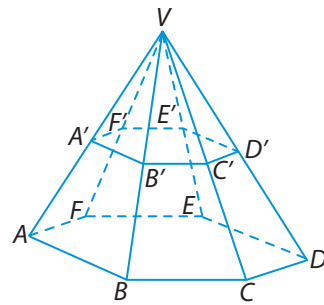


Fig. 9

5 Fie $VABCDEF$ o piramidă hexagonală regulată cu vârful V , $AB = 12$ cm și $VA = 30$ cm. Prin punctul A' , situat pe muchia VA , $VA' = 0,5AA'$, se duce planul α , paralel cu planul (ABC) , care determină trunchiul de piramidă hexagonală regulată $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$ (vezi figura 9). Calculează suma lungimilor muchiilor trunchiului $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$.

6 Fie un con circular drept cu vârful V , raza bazei $OA = 6$ dm și generatoarea $VA = 18$ dm. Se secționează conul cu un plan paralel cu baza, obținându-se astfel un trunchi de con cu generatoarea $AA' = 12$ dm. Determină lungimea razei bazei mici a trunchiului de con (vezi figura 10).

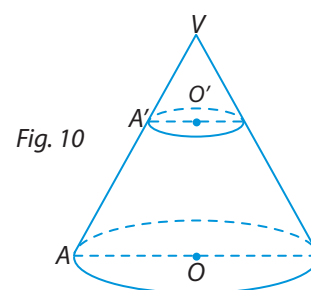


Fig. 10

7 Un trunchi de con circular drept are raza bazei mici $r = 3$ cm, raza bazei mari $R = 12$ cm și generatoarea $G = 27$ cm. Calculează lungimea generatoarei conului din care provine trunchiul.

Reține!

- Dacă secționăm o piramidă cu un plan paralel cu baza și îndepărtăm piramida mică astfel obținută, rămâne un trunchi de piramidă. Piramida mică este „asemenea” cu piramida inițială; cu notațiile din figura 2, avem:

$$\frac{VA'}{VA} = \frac{VB'}{VB} = \frac{VC'}{VC} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}.$$

- Dacă secționăm un con circular drept cu un plan paralel cu baza și îndepărtăm conul mic obținut, rămâne un trunchi de con circular drept. Conul mic este „asemenea” cu conul inițial; cu notațiile din figura 4, avem:

$$\frac{VA'}{VA} = \frac{O'A'}{OA} = \frac{VO'}{VO}.$$

Din oficiu: 1 punct

AUTOEVALUARE

Timp de lucru: 40 de minute

La problemele 1, 2 și 5, alege litera corespunzătoare răspunsului corect.

1 Numărul tuturor muchiilor unui trunchi de piramidă patrulateră regulată este egal cu: **2 puncte**

- 4;
- 5;
- 8;
- 12.

2 Un con circular drept are raza bazei de 20 cm. Se secționează conul cu un plan paralel cu planul bazei, dus prin mijlocul unei generatoare a conului. Aria bazei mici a trunchiului de con astfel format este egală cu: **2 puncte**

- 10 cm²;
- 10π cm²;
- 20π cm²;
- 100π cm².

3 Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ are latura bazei mari $AB = 12$ cm, latura bazei mici $A'B' = 6$ cm și muchia laterală $AA' = 5$ cm. Determină aria unei fețe laterale ale trunchiului. **2 puncte**

4 Un trunchi de con circular drept are raza bazei mari de 18 cm, raza bazei mici de 6 cm și generatoarea de 40 cm. Determină lungimea generatoarei conului circular drept din care provine trunchiul de con. **2 puncte**

5 Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu vârful V . Punctele M, N, P, Q sunt simetricele punctului V față de vârfurile A, B, C , respectiv D . Afirmația: „Poliedrul $ABCD MNPQ$ este trunchi de piramidă patrulateră regulată.” este: **1 punct**

- adevărată;
- falsă.



LECȚIA 9

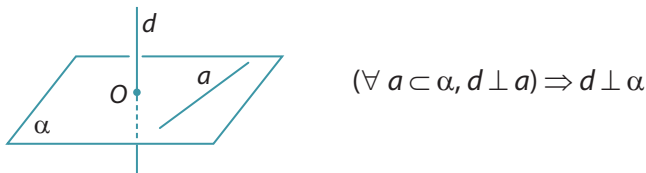
Perpendicularitate: drepte perpendiculare, dreaptă perpendiculară pe un plan

Observăm și descoperim cunoștințe noi

Să observăm ușa rotativă din imaginea alăturată. Când ușa se rotește, una dintre marginile inferioare ale ușii trece prin toate pozițiile dreptelor din planul podelei, deci axa (dreapta) AO a ușii este perpendiculară pe toate dreptele din planul podelei (planul α).

DEFINIȚIE: O dreaptă este perpendiculară pe un plan dacă este perpendiculară pe orice dreaptă din acel plan.

Notăm $d \perp \alpha$: dreapta d este perpendiculară pe planul α . Avem:



Cum demonstrăm că o dreaptă este perpendiculară pe un plan?

Definiția pare greu de folosit direct în probleme sau în practică. Dacă ne uităm, în schimb, la imaginea alăturată observăm că, pentru ca bradul să stea drept, adică trunchiul să fie perpendicular pe planul podelei, este suficient ca acest trunchi să fie perpendicular pe cele două drepte concurente ale suportului din figură (drepte din planul podelei).

Să demonstrăm că această observație intuitivă este într-adevăr corectă.

Teorema 1: Dacă o dreaptă este perpendiculară pe două drepte concurente dintr-un plan, atunci aceasta este perpendiculară pe plan.

Demonstrație: Fie dreapta d perpendiculară pe dreptele concurente a și b , incluse în planul α . Deoarece unghiul a două drepte este unghiul format de paralele duse printr-un punct oarecare la acestea, putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că dreptele a și b trec prin punctul P în care dreapta d intersectează planul α (vezi figura 1).

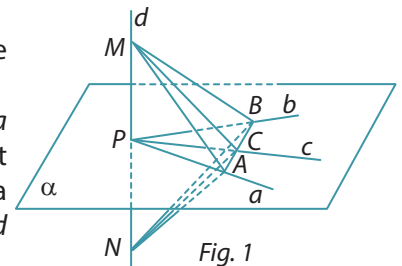


Fig. 1

Conform definiției, pentru a concluziona că dreapta d este perpendiculară pe planul α , trebuie să demonstrăm că d este perpendiculară pe o dreaptă oarecare c inclusă în α , diferită de a și b . Iarăși, putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că dreapta c trece prin punctul P (vezi figura 1).

Fie M și N două puncte situate pe dreapta d , astfel încât P este situat între M și N și $PM = PN$.

În triunghiul AMN , AP este înălțime și mediană, deci $AM = AN$. Analog, în triunghiul BMN , BP este înălțime și mediană, deci $BM = BN$.

Din relațiile $AM = AN$, $BM = BN$ și $AB = AB$ rezultă că $\triangle MAB \equiv \triangle NAB$, deci $\angle MAB = \angle NAB$.

Fie C punctul de intersecție a dreptelor c și AB . Atunci, din relațiile $MA = NA$, $\angle MAC = \angle NAC$ și $AC = AC$ rezultă că $\triangle MAC \equiv \triangle NAC$, deci $MC = NC$.

În sfârșit, din relațiile $MC = NC$ și $MP = NP$ deducem că $MN \perp PC$ sau $d \perp c$, adică tocmai ceea ce trebuia demonstrat.

EXEMPLU: În figura 2 este reprezentat paralelipipedul dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$.

Deoarece $A'ABB'$ și $A'ADD'$ sunt dreptunghiuri, rezultă că $AA' \perp AB$ și $AA' \perp AD$. Cum $AB \cap AD = \{A\}$, rezultă, conform teoremei 1, că $AA' \perp (ABC)$.

Putem reține că în orice paralelipiped dreptunghic oricare dintre muchii este perpendiculară pe fețele cu care este secantă (concurentă).

OBSERVAȚIE: Teorema 1 o putem reține cu denumirea nonformală de „Teorema Bradului”.

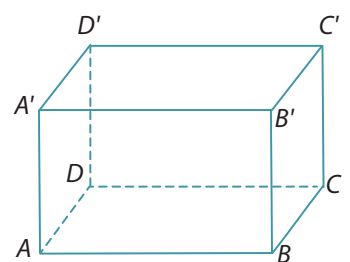
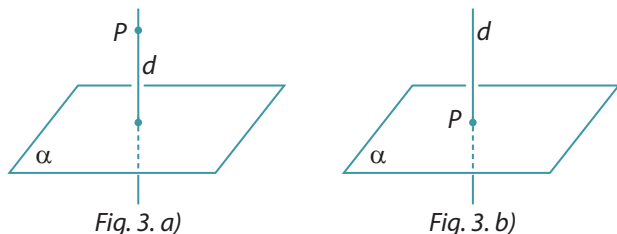


Fig. 2

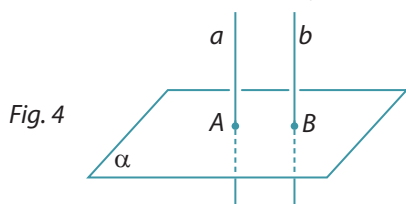
În continuare prezentăm, fără demonstrație, câteva rezultate utile și intuitive referitoare la lecția noastră.

Propoziția 1: Fiind dat un plan α și un punct P (interior sau exterior planului α), există o singură perpendiculară pe planul α care trece prin punctul P (figura 3).



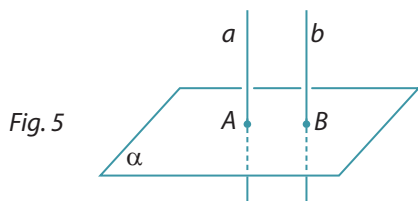
Există o singură dreaptă d , astfel încât $d \perp \alpha$, $P \in d$.

Propoziția 2: Dacă o dreaptă este perpendiculară pe un plan, atunci orice paralelă la acea dreaptă este perpendiculară pe planul respectiv (figura 4).



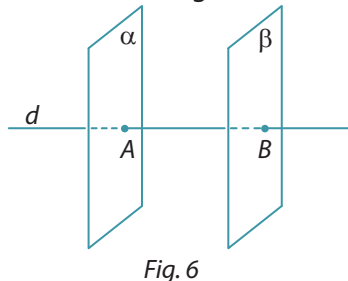
$$\left. \begin{array}{l} a \perp \alpha \\ a \parallel b \end{array} \right\} \Rightarrow b \perp \alpha$$

Propoziția 3: Două drepte (diferite) perpendiculare pe un plan sunt paralele (figura 5).



$$\left. \begin{array}{l} a \perp \alpha \\ b \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel b$$

Propoziția 4: Dacă două plane sunt paralele și o dreaptă este perpendiculară pe unul dintre ele, atunci este perpendiculară și pe celălalt și reciproc: dacă două plane (diferite) sunt perpendiculare pe o dreaptă, atunci ele sunt paralele între ele (figura 6).



$$\begin{array}{l} \text{I. } \left. \begin{array}{l} \alpha \parallel \beta \\ d \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow d \perp \beta \\ \text{II. } \left. \begin{array}{l} d \perp \alpha \\ d \perp \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \parallel \beta \end{array}$$



Aplicăm cunoștințele

1 Fie tetraedrul $ABCD$ cu $AB = 12$ cm, $BC = 5$ cm, $BD = 16$ cm, $AC = 13$ cm, $AD = 20$ cm (figura 7).

a) Demonstrează că $AB \perp (BCD)$.

b) Determină măsura unghiului dintre dreptele AB și CD .

Rezolvare:

a) Cum gândim? Pentru a folosi teorema 1 („Teorema Bradului”), căutăm două drepte concurente din planul (BCD) care să fie perpendiculare pe AB . Având lungimile segmentelor AB , BC , AC , BD și AD , încercăm să aplicăm reciproca teoremei lui Pitagora în triunghiurile ABC și ABD .

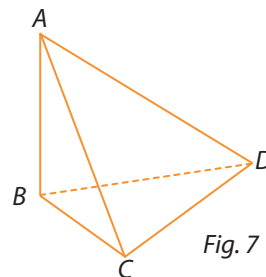
Cum scriem?

$$\triangle ABC: AB^2 + BC^2 = 12^2 + 5^2 = 13^2 = AC^2 \Rightarrow AB \perp BC;$$

$$\triangle ABD: AB^2 + BD^2 = 12^2 + 16^2 = 20^2 = AD^2 \Rightarrow AB \perp BD;$$

$$AB \perp BC, AB \perp BD, BC \cap BD = \{B\} \Rightarrow AB \perp (BCD).$$

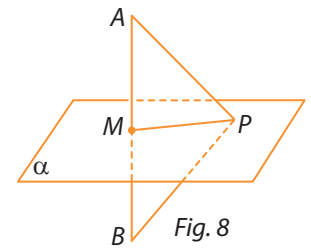
b) Folosim rezultatul de la punctul a) și scriem astfel: $AB \perp (BCD)$, $CD \subset (BCD) \Rightarrow AB \perp CD \Rightarrow \angle(AB, CD) = 90^\circ$.



2 Fie un segment AB și un plan α , astfel încât $AB \perp \alpha$ și M , mijlocul segmentului AB , aparține planului α . Demonstrează că orice punct din planul α este egal depărtat de extremitățile segmentului AB (figura 8).

Rezolvare:

Fie P un punct oarecare din planul α . Dacă $P = M$, atunci, conform ipotezei, $PA = PB$ ($MA = MB$). Presupunem că $P \neq M$. Deoarece $AB \perp \alpha$ și $PM \subset \alpha$, rezultă că $AB \perp PM$. În triunghiul PAB , PM este înălțime și mediană, deci $PA = PB$, adică ceea ce trebuia demonstrat.

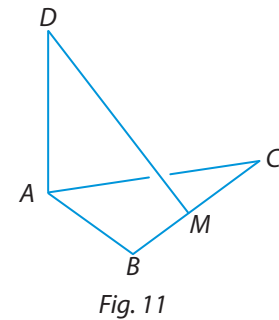
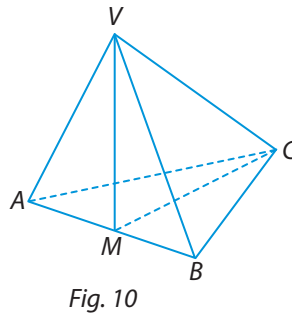
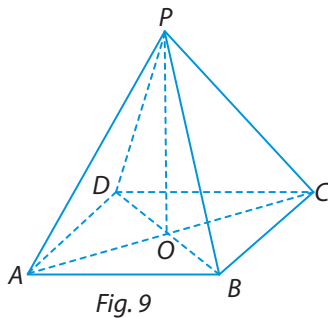


OBSERVAȚIE: Planul α se numește *planul mediator* al segmentului AB ; planul mediator este analogul din spațiu al mediatoarei unui segment în plan.

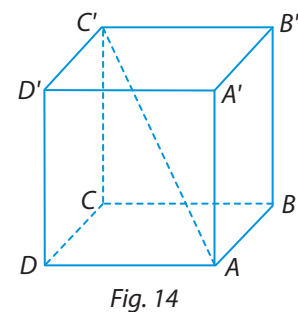
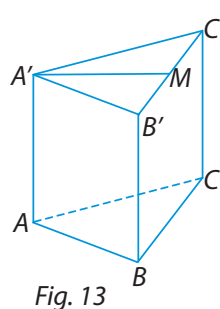
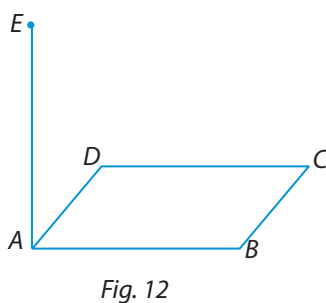


Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

- 1** Fie tetraedrul $ABCD$ cu $\angle BAD = 60^\circ$, $\angle BDA = 30^\circ$, $\angle BAC = \angle BCA = 45^\circ$ (figura 7). Demonstrează că dreapta AB este perpendiculară pe planul (BCD) .
- 2** În figura 9 este reprezentat paralelogramul $ABCD$, unde punctul O reprezintă intersecția diagonalelor sale. Fie P un punct exterior planului (ABC) , astfel încât $PA = PC$ și $PB = PD$. Demonstrează că dreapta PO este perpendiculară pe planul (ABC) .
- 3** Fie $VABC$ o piramidă triunghiulară regulată cu vârful V și M mijlocul laturii AB (figura 10).
 - a)** Demonstrează că $AB \perp (VMC)$.
 - b)** Determină măsura unghiului dintre dreptele VC și AB .
- 4** Se consideră tetraedrul $ABCD$ cu $AB = 15$ dm, $BC = 8$ dm, $AC = 17$ dm, $BD = 20$ dm, $AD = 25$ dm. Arată că:
 - a)** $AB \perp (BCD)$;
 - b)** $AB \perp CD$.
- 5** Pe planul triunghiului echilateral ABC , cu $AB = 6$ cm, se ridică perpendiculara DA , $D \notin (ABC)$, $DA = 8$ cm. Fie M mijlocul lui BC (figura 11). Calculează lungimile segmentelor DB , DC și DM .
- 6** Se consideră triunghiul dreptunghic ABC cu catetele $AB = 15$ m, $AC = 20$ m și înălțimea AD , $D \in BC$. Fie $EA \perp (ABC)$, $EA = 5$ m. Determină lungimea segmentului DE .



- 7** Fie dreptunghiul $ABCD$ cu $AB = 16$ cm, $BC = 12$ cm și $EA \perp (ABC)$, $EA = 15$ cm (figura 12). Determină:
 - a)** lungimile segmentelor EB și EC ;
 - b)** măsura unghiului dintre dreptele EA și BD .
- 8** Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC și $DO \perp (ABC)$, $D \notin (ABC)$. Demonstrează că $DA = DB = DC$.
- 9** În figura 13 este reprezentată prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$. Punctul M este mijlocul laturii $B'C'$.
 - a)** Arată că $BB' \perp (A'B'C')$.
 - b)** Demonstrează că $A'M \perp (BCC')$.
- 10** Calculează lungimea diagonalei AC' a cubului $ABCA'B'C'D'$ cu $AB = 8$ cm (figura 14).



11 Fie $ABCD A'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic cu $AB = 3$ cm, $AD = 12$ cm și $AA' = 4$ cm (figura 15). Calculează lungimea diagonalei AC' .

12 În figura 16 este reprezentată piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu vârful V . Punctul P este piciorul perpendicularei din A pe VB . Demonstrează că:

a) triunghiurile VPA și VPC sunt congruente;

b) $VB \perp (APC)$;

c) $VB \perp AC$.

13 În figura 17, MA și NC sunt perpendiculare pe planul triunghiului echilateral ABC , $AM = 4$ cm, $NC = 8$ cm, $MB = 5$ cm. Determină lungimea segmentului MN .

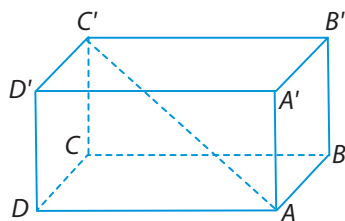


Fig. 15

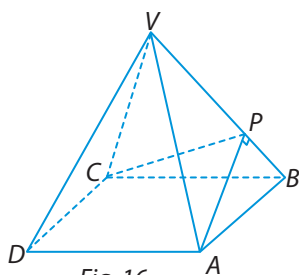


Fig. 16

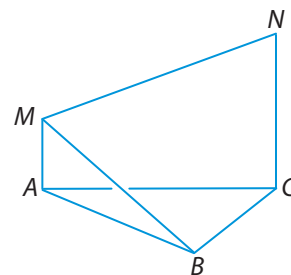


Fig. 17

14 Se consideră un tetraedru regulat cu $AB = 6$ cm și punctele M, N, P, Q situate pe laturile AB, BC, CD , respectiv DA , astfel încât $AM = BN = CP = DQ = 2$ cm. Fie O mijlocul segmentului MP (figura 18). Demonstrează că $MP \perp (NOQ)$ (se consideră cunoscut faptul că punctele N, O, Q sunt necoliniare).

15 Fie cubul $ABCD A'B'C'D'$ (figura 19). Demonstrează că:

a) $A'C \perp BD$;

b) $A'C \perp (C'BD)$;

c) $(C'BD) \parallel (AB'D')$.

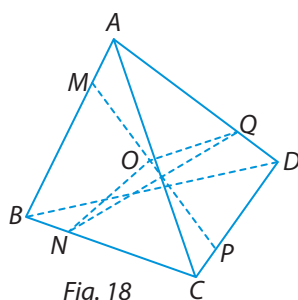


Fig. 18

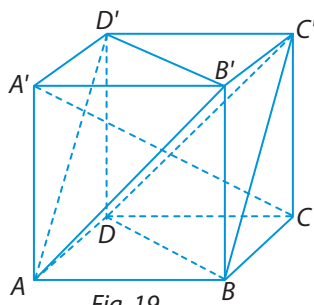


Fig. 19

Reține!

- ♦ O dreaptă este perpendiculară pe un plan dacă este perpendiculară pe orice dreaptă din acel plan.
- ♦ Dacă o dreaptă este perpendiculară pe două drepte concurente dintr-un plan, atunci aceasta este perpendiculară pe planul considerat.

Din oficiu: 1 punct

1 Fie $ABCD A'B'C'D'$ un cub. Verifică dacă următoarele propoziții sunt adevărate sau false: **2 puncte**
 $P_1: AA' \perp (ABC)$; $P_2: B'D' \perp (C'DC)$; $P_3: BC' \perp (ABC)$; $P_4: AC \perp (DBB')$.

2 Fie $ABCD A'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile $AB = 8$ m, $AD = 6$ m, $AA' = 10$ m. Verifică dacă următoarele propoziții sunt adevărate sau false: **2 puncte**

$P_1: ABB'A'$ este pătrat;

$P_2: ABC'D'$ este dreptunghi;

$P_3: ACC'A'$ este pătrat;

$P_4: AD'C'$ este triunghi dreptunghic.

3 Alege litera corespunzătoare răspunsului corect.

Fie $ABCD A'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile $AB = 40$ cm, $AD = 20$ cm și $AA' = 5$ cm. Lungimea diagonalei AC' este egală cu: **2 puncte**

a) 45 cm;

b) 50 cm;

c) 60 cm;

d) 72 cm.

4 În figura 20 este desenat un tetraedru regulat $ABCD$ cu $AB = 6$ cm. Punctul M este mijlocul laturii CD . **2 puncte**

a) Arată că $CD \perp (ABM)$.

b) Determină măsura unghiului dintre dreptele AB și CD .

c) Calculează distanța de la punctul M la latura AB .

5 Fie $VABC$ un tetraedru, astfel încât $\angle AVB = \angle BVC = \angle CVA = 90^\circ$ și $VH \perp (ABC)$, $H \in (ABC)$. Demonstrează că punctul H este ortocentrul triunghiului ABC . **1 punct**

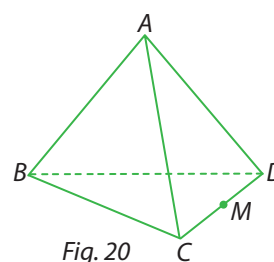


Fig. 20

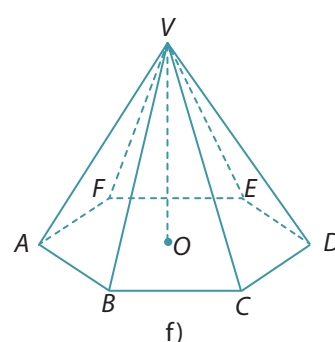
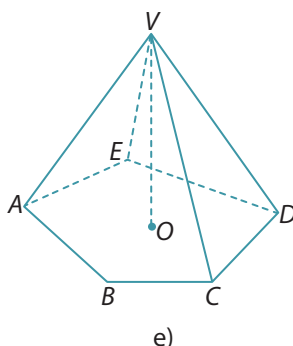
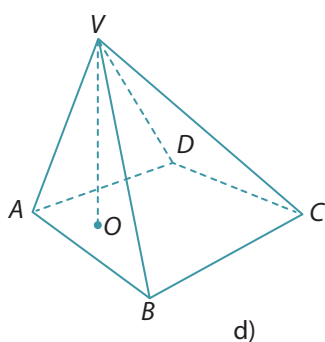
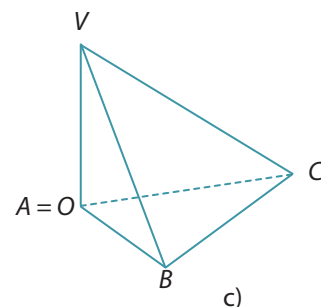
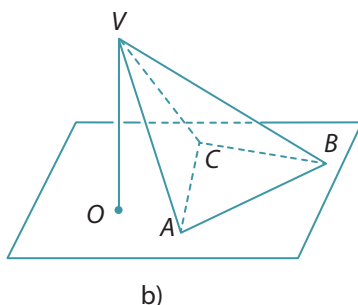
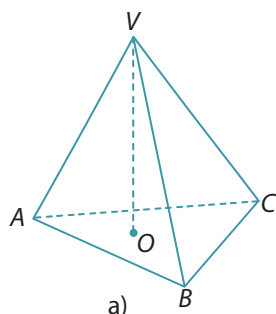


LECȚIA 10 Aplicații: înălțimea unei piramide, înălțimea unui con circular drept

Observăm și descoperim cunoștințe noi

DEFINIȚIE: Perpendiculara din vârful unei piramide pe planul bazei sale se numește **înălțimea piramidei**.

EXEMPLE:



$VO \perp (ABC)$, $O \in (ABC) \Rightarrow VO$ este înălțimea piramidei $VABC$ (a), b), c)) sau $VABCD$ (d)) sau $VABCDE$ (e)) sau $VABCDEF$ (f)) etc. Punctul O se numește piciorul înălțimii.

TEOREMA 1: Într-o piramidă regulată, piciorul înălțimii este centrul bazei (centrul cercului circumscris bazei, care este poligon regulat).

Demonstrație: Vom face demonstrația doar pentru o piramidă triunghiulară regulată $VABC$ cu vârful V (justificările ce vor fi prezentate rămân valabile și pentru celelalte tipuri de piramide regulate).

Fie $VO \perp (ABC)$, $O \in (ABC)$ (figura 1). Deoarece $VO \perp (ABC)$ și OA, OB, OC sunt drepte incluse în planul (ABC) , rezultă că $\angle VOA = \angle VOB = \angle VOC = 90^\circ$. Din relațiile $VA = VB = VC$ ($VABC$ este piramidă regulată), $\angle VOA = \angle VOB = \angle VOC = 90^\circ$ și $VO = VO = VO$ deducem că $\triangle VOA \equiv \triangle VOB \equiv \triangle VOC$ (IC), deci $OA = OB = OC$, ceea ce înseamnă că punctul O este centrul cercului circumscris triunghiului (echilateral) ABC .

OBSERVAȚIE: Se poate demonstra (ușor) că o piramidă cu baza poligon regulat, pentru care piciorul înălțimii este centrul bazei, este, de fapt, o piramidă regulată.

DEFINIȚIE: Perpendiculara din vârful unui con circular drept pe planul bazei sale se numește **înălțimea conului**.

EXEMPLU: În figura alăturată este reprezentat un con circular drept, cu înălțimea VO .

Într-un con circular drept, piciorul înălțimii (punctul în care perpendiculara din vârf pe bază intersectează planul bazei) este chiar centrul bazei.

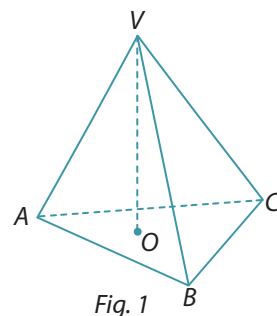
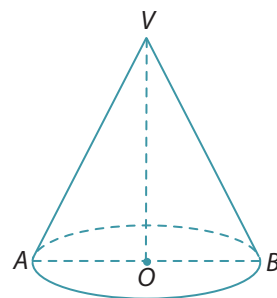


Fig. 1





Aplicăm cunoștințele

1 Calculează lungimea înălțimii unei piramide triunghiulare regulate $VABC$ cu vârful V și $VA = AB = a$ cm (tetraedru regulat cu muchia a cm).

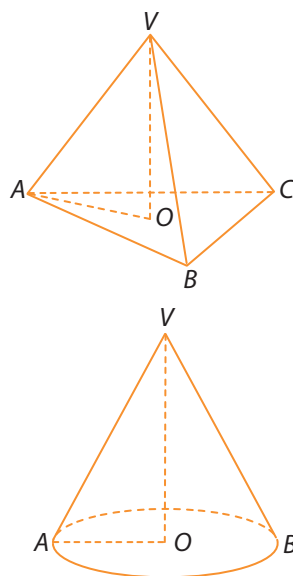
Rezolvare:

Fie $VO \perp (ABC)$, $O \in (ABC)$. Deoarece ABC este triunghi echilateral și O este centrul său, avem $AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$ cm $= \frac{a\sqrt{3}}{3}$ cm. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic VAO ($\angle VOA = 90^\circ$, căci $VO \perp (ABC)$), obținem $VO^2 = VA^2 - AO^2 = a^2 - \frac{3a^2}{9} = \frac{6a^2}{9}$, deci $VO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ cm.

2 Determină lungimea înălțimii unui con circular drept cu vârful V , raza bazei $OA = 6$ cm și generatoarea $VA = 10$ cm.

Rezolvare:

Triunghiul VAO este dreptunghic în O , deoarece VO (înălțimea) este perpendiculară pe planul bazei, deci $VO^2 = VA^2 - AO^2 = 10^2 - 6^2 = 8^2$, de unde rezultă că lungimea înălțimii conului este $VO = 8$ cm.



Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

- 1** Calculează lungimea înălțimii unei piramide triunghiulare regulate $VABC$ cu vârful V și $VA = AB = 6$ cm.
- 2** Calculează lungimea înălțimii unei piramide triunghiulare regulate $VABC$ cu vârful V , $AB = 12$ cm și $VA = 13$ cm.
- 3** Determină raza bazei unui con circular drept cu generatoarea de 17 cm și înălțimea de 15 cm.
- 4** Un con circular drept are diametrul bazei de 30 m și înălțimea de 20 m. Calculează lungimea generatoarei conului.
- 5** O piramidă patrulateră regulată $VABCD$, cu vârful V , are înălțimea $VO = 12$ cm și latura bazei $AB = 10$ cm. Calculează aria feței laterale VBC .
- 6** Determină lungimea înălțimii unei piramide patrulateră regulate cu muchia laterală de 3 m și muchia bazei de 4 m.
- 7** O piramidă hexagonală regulată $VABCDEF$, cu vârful V , are înălțimea $VO = 4$ cm și muchia laterală $VA = 5$ cm. Calculează lungimea muchiei bazei piramidei.

Din oficiu: 1 punct

AUTOEVALUARE

Timp de lucru: 40 de minute

La problemele 1, 2 și 3, alege litera corespunzătoare răspunsului corect.

1 Un con circular drept are raza bazei de 20 cm și înălțimea de 15 cm. Generatoarea conului este egală cu: **2 puncte**

- a) 20 cm; b) 25 cm; c) 30 cm; d) 35 cm.

2 O piramidă patrulateră regulată $VABCD$ are vârful V și înălțimea $VO = 9$ cm. Dacă $VM = 15$ cm, unde M este mijlocul muchiei BC , atunci aria bazei $ABCD$ este egală cu: **2 puncte**

- a) 144 cm^2 ; b) 200 cm^2 ; c) 450 cm^2 ; d) 576 cm^2 .

3 Un con circular drept are generatoarea de 13 cm și aria bazei de $25\pi \text{ cm}^2$. Înălțimea conului este egală cu: **2 puncte**

- a) 5 cm; b) 10 cm; c) 12 cm; d) 13 cm.

4 Fie $VABC$ o piramidă triunghiulară regulată cu vârful V , muchia bazei $AB = 18$ cm și muchia laterală $VA = 12$ cm. Calculează lungimea înălțimii piramidei. **2 puncte**

5 Piramida patrulateră regulată $VABCD$, cu vârful V , are aria bazei $ABCD$ egală cu 144 cm^2 și aria feței laterale VAB egală cu 60 cm^2 . Calculează lungimea înălțimii VO . **1 punct**



LECȚIA 11

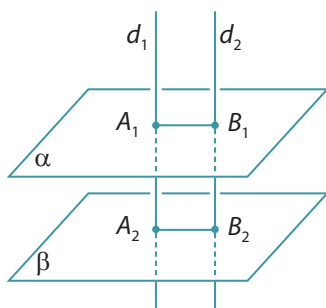
Distanța dintre două plane paralele, înălțimea prisme drepte, a paralelipipedului dreptunghic, a cilindrului circular drept, a trunchiului de piramidă și a trunchiului de con circular drept

Observăm și descoperim cunoștințe noi

Știm din lecția 9 (propoziția 4) că, dacă două plane, α și β , sunt paralele și o dreaptă este perpendiculară pe unul dintre ele, atunci dreapta este perpendiculară și pe celălalt plan.

În plus, observăm că, dacă planele α și β sunt paralele, dreptele d_1 și d_2 sunt perpendiculare pe α și β și d_1 intersectează α și β în punctele A_1 , respectiv A_2 , iar d_2 intersectează α și β în B_1 , respectiv B_2 (figura 1), atunci $A_1A_2 = B_1B_2$.

Fig. 1

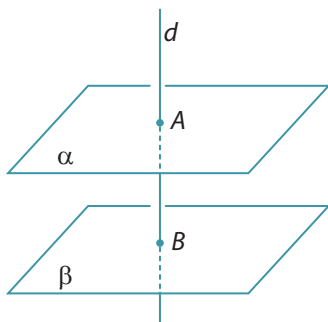


$$\left. \begin{array}{l} \alpha \parallel \beta \\ d_1 \perp \alpha \ (d_1 \perp \beta) \\ d_2 \perp \alpha \ (d_2 \perp \beta) \\ d_1 \cap \alpha = \{A_1\}, d_1 \cap \beta = \{A_2\} \\ d_2 \cap \alpha = \{B_1\}, d_2 \cap \beta = \{B_2\} \end{array} \right\} \Rightarrow A_1A_2 = B_1B_2$$

Într-adevăr, din relațiile $d_1 \perp \alpha$, $d_2 \perp \alpha$ rezultă că dreptele d_1 și d_2 sunt paralele, deci determină un plan, (d_1, d_2) . Planul (d_1, d_2) intersectează planele paralele α și β după dreptele paralele A_1B_1 și A_2B_2 . Prin urmare, cum $A_1B_1 \parallel A_2B_2$ și $A_1A_2 \parallel B_1B_2$, înseamnă că patrulaterul $A_1A_2B_2B_1$ este paralelogram, deci $A_1A_2 = B_1B_2$.

DEFINIȚIE: Distanța dintre două plane paralele este egală cu lungimea segmentului determinat de cele două plane pe o dreaptă perpendiculară pe acestea.

EXEMPLU:



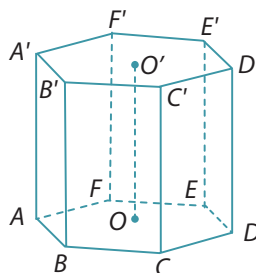
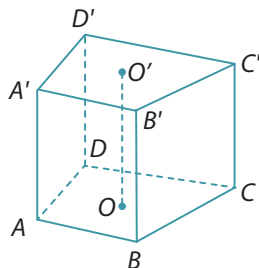
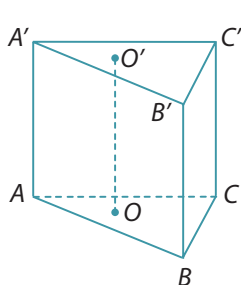
Dacă $\alpha \parallel \beta$, $d \perp \alpha$ ($d \perp \beta$), $d \cap \alpha = \{A\}$, $d \cap \beta = \{B\}$, atunci AB este distanța dintre planele α și β .

OBSERVAȚIE: După cum am arătat mai sus, lungimea segmentului AB nu depinde de poziția dreptei d , care este perpendiculară pe planele paralele α și β .

Înălțimea unei prisme drepte este distanța dintre planele celor două baze ale prisme.

OBSERVAȚIE: Lungimea muchiei laterale a unei prisme drepte este egală cu lungimea înălțimii prisme.

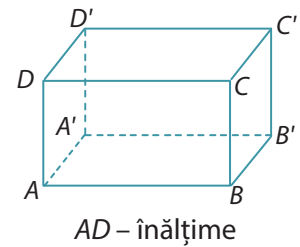
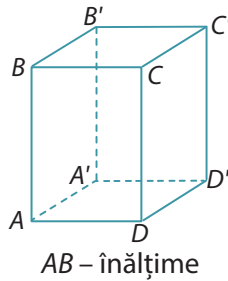
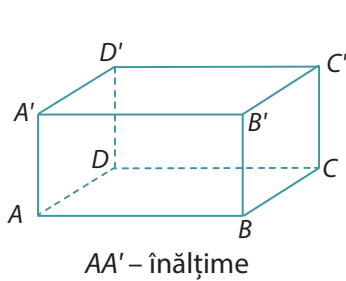
EXEMPLE:



OO' este înălțimea, unde $O \in (ABC)$, $O' \in (A'B'C')$ și $OO' \perp (ABC)$.

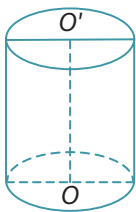
La un **paralelipiped dreptunghic** (este și prismă dreaptă), oricare două fețe opuse pot fi considerate baze, deci **oricare dintre cele trei dimensiuni** ale paralelipipedului **se poate lua ca înălțime**.

EXEMPLE:



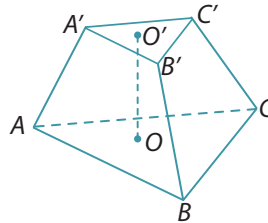
Înălțimea cilindrului circular drept este distanța dintre planele celor două baze ale cilindrului; de obicei, se consideră distanța dintre centrele cercurilor celor două baze.

EXEMPLU: OO' – înălțime



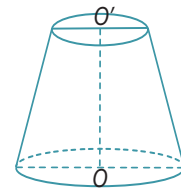
Înălțimea trunchiului de piramidă este distanța dintre planele celor două baze ale trunchiului; de obicei, la trunchiul de piramidă regulată, înălțimea este considerată distanța dintre centrele bazelor.

EXEMPLU: OO' – înălțime (O și O' sunt centrele bazelor)



Înălțimea trunchiului de con circular drept este distanța dintre planele celor două baze ale trunchiului; de obicei, înălțimea este considerată distanța dintre centrele cercurilor celor două baze.

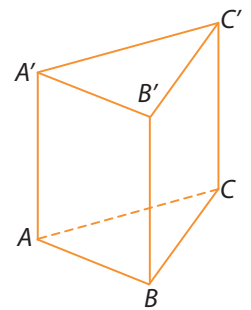
EXEMPLU: OO' – înălțime



Aplicăm cunoștințele

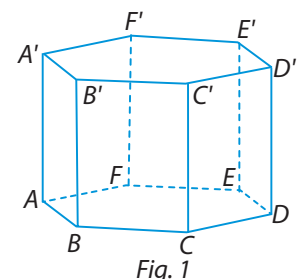
În figura alăturată este reprezentată prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$, cu aria bazei ABC egală cu $36\sqrt{3} \text{ cm}^2$ și perimetrul unei fețe laterale egal cu 36 cm. Determină înălțimea prisme.

Rezolvare: Vom determina lungimea muchiei AA' , care este egală cu înălțimea prisme regulate $ABCA'B'C'$. Baza ABC este un triunghi echilateral cu aria egală cu $\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}$, deci avem $\frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}$, de unde obținem $AB^2 = 144$, adică $AB = 12 \text{ cm}$. Fața laterală $ABB'A'$ este un dreptunghi cu perimetrul egal cu $2(AA' + AB)$. Prin urmare, $2(AA' + AB) = 36$, de unde rezultă că $AA' = 6 \text{ cm}$. Înălțimea prisme considerate este egală cu 6 cm.



Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

- Un zgârie-nori (o clădire foarte înaltă) are forma unei prisme triunghiulare regulate cu perimetrul bazei de 90 m și muchia laterală de patru ori mai mare decât latura bazei. Determină înălțimea clădirii.
- O cutie de bomboane are forma unui paralelipiped dreptunghic cu baza având dimensiunile de 20 cm și 15 cm. Determină înălțimea cutiei, știind că suma ariilor fețelor laterale este egală cu 280 cm^2 .
- Înălțimea unei prisme patrulater regulate este egală cu 12 dm, iar aria bazei sale este egală cu 16 dm^2 . Calculează aria uneia dintre fețele laterale ale prisme.
- În figura 1 este reprezentată prisma hexagonală regulată $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$ cu $AD = 6\sqrt{3} \text{ cm}$ și $A'D = 12 \text{ cm}$. Determină înălțimea prisme.



5 Un cilindru circular drept are generatoarele AA' și BB' , astfel încât AB este un diametru al bazei cilindrului (vezi figura 2). Determină înălțimea și raza bazei cilindrului, știind că $ABB'A'$ este un pătrat cu aria de 36 cm^2 .

6 În figura 3 este reprezentat trunchiul de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ cu $AB = 12 \text{ cm}$, $A'B' = 3 \text{ cm}$ și $AA' = 6 \text{ cm}$. Determină:

- a) înălțimea trunchiului de piramidă; b) înălțimea piramidei din care provine trunchiul de piramidă.

7 Fie $ABCD A'B'C'D'$ un trunchi de piramidă patrulateră regulată cu $AB = 12 \text{ cm}$, $A'B' = 6 \text{ cm}$ și înălțimea de 4 cm (vezi figura 4). Calculează:

- a) lungimea muchiei AA' ; b) suma ariilor fețelor laterale ale trunchiului de piramidă.

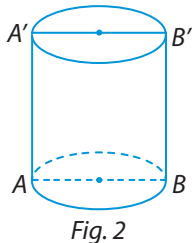


Fig. 2

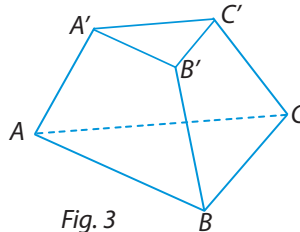


Fig. 3

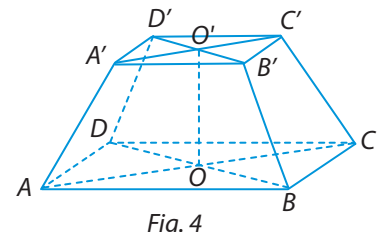


Fig. 4

8 Fie $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$ un trunchi de piramidă hexagonală regulată cu $AB = 6 \text{ cm}$, $A'B' = 3 \text{ cm}$ și $AA' = 5 \text{ cm}$ (vezi figura 5). Determină înălțimea OO' a trunchiului de piramidă (punctele O și O' fiind centrele bazelor).

9 În figura 6 este desenat un trunchi de con circular drept cu generatoarele AA' și BB' , astfel încât AB este un diametru al bazei. Se știe că trunchiul are raza bazei mari $OA = 12 \text{ cm}$, raza bazei mici $O'A' = 6 \text{ cm}$ și generatoarea $AA' = 10 \text{ cm}$. Determină:

- a) înălțimea trunchiului; b) înălțimea conului circular drept din care provine trunchiul.

10 Fie $ABCD A'B'C'D'$ un cub cu latura de 18 cm . Pe muchiile BA , BC , BB' se consideră punctele M , N , respectiv P , astfel încât $BM = BN = BP = 3 \text{ cm}$ (vezi figura 7).

- a) Arată că piramida $BMNP$ este o piramidă regulată.
b) Demonstrează că planele (MNP) și (ACB') sunt paralele.
c) Determină distanța dintre planele (MNP) și (ACB') .

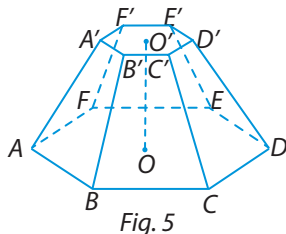


Fig. 5

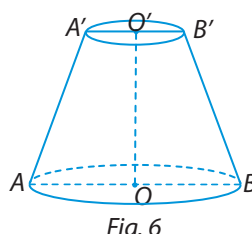


Fig. 6

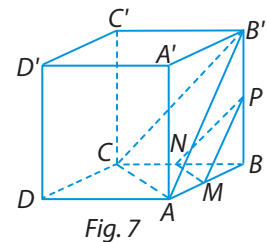


Fig. 7



Din oficiu: 1 punct

AUTOEVALUARE

Timp de lucru: 40 de minute

La problemele 1 și 2, alege litera corespunzătoare răspunsului corect.

1 O prismă patrulateră regulată are aria unei baze de 16 cm^2 și aria unei fețe laterale de 40 cm^2 . Înălțimea acestei prisme este egală cu: **2 puncte**

- a) $\frac{5}{2} \text{ cm}$; b) 8 cm ; c) 10 cm ; d) 20 cm .

2 Un cilindru circular drept are diametrul unei baze egal cu generatoarea sa. Dacă raza cilindrului este egală cu 6 cm , atunci înălțimea sa este egală cu: **2 puncte**

- a) 12 cm ; b) 6 cm ; c) 3 cm ; d) 2 cm .

3 Un trunchi de con circular drept are raza bazei mari de 9 cm , raza bazei mici de 6 cm și generatoarea de 5 cm . Determină înălțimea acestui trunchi de con. **2 puncte**

4 Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ are latura bazei mari $AB = 9 \text{ cm}$, latura bazei mici $A'B' = 6 \text{ cm}$ și muchia laterală $AA' = 2 \text{ cm}$. Determină înălțimea trunchiului de piramidă. **2 puncte**

5 Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu vârful V și latura bazei $AB = 12 \text{ cm}$. Punctele M , N , P sunt mijloacele muchiilor BC , CD , respectiv VC . **1 punct**

- a) Demonstrează că planele (MNP) și (VBD) sunt paralele.
b) Determină distanța dintre planele (MNP) și (VBD) .
c) Determină distanța de la punctul V la planul (MNP) .

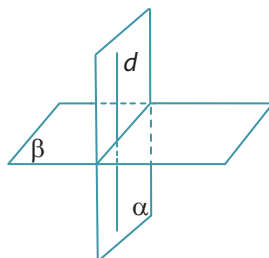
LECȚIA 12

Plane perpendiculare, aplicații: secțiuni diagonale, secțiuni axiale în corpurile studiate



Observăm și descoperim cunoștințe noi

DEFINIȚIE: Spunem că **un plan α este perpendicular un pe alt plan β** , dacă planul α conține o dreaptă d perpendiculară pe planul β .



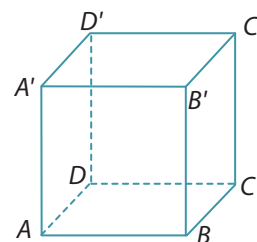
$$\left. \begin{array}{l} d \perp \beta \\ d \subset \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \perp \beta$$



OBSERVAȚIE: Se poate demonstra că, dacă $\alpha \perp \beta$, atunci avem și $\beta \perp \alpha$.

EXEMPLE:

1. În figura alăturată este desenat cubul $ABCD A' B' C' D'$. Îți amintești că $AA' \perp (ABC)$ (deoarece $AA' \perp AB$ și $AA' \perp AD$, căci $ABB'A'$ și $ADD'A'$ sunt pătrate, iar $AB \cap AD = \{A\}$). Conform definiției de mai sus, din $AA' \perp (ABC)$ și $AA' \subset (A'AB)$, $AA' \subset (A'AD)$ rezultă că $(A'AB) \perp (ABC)$ și $(A'AD) \perp (ABC)$.

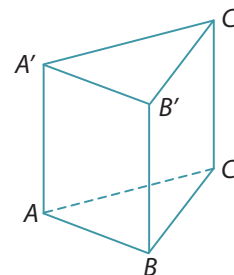
**LUCRARE PRACTICĂ**

Împreună cu câțiva colegi (maximum trei), găsește cât mai multe perechi diferite de plane perpendiculare (ordinea planelor în pereche nu contează) care sunt fețe ale cubului $ABCD A' B' C' D'$.

Indicație: Numărul maxim de perechi este 12.

OBSERVAȚIE IMPORTANTĂ: În orice paralelipiped dreptunghic (deci în orice prismă patrulateră regulată și în orice cub), oricare două fețe ce au o muchie comună se află în plane perpendiculare.

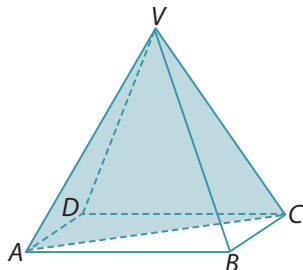
2. În figura alăturată este reprezentată prisma triunghiulară dreaptă $ABCA' B' C'$. Deoarece $AA' \perp (ABC)$ și $AA' \subset (A'AB)$, $AA' \subset (A'AC)$ rezultă, conform definiției de mai sus, că $(A'AB) \perp (ABC)$ și $(A'AC) \perp (ABC)$.



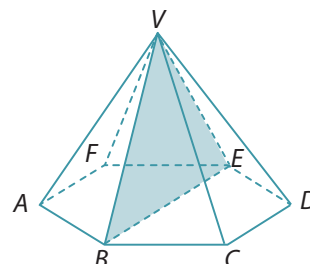
OBSERVAȚIE IMPORTANTĂ: În orice prismă dreaptă, planele fețelor laterale sunt perpendiculare pe planele bazelor.

DEFINIȚIE: Se numește **secțiune diagonală** într-o piramidă regulată, într-o prismă regulată sau într-un trunchi de piramidă regulată, secțiunea determinată de un plan perpendicular pe planul bazei care conține o diagonală a bazei.

EXEMPLE (desenează și tu pe caiet, folosind o riglă, creion și, eventual, creioane colorate):

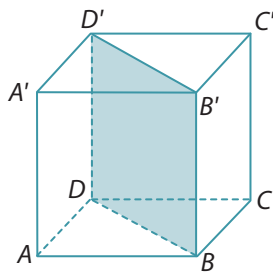


VAC este o secțiune diagonală în piramida patrulateră regulată $VABCD$ (se înțelege triunghiul VAC , împreună cu toate punctele sale interioare).

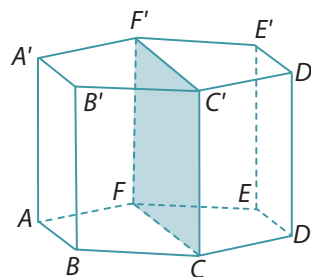


VBE este o secțiune diagonală în piramida hexagonală regulată $VABCDEF$.

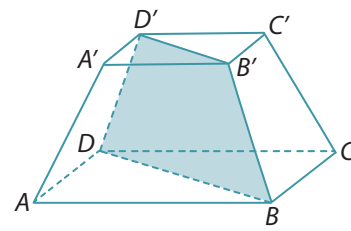




$BDD'B'$ este o secțiune diagonală în cubul $ABCD A'B'C'D'$.



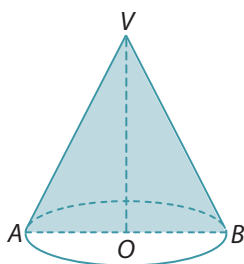
$CFF'C'$ este o secțiune diagonală în prisma hexagonală regulată $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$.



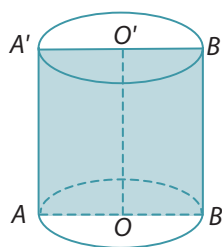
$BDD'B'$ este o secțiune diagonală în trunchiul de piramidă patrulateră regulată $ABCD A'B'C'D'$.

DEFINIȚIE: Se numește **secțiune axială** într-un cilindru circular drept, într-un con circular drept sau într-un trunchi de con circular drept, secțiunea determinată de un plan perpendicular pe planul bazei care conține un diametru al bazei (al unei baze).

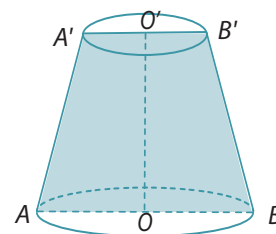
EXEMPLE (desenează și tu pe caiet, folosind o riglă, creion, creioane colorate):



VAB este o secțiune axială în conul circular drept (se înțelege triunghiul VAB , împreună cu toate punctele sale interioare).



$ABB'A'$ este o secțiune axială în cilindrul circular drept (se înțelege dreptunghiul $ABB'A'$, împreună cu toate punctele sale interioare).



$ABB'A'$ este o secțiune axială în trunchiul de con circular drept (trapezul isoscel $ABB'A'$, împreună cu toate punctele sale interioare).



Aplicăm cunoștințele

În figura alăturată este reprezentată prisma patrulateră regulată $ABCD A'B'C'D'$ cu $AB = BC = 8$ cm și $AA' = 4\sqrt{2}$ cm.

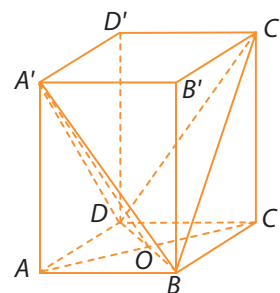
a) Calculează aria secțiunii diagonale $ACC'A'$.

b) Demonstrează că planele $(A'BD)$ și $(C'BD)$ sunt perpendiculare.

Rezolvare:

a) Secțiunea diagonală $ACC'A'$ este un dreptunghi cu $AC = 8\sqrt{2}$ cm (diagonala pătratului $ABCD$, $AB = 8$ cm) și $AA' = 4\sqrt{2}$ cm, deci aria sa este egală cu $AC \cdot AA' = 8\sqrt{2}$ cm $\cdot$ $4\sqrt{2}$ cm = 64 cm².

b) Pentru a demonstra că $(A'BD) \perp (C'BD)$, vom arăta că $A'O \perp (C'BD)$ (conform definiției, dacă dreapta $A'O$, inclusă în planul $(A'BD)$, este perpendiculară pe $(C'BD)$, atunci cele două plane sunt perpendiculare). Triunghiurile dreptunghice $A'AO$ ($\angle A = 90^\circ$) și $C'CO$ ($\angle C = 90^\circ$) au $A'A = AO = 4\sqrt{2}$ cm și $C'C = CO = 4\sqrt{2}$ cm, deci $\angle A'OA = \angle C'OC = 45^\circ$, ceea ce implică $\angle A'OC' = 180^\circ - \angle A'OA - \angle C'OC = 90^\circ$, deci $A'O \perp OC'$. Pe de altă parte, avem $A'B = A'D = 4\sqrt{6}$ cm și $BO = OD$, deci $A'O \perp BD$. Din relațiile $A'O \perp OC'$, $A'O \perp BD$, $OC' \cap BD = \{O\}$ rezultă că $A'O \perp (C'BD)$. În final, cum $A'O \perp (C'BD)$, $A'O \subset (A'BD)$, rezultă că $(A'BD) \perp (C'BD)$.



Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

- 1 Calculează aria secțiunii diagonale $ACC'A'$ a cubului $ABCD A'B'C'D'$ cu latura $AB = 4$ m (vezi figura 1).
- 2 Secțiunea diagonală VAC a piramidei patrulateră regulate $VABCD$, cu vârful V , este un triunghi echilateral cu aria de $9\sqrt{3}$ cm². Determină înălțimea piramidei.
- 3 Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are latura bazei mari $AB = 12$ cm, latura bazei mici $A'B' = 4$ cm și înălțimea $OO' = 3$ cm. Calculează aria secțiunii diagonale $ACC'A'$.

- 4** Secțiunea axială a unui cilindru circular drept este un pătrat cu latura de 6 dm. Calculează aria unei baze a cilindrului.
- 5** **Lucru în echipă:** Împreună cu colegul de bancă, rezolvați sarcinile propuse și analizați rezultatele găsite.
Se consideră un con circular drept având vârful V și secțiunea axială triunghiul VAB cu $VA = 10$ cm și $AB = 16$ cm (vezi figura 2).
- a)** Determină aria bazei conului. **b)** Calculează lungimea înălțimii conului.
- 6** Fie un trunchi de con circular drept cu înălțimea $OO' = 4$ cm și secțiunea axială $ABB'A'$, $AB = 9$ cm și $A'B' = 3$ cm (vezi figura 3). Determină generatoarea trunchiului de con.

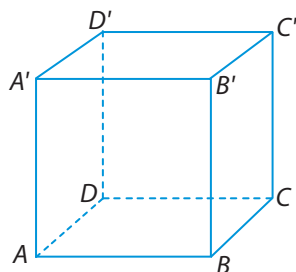


Fig. 1

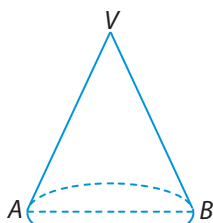


Fig. 2

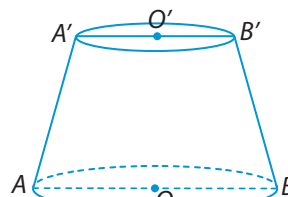


Fig. 3

- 7** Fie $VABC$ o piramidă triunghiulară regulată cu vârful V . Demonstrează că, dacă M este mijlocul laturii BC , atunci $(VAM) \perp (VBC)$ și $(VAM) \perp (ABC)$.
- 8** În figura 4 este desenată piramida patrulateră regulată $VABCD$. Punctul O este centrul bazei $ABCD$, iar punctul M este mijlocul muchiei BC . Demonstrează că:
- a)** $(VAC) \perp (VBD)$; **b)** $(VBC) \perp (VOM)$.
- 9** În figura 5 este reprezentată prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ cu $AB = 12$ cm și $AA' = 8$ cm. Punctul M este mijlocul muchiei BC .
- a)** Demonstrează că $(AMC') \perp (BCC')$. **b)** Calculează aria triunghiului AMC' .
- 10** Fie $ABCD$ un romb cu $AB = 12$ cm și $\angle BAD = 60^\circ$. De aceeași parte a planului (ABC) ducem perpendicularele AE și CF pe planul (ABC) , astfel încât $AE = 6\sqrt{6}$ cm și $CF = 3\sqrt{6}$ cm (figura 6). Demonstrează că:
- a)** $EO \perp FO$, unde $\{O\} = AC \cap BD$; **b)** $(BFD) \perp (BED)$.

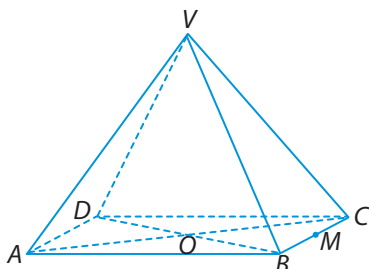


Fig. 4

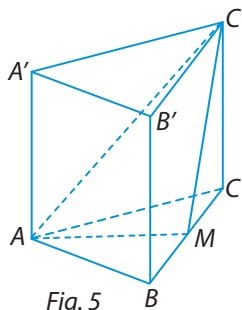


Fig. 5

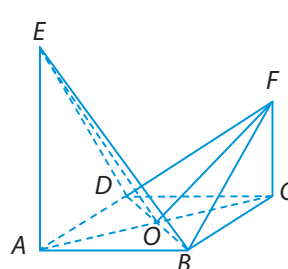


Fig. 6

Din oficiu: 1 punct

AUTOEVALUARE

Timp de lucru: 40 de minute

La problemele 1 și 2, alege litera corespunzătoare răspunsului corect.

- 1** Aria unei secțiuni diagonale a unui cub cu aria unei fețe egală cu 12 cm^2 este: **2 puncte**
a) 12 cm^2 ; **b)** $12\sqrt{2} \text{ cm}^2$; **c)** $12\sqrt{3} \text{ cm}^2$; **d)** 24 cm^2 .
- 2** Fie α și β două plane paralele și γ un plan perpendicular pe planul α . Propoziția: „Planul γ este perpendicular pe planul β ” este: **2 puncte**
a) adevărată; **b)** falsă.
- 3** Un trunchi de con circular drept are secțiunea axială trapezul $ABB'A'$ cu baza mare $AB = 30$ cm, baza mică $A'B' = 20$ cm și $AA' = 13$ cm. Calculează lungimea înălțimii trunchiului de con considerat. **2 puncte**
- 4** Un cilindru circular drept are secțiunea axială dreptunghiul $ABB'A'$ de perimetru 28 cm. Știind că generatoarea cilindrului $AA' = 8$ cm, calculează aria bazei cilindrului și lungimea diagonalei secțiunii axiale. **2 puncte**
- 5** Fie $VABC$ o piramidă triunghiulară regulată cu vârful V , muchia laterală $VA = 4$ cm și muchia bazei $AB = 4\sqrt{2}$ cm. Demonstrează că planele (VAB) și (VAC) sunt perpendiculare. **1 punct**



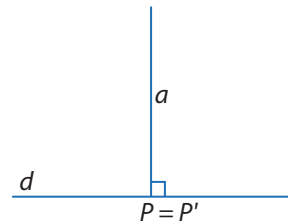
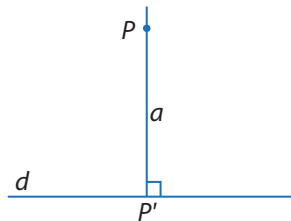
LECȚIA 13

Proiecții de puncte, de segmente și de drepte pe un plan; unghiul dintre o dreaptă și un plan, aplicație: lungimea proiecției unui segment pe un plan



Ne amintim

În clasele anterioare, am învățat că proiecția ortogonală (pe scurt, proiecția¹) a unui punct P pe o dreaptă d este punctul în care perpendiculara din P pe d intersectează dreapta d , adică piciorul perpendicului din P pe dreapta d .



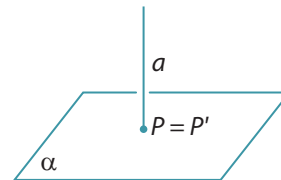
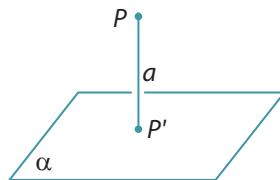
Dacă $P \in a$, $a \perp d$, $a \cap d = \{P'\}$, atunci P' este proiecția punctului P pe dreapta d și notăm astfel: $P' = \text{pr}_d P$.

OBSERVAȚIE: Dacă $P \in d$, proiecția lui P pe dreapta d este chiar punctul P .



Observăm și descoperim cunoștințe noi

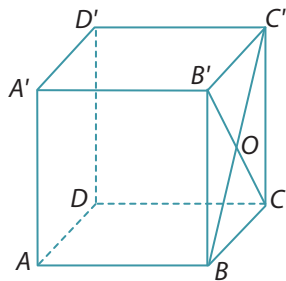
DEFINIȚIE: Proiecția ortogonală (pe scurt, proiecția¹) a unui punct P pe un plan α este punctul în care perpendiculara din P pe α intersectează planul α (piciorul perpendicului din P pe planul α).



Dacă $P \in a$, $a \perp \alpha$, $a \cap \alpha = \{P'\}$, atunci P' este proiecția punctului P pe planul α și notăm: $P' = \text{pr}_\alpha P$.

OBSERVAȚIE: Dacă $P \in \alpha$, atunci proiecția punctului P pe planul α este chiar punctul P .

EXEMPLE: Fie $ABCD A'B'C'D'$ un cub.



Avem:

$\text{pr}_{(ABC)} A' = A$, deoarece $AA' \perp (ABC)$;

$\text{pr}_{(BCC')} A = B$, căci $AB \perp (BCC')$;

$\text{pr}_{(ABC')} C = O$, unde $\{O\} = BC' \cap B'C$, pentru că $CO \perp (ABC')$;

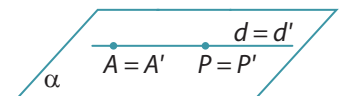
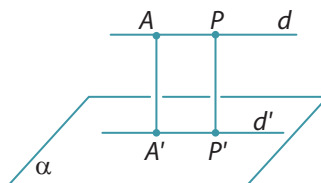
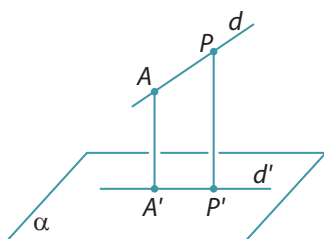
$\text{pr}_{(ABC)} C = C$, deoarece $C \in (ABC)$.

DEFINIȚIE: Proiecția unei figuri oarecare pe un plan este mulțimea proiecțiilor tuturor punctelor sale pe acel plan.

TEOREMĂ: Proiecția unei drepte pe un plan este o dreaptă sau un punct.

Demonstrație: Fie o dreaptă d și un plan α .

Cazul I. Dreapta d nu este perpendiculară pe planul α .



¹ Pentru că deocamdată folosim numai proiecția ortogonală o vom numi, pe scurt, proiecția.

Fie un punct A fixat pe dreapta d și P un punct oarecare (mobil) al dreptei d . Notăm cu A' și P' proiecțiile punctelor A , respectiv P pe planul α . Cum PP' se sprijină pe dreapta d și are direcția dată (aceeași cu a lui AA' , căci AA' și PP' sunt perpendiculare pe α , deci sunt paralele), generează un plan a cărui intersecție cu planul α este o dreaptă d' . Evident, orice punct $Q \in d'$ este proiecția unui punct $Q \in d$, pentru că, dacă o secantă intersectează o dreaptă, taie și orice paralelă a ei (în plan). Prin urmare, $d' = \text{pr}_{\alpha} d$.

OBSERVAȚIE: Dacă $d \parallel \alpha$, atunci $d' \parallel d$, iar dacă $d \subset \alpha$, atunci $d' = d$.

Cazul al II-lea. Dreapta d este perpendiculară pe planul α .

În acest caz, proiecția dreptei d pe planul α este punctul O , $\{O\} = d \cap \alpha$, deoarece, oricare ar fi un punct P al dreptei d , piciorul perpendicularei din P pe α este O . Prin urmare, $\{O\} = \text{pr}_{\alpha} d$.

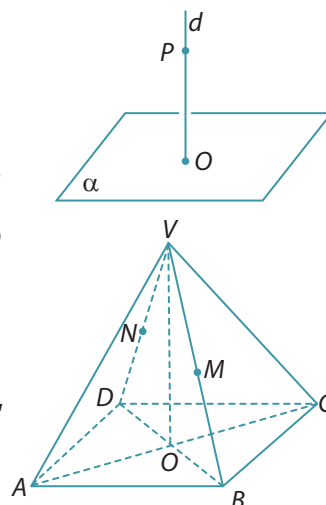
EXAMPLE: Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu vârful V , $\{O\} = AC \cap BD$ și M, N mijloacele laturilor VB , respectiv VD . Avem:

$\text{pr}_{(ABC)} BD = BD$, căci $BD \subset (ABC)$;

$\text{pr}_{(ABC)} VA = OA$, pentru că $VO \perp (ABC)$ și $A \in (ABC)$ ($\text{pr}_{(ABC)} V = O$, $\text{pr}_{(ABC)} A = A$);

$\text{pr}_{(VBD)} AC = \{O\}$, deoarece $AC \perp (VBD)$ ($AC \perp BD$ și $AC \perp VO$);

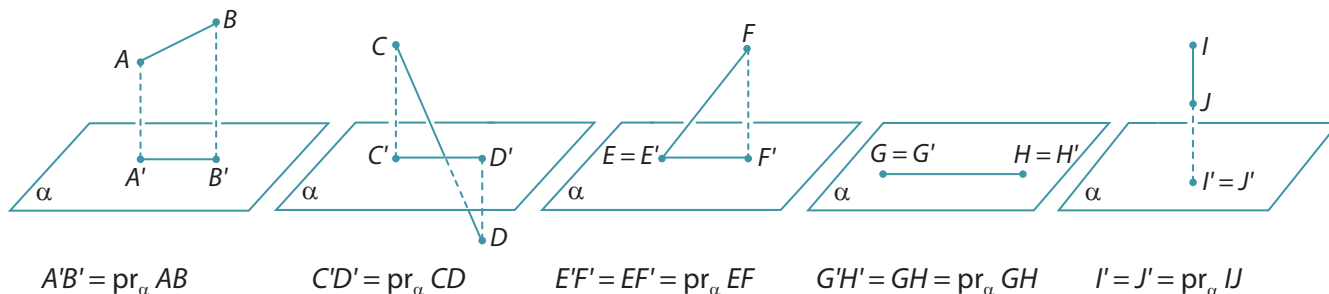
$\text{pr}_{(ABC)} MN = BD$, pentru că proiecțiile punctelor M și N pe planul (ABC) sunt M' și N' , mijloacele segmentelor OB , respectiv OD (MM' este linie mijlocie în $\triangle VOB$, deci $MM' \parallel VO$ și $VO \perp (ABC)$ etc.).



Proiecția unui segment pe un plan este un segment, dacă dreapta pe care se află segmentul nu este perpendiculară pe plan, sau un punct, în cazul în care dreapta căreia îi aparține segmentul este perpendiculară pe plan.

Dacă punctele A' și B' sunt proiecțiile capetelor A , respectiv B ale segmentului AB , atunci segmentul $A'B'$ (care se poate reduce la un punct) este proiecția segmentului AB pe planul α și notăm $A'B' = \text{pr}_{\alpha} AB$.

În desenele următoare sunt arătate câteva dintre cazurile posibile (desenează și tu pe caiet aceste figuri).



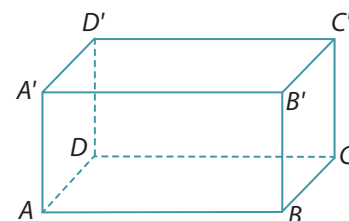
EXAMPLE: Fie $ABCD A'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic.

Avem:

$AB = \text{pr}_{(ABC)} A'B'$, deoarece $A'A \perp (ABC)$ și $B'B \perp (ABC)$;

$B'C' = \text{pr}_{(A'B'C')} B'C$, deoarece $B' \in (A'B'C')$ și $CC' \perp (A'B'C')$;

$A = \text{pr}_{(ADD')} AB$, deoarece $AB \perp (ADD')$.



DEFINIȚIE: Numim **unghiul unei drepte cu un plan**, unghiul determinat de acea dreaptă cu proiecția ei pe plan, dacă dreapta nu este perpendiculară și nici paralelă cu planul sau conținută în el (figura 1).

Dacă dreapta este perpendiculară pe plan, atunci vom considera unghiul dreptei cu planul respectiv de 90° (figura 2).

Dacă dreapta este paralelă cu planul sau conținută în plan, atunci vom considera că dreapta face cu planul un unghi de 0° (figura 3).

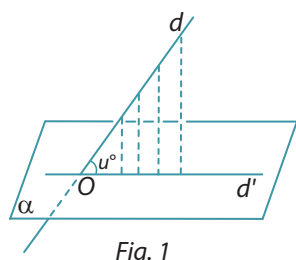
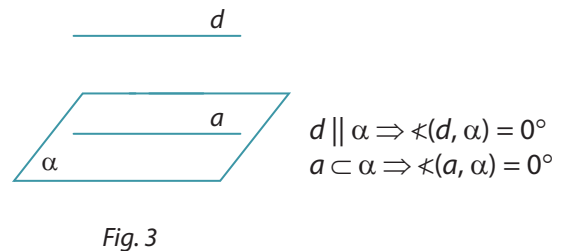
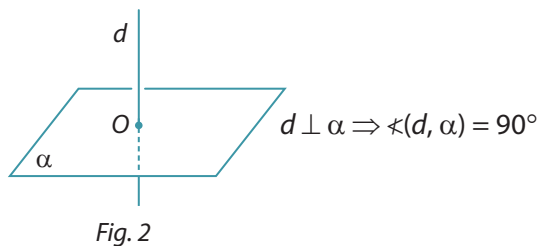


Fig. 1

$$\begin{aligned} \text{pr}_{\alpha} d &= d' \Rightarrow \\ \Rightarrow \angle(d, \alpha) &= \angle(d, d') = u^\circ \\ (d \cap \alpha &= \{O\}) \end{aligned}$$





OBSERVAȚIE: Măsura unghiului u , al unei drepte cu un plan, variază de la 0° la 90° : $\angle u \in [0^\circ, 90^\circ]$.

DEFINIȚIE: Unghiul format de un segment AB cu un plan α este unghiul format de dreapta AB cu planul α .

TEOREMĂ: Dacă măsura unghiului dintre segmentul AB și planul α este u° , $0^\circ < u^\circ < 90^\circ$ și $A'B' = \text{pr}_\alpha AB$, atunci $A'B' = AB \cdot \cos u^\circ$.

Demonstrație: Fie $AA' \perp \alpha$, $A' \in \alpha$, și $BB' \perp \alpha$, $B' \in \alpha$, deci $A'B' = \text{pr}_\alpha AB$.

Deoarece $0^\circ < u^\circ < 90^\circ$, înseamnă că dreapta AB este secantă planului α .

Fie $\{O\} = AB \cap \alpha$ (vezi figura 4). Atunci $\angle AOA' = u^\circ$.

Punctele O, A, B, A', B' sunt coplanare. În planul lor, ducem $AC \parallel A'B'$, $C \in BB'$.

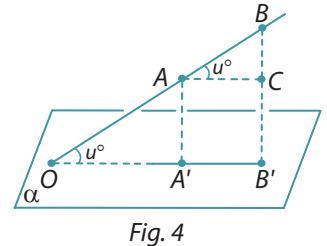
Avem $\angle BAC = \angle AOA' = u^\circ$ (unghiuri corespondente).

Cum $AC \parallel A'B'$, $AA' \parallel CB'$, $\angle AA'B' = 90^\circ$, rezultă că $A'B'CA$ este dreptunghi, deci $A'B' = AC$ și $\angle C = 90^\circ$.

Pe de altă parte, în triunghiul ABC , $\angle C = 90^\circ$, avem $\cos u^\circ = \frac{AC}{AB}$ sau $AC = AB \cdot \cos u^\circ$. Prin urmare:

$$A'B' = AC = AB \cdot \cos u^\circ.$$

OBSERVAȚIE: Dacă $AB \perp \alpha$, atunci $A'B' = 0$, iar dacă $AB \parallel \alpha$ sau $AB \subset \alpha$, atunci $A'B' = AB$.



Aplicăm cunoștințele

1 Considerăm un dreptunghi $ABCD$ cu laturile $AB = 9$ cm și $AD = 3$ cm.

Fie $MA \perp (ABC)$, $MA = 3\sqrt{3}$ cm (vezi figura 5).

- Determină măsura unghiului dintre dreapta MB și planul (ABC) .
- Determină măsura unghiului dintre dreapta MD și planul (ABC) .
- Calculează $\cos(\angle(MC, (ABC)))$.

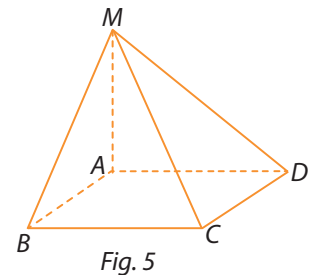
Rezolvare:

a) Cum $MA \perp (ABC)$ și $B \in (ABC)$, avem $\text{pr}_{(ABC)} MB = AB$, deci $\angle(MB, (ABC)) = \angle MBA$.

În triunghiul MBA ($\angle A = 90^\circ$): $\text{tg}(\angle MBA) = MA : AB = 1 : \sqrt{3}$, deci $\angle MBA = 30^\circ = \angle(MB, (ABC))$.

b) Analog, $\text{pr}_{(ABC)} MD = AD$ și $\angle(MD, (ABC)) = \angle MDA$. În triunghiul MDA ($\angle A = 90^\circ$): $\text{tg}(\angle MDA) = MA : AD = \sqrt{3}$, deci $\angle MDA = 60^\circ = \angle(MD, (ABC))$.

c) Cum $\text{pr}_{(ABC)} MC = AC$, avem $\angle(MC, (ABC)) = \angle MCA$. În triunghiul MCA ($\angle A = 90^\circ$): $\cos(\angle MCA) = AC : MC = 3\sqrt{10} : 3\sqrt{13} = \sqrt{10 : 13}$. Deci, $\cos(\angle(MC, (ABC))) = \sqrt{\frac{10}{13}}$.



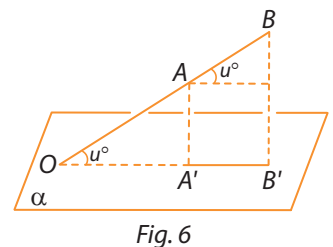
2 Punctele A și B sunt de aceeași parte a planului α , iar A' , respectiv B' sunt proiecțiile lor pe acest plan α . Fie u° măsura unghiului dintre dreapta AB și planul α (vezi figura 6).

- Dacă $AB = 6$ cm și $u^\circ = 60^\circ$, determină $A'B'$.
- Dacă $A'B' = 12$ cm și $u^\circ = 30^\circ$, determină AB .
- Dacă $A'B' = 3\sqrt{2}$ cm și $AB = 6$ cm, determină u° .

Rezolvare:

Deoarece $A'B' = \text{pr}_\alpha AB$, avem $A'B' = AB \cdot \cos u^\circ$ (conform teoremei din această lecție). Înlocuind, obținem:

- $A'B' = AB \cdot \cos u^\circ = 6 \cdot \cos 60^\circ$ cm = 3 cm;
- $AB = A'B' : \cos u^\circ = 12 : \cos 30^\circ$ cm = $12 : \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$ cm;
- $\cos u^\circ = A'B' : AB = 3\sqrt{2} : 6 = \sqrt{2} : 2$, deci $u^\circ = 45^\circ$.



Reține!

- ◆ Proiecția unui punct pe un plan este piciorul perpendicularei din acel punct pe plan.
- ◆ Proiecția unei figuri oarecare pe un plan este mulțimea proiecțiilor tuturor punctelor sale pe acel plan.
- ◆ Proiecția unei drepte pe un plan este o dreaptă sau un punct.
- ◆ Proiecția unui segment pe un plan este un segment sau un punct.
- ◆ Unghiul unei drepte d cu un plan α este unghiul determinat de d cu proiecția sa pe planul α , dacă d nu este perpendiculară pe α și nu este paralelă cu α sau conținută în α .
- ◆ Dacă $d \perp \alpha$, atunci $\angle(d, \alpha) = 90^\circ$.
- ◆ Dacă $d \parallel \alpha$ sau $d \subset \alpha$, atunci $\angle(d, \alpha) = 0^\circ$.
- ◆ Dacă $\text{pr}_\alpha AB = A'B'$ și $\angle(AB, \alpha) = u^\circ$, $0^\circ < u^\circ < 90^\circ$, atunci $A'B' = AB \cdot \cos u^\circ$.



Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

- În figura 7 este reprezentat cubul $ABCD A'B'C'D'$. Determină proiecția punctului A pe planul:
 - (BCC') ;
 - (ABC) ;
 - $(A'B'C')$;
 - (BDD') .
- Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu vârful V și $\{O\} = AC \cap BD$ (vezi figura 8). Determină:
 - $\text{pr}_{(ABC)} V$;
 - $\text{pr}_{(VBD)} A$;
 - $\text{pr}_{(ABC)} D$;
 - $\text{pr}_{(VAC)} O$.
- Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$ (vezi figura 9). Determină proiecția muchiei AA' pe planul:
 - (BCC') ;
 - (ADD') ;
 - (DCC') ;
 - (BCD) .
- Fie $ABCD A'B'C'D'$ un cub cu notațiile din figura 7. Determină proiecția segmentului AC' pe planul:
 - (ABC) ;
 - $(A'B'C')$;
 - (BCC') ;
 - (ADD') .
- În figura 10, $A'B'$ este proiecția segmentului AB pe planul α , punctele A și B fiind de aceeași parte a lui α . Dacă $AB = 10$ cm, $AA' = 5$ cm și $BB' = 11$ cm, determină lungimea segmentului $A'B'$.

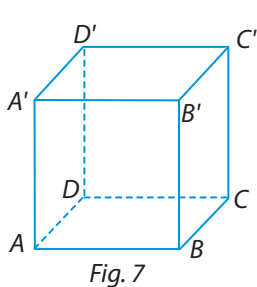


Fig. 7

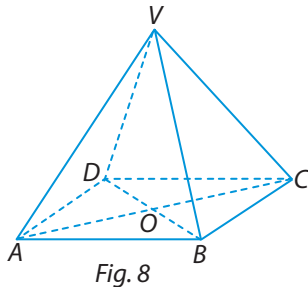


Fig. 8

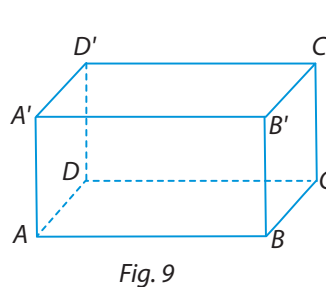


Fig. 9

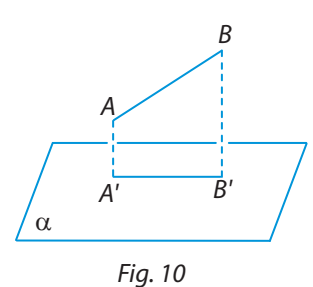


Fig. 10

- În figura 11 avem $A'B' = \text{pr}_\alpha AB$, punctele A și B fiind de o parte și de alta a planului α . Dacă $AB = 10$ cm, $AA' = 2$ cm și $BB' = 6$ cm, determină lungimea segmentului $A'B'$.
- Se consideră cubul $ABCD A'B'C'D'$ (vezi figura 7). Determină:
 - $\angle(A'B', (ABC))$;
 - $\angle(AA', (A'B'C'))$;
 - $\angle(A'C', (BCD))$;
 - $\angle(AC, (ABC))$.
- În figura 12 este desenată prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ cu $AB = AA'$. Calculează:
 - $\angle(A'B', (ABC))$;
 - $\angle(A'C', (ABC))$;
 - $\angle(AA', (A'B'C'))$;
 - $\angle(AB, (BCC'))$.
- În figura 13 este desenat un con circular drept la vârful V și înălțimea $VO = 6$ m. Unghiul dintre generatoarea VA și planul bazei este de 30° . Calculează perimetrul și aria secțiunii axiale a conului.

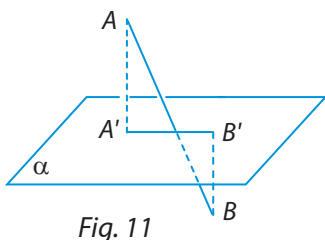


Fig. 11

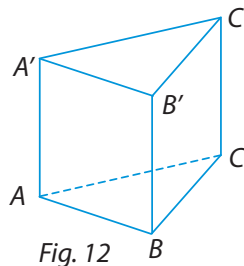


Fig. 12

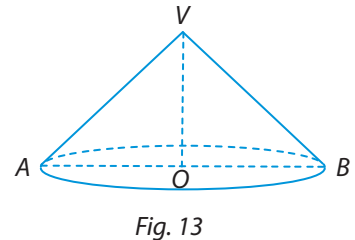


Fig. 13



- 10** În figura 14 este reprezentat un trunchi de con circular drept cu secțiunea axială $ABB'A'$, $AB = 12$ cm, $A'B' = 4$ cm și $AA' = 4\sqrt{2}$ cm. Calculează măsurile unghiurilor dintre o generatoare a trunchiului și planele bazelor.
- 11** Fie $VABC$ o piramidă triunghiulară regulată cu vârful V și $VA = 4\sqrt{3}$ cm. Se știe că muchia laterală VA face cu planul bazei un unghi de 60° .
- Demonstrează că lungimea înălțimii VO a piramidei este egală cu 6 cm.
 - Calculează aria bazei piramidei $VABC$.
- 12** Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu vârful V și $AB = 6$ cm. Muchia laterală VA face cu planul bazei un unghi de 30° (vezi figura 8).
- Demonstrează că VO , înălțimea piramidei, este egală cu $\sqrt{6}$ cm.
 - Determină măsura unghiului dintre AB și planul (VAC) .
- 13** Fie $ABCD A'B'C'D'$ un cub (vezi figura 7).
- Determină măsura unghiului dintre dreapta AA' și planul (BCC') și măsura unghiului dintre dreapta AA' și planul (ABC) .
 - Calculează sinusul unghiului dintre dreapta AC' și planul (ABC) .

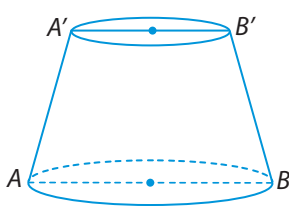


Fig. 14

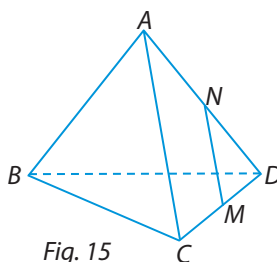


Fig. 15

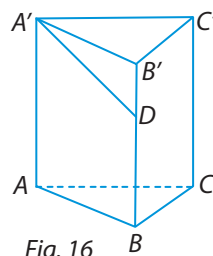


Fig. 16

- 14** În figura 15 este reprezentat tetraedrul regulat $ABCD$, cu latura $AB = 12$ cm. Punctele M și N sunt mijloacele laturilor CD , respectiv AD .
- Determină lungimea proiecției segmentului AB pe planul (BCD) .
 - Calculează lungimea proiecției segmentului MN pe planul (ABC) .
- 15** Se consideră prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ cu $AB = 3$ cm și $AA' = 12$ cm. Punctul D se află pe latura BB' , astfel încât $3B'D = BB'$ (figura 16). Calculează cosinusul unghiului format de dreapta $A'D$ cu planul (ABC) .



Din oficiu: 1 punct

AUTOEVALUARE

Timp de lucru: 40 de minute

La problemele 1, 2, 3 și 4, alege litera corespunzătoare răspunsului corect.

- 1** Fie cubul $ABCD A'B'C'D'$ (figura 7). Proiecția segmentului AC' pe planul (ABC) este segmentul: **2 puncte**
- CC' ;
 - AB ;
 - BC ;
 - AC .
- 2** Dacă $A'B' = \text{pr}_\alpha AB$, $A'B' = 4$ cm și $AB = 8$ cm, atunci măsura unghiului dintre dreapta AB și planul α este egală cu: **2 puncte**
- 30° ;
 - 45° ;
 - 60° ;
 - 90° .
- 3** Un con circular drept are diametrul bazei de 24 cm și unghiul format de o generatoare cu planul bazei de 45° . Înălțimea conului este egală cu: **2 puncte**
- 24 cm;
 - $12\sqrt{2}$ cm;
 - 12 cm;
 - 6 cm.
- 4** Într-un tetraedru regulat, sinusul unghiului format de o muchie laterală cu planul bazei sale este egal cu: **2 puncte**
- $\frac{\sqrt{3}}{2}$;
 - $\frac{\sqrt{2}}{3}$;
 - $\frac{\sqrt{3}}{3}$;
 - $\frac{\sqrt{6}}{3}$.
- 5** Triunghiul echilateral ABC are latura BC în planul α , vârful A în afara planului, iar $D = \text{pr}_\alpha A$. Aria triunghiului ABC este egală cu $4\sqrt{3}$ cm², iar aria triunghiului BDC este egală cu $4\sqrt{2}$ cm² (vezi figura 17). **1 punct**
- Demonstrează că $BD = CD = 2\sqrt{3}$ cm.
 - Calculează lungimea segmentului AD .
 - Determină măsura unghiului dintre dreapta AB și planul α .

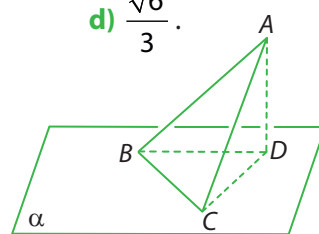


Fig. 17

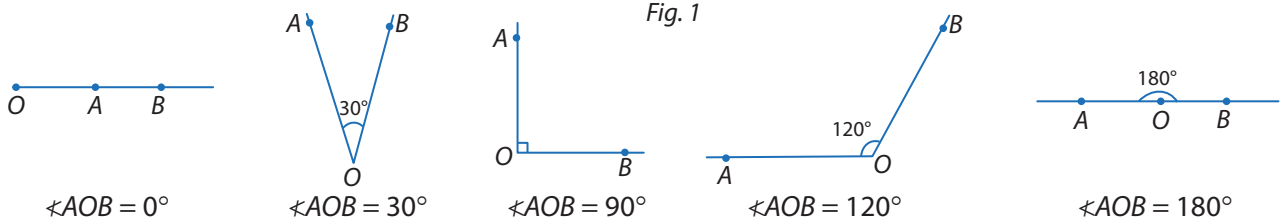
LECȚIA 14

Unghi diedru, unghi plan corespunzător diedrului; unghiul a două plane; plane perpendiculare

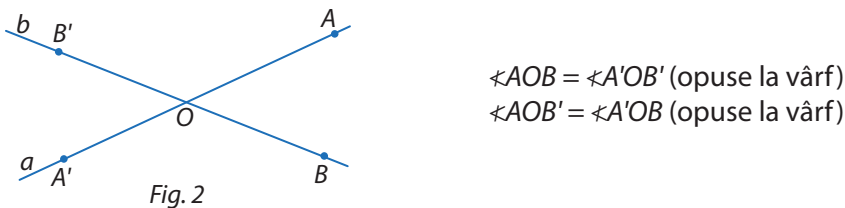


Ne amintim

În clasa a VI-a am învățat că două semidrepte cu aceeași origine formează un unghi. Măsura unui unghi, în grade, poate varia de la 0° la 180° (figura 1).



Două drepte concurente formează patru unghiuri, două câte două egale (figura 2).



Unghiul dreptelor a și b este, prin definiție, unul dintre cele patru unghiuri formate care este mai mic sau egal cu 90° . În figura 2, $\sphericalangle(a, b) = \sphericalangle AOB$.



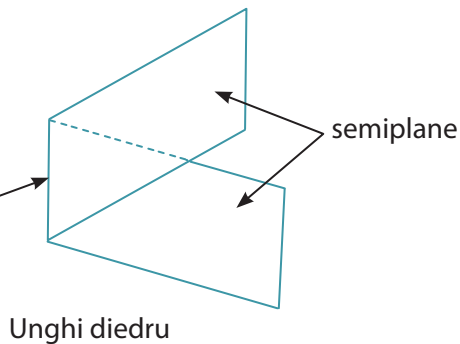
Observăm și descoperim cunoștințe noi

DEFINIȚIE: Figura geometrică formată de două semiplane¹ mărginite de aceeași dreaptă se numește **unghi diedru**.

EXEMPLU:



dreapta care
mărginește cele
două semiplane



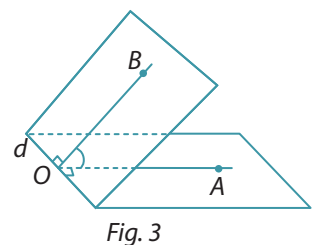
Elementele unui unghi diedru:

- fețele diedrului sunt cele două semiplane;
- muchia diedrului este dreapta care mărginește cele două semiplane.

Pentru a defini măsura unui unghi diedru, vom folosi construcția din figura 3.

Fie O un punct pe d , muchia diedrului, și semidreptele OA , inclusă într-una dintre fețele diedrului, și OB , inclusă în cealaltă față a diedrului, astfel încât $OA \perp d$ și $OB \perp d$. Unghiul AOB astfel construit se numește **unghi plan corespunzător diedrului respectiv**.

OBSERVAȚIE: Măsura unghiului AOB este aceeași, indiferent de poziția punctului O pe dreapta d .



¹ Un semiplan este mulțimea punctelor unui plan situate de aceeași parte a unei drepte din acel plan. Figura, din plan, analoagă semiplanului este semidreapta.



DEFINIȚIE: Măsura unui unghi diedru este măsura unghiului plan corespunzător diedrului. Scriem: $O \in d, OA \perp d, OB \perp d \Rightarrow m(\angle AOB)$ este măsura unghiului diedru din figura 3.

OBSERVAȚIE: Măsura unui unghi diedru poate varia de la 0° la 180° .

Două plane concurente formează patru unghiuri diedre, cele opuse fiind egale (vezi figura 4).

DEFINIȚIE: Unghiul a două plane este unul dintre cele patru unghiuri diedre formate, care este mai mic sau egal cu 90° (vezi figura 4).

$$AA' \cap BB' \cap d = \{O\}$$

$$\angle AOB \leq \angle AOB'$$

Scriem:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \cap \beta = d \\ AA' \perp d, AA' \subset \alpha \\ BB' \perp d, BB' \subset \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \angle(\alpha, \beta) = \angle(AA', BB') = \angle AOB.$$

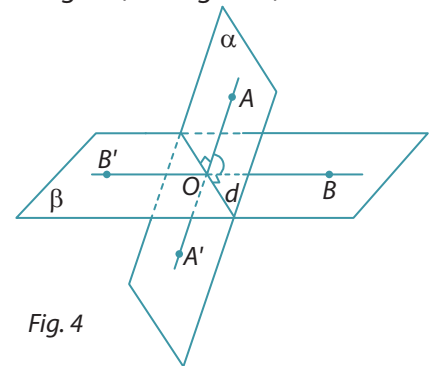


Fig. 4

OBSERVAȚIE: Măsura unghiului a două plane concurente este mai mare decât 0° și mai mică sau egală cu 90° . Vom considera că unghiul a două plane paralele este egal cu 0° .

Dacă două plane au măsura unghiului dintre ele egală cu 90° , atunci ele sunt perpendiculare în sensul definiției din lecția 12 din acest capitol.

Să justificăm acest lucru.

Fie α și β două plane astfel încât $\angle(\alpha, \beta) = 90^\circ$ și $\alpha \cap \beta = d$. Atunci există $O \in d, A \in \alpha, A \neq d, B \in \beta, B \neq d, OA \perp d, OB \perp d$ (figura 5) și $\angle(\alpha, \beta) = \angle AOB = 90^\circ$.

Cum $OA \perp d, OA \perp OB$ ($\angle AOB = 90^\circ$) și $d \cap OB = \{O\}$, rezultă că $OA \perp \beta$. Conform definiției din lecția 12 (capitolul 4), din $OA \perp \beta$ și $OA \subset \alpha$ rezultă că $\alpha \perp \beta$.

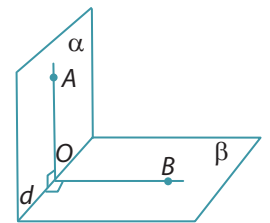


Fig. 5

OBSERVAȚIE: Dacă două plane sunt perpendiculare (în sensul definiției din lecția 12), atunci măsura unghiului dintre ele este egală cu 90° .



Aplicăm cunoștințele

1 În figura 6 este reprezentat cubul $ABCD A'B'C'D'$. Determină:

a) $\angle((ACC'), (BDD'))$;

b) $\angle((ACC'), (BCC'))$.

Rezolvare:

a) Căutăm dreapta comună planelor (ACC') , (BDD') și două drepte (din aceste plane) perpendiculare, în același punct, pe dreapta comună. Dacă $\{O\} = AC \cap BD$ și $\{O'\} = A'C' \cap B'D'$, observăm că $(ACC') \cap (BDD') = (ACC'A') \cap (BDD'B') = OO'$. Cum $OO' \parallel AA'$ (căci $AOO'A'$ este paralelogram) și $AA' \perp (ABC)$, avem $OO' \perp AC$ și $OO' \perp BD$. Prin urmare, din $(ACC') \cap (BDD') = OO', AC \perp OO', AC \subset (ACC'), BD \perp OO', BD \subset (BDD')$ rezultă că $\angle((ACC'), (BDD')) = \angle(AC, BD) = 90^\circ$ (diagonalele unui pătrat sunt perpendiculare).

b) Deoarece $(ACC') \cap (BCC') = CC', AC \perp CC', AC \subset (ACC'), BC \perp CC', BC \subset (BCC')$, rezultă că $\angle((ACC'), (BCC')) = \angle(AC, BC) = 45^\circ$.

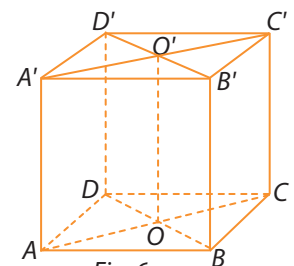


Fig. 6

2 Fie α și β două plane perpendiculare, $\alpha \cap \beta = d$. Demonstrează că, dacă dreapta a , inclusă în planul α , este perpendiculară pe dreapta d , atunci $a \perp \beta$ (figura 7).

Rezolvare:

Fie $a \cap d = \{O\}$ și dreapta $b \subset \beta, O \in b$, astfel încât $b \perp d$. Cum $\alpha \cap \beta = d, a \perp d, a \subset \alpha, b \perp d, b \subset \beta$, rezultă că $\angle(\alpha, \beta) = \angle(a, b) = 90^\circ$. Din $a \perp d, a \perp b, d \cap b = \{O\}$ deducem că $a \perp (d, b) = \beta$.

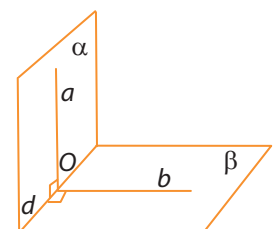


Fig. 7



Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

- 1 Fie $ABCD A'B'C'D'$ un cub. Calculează tangenta unghiului dintre planele $(C'DB)$ și (ABC) .
- 2 Fie $ABCD A'B'C'D'$ o prismă patrulateră regulată, ca în figura 8, cu muchia bazei $AB = 4$ cm și muchia laterală $AA' = 4\sqrt{3}$ cm. Determină măsura unghiului dintre planele $(A'BC)$ și (ABC) .
- 3 În figura 9 este reprezentată o prismă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ cu muchia bazei $AB = 6$ cm și muchia laterală $AA' = 3\sqrt{3}$ cm. Determină măsura unghiului dintre planele $(A'BC)$ și (ABC) .
- 4 În figura 10 este desenată piramida triunghiulară regulată $VABC$ cu vârful V , latura bazei $AB = 6$ cm și înălțimea $VO = 1$ cm. Calculează măsura unghiului dintre planele (VBC) și (ABC) .
- 5 Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu vârful V , latura bazei $AB = 12$ cm și înălțimea $VO = 6\sqrt{3}$ cm. Calculează măsura unghiului dintre planele (VBC) și (ABC) .

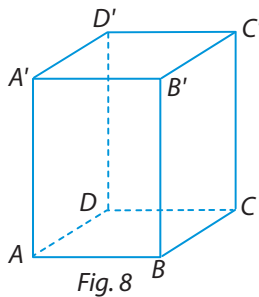


Fig. 8

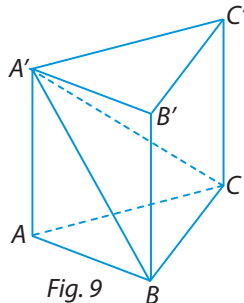


Fig. 9

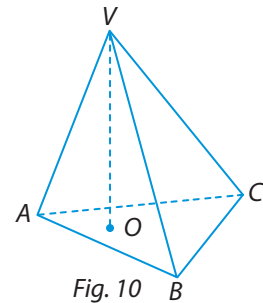


Fig. 10

- 6 Fie $VABC$ o piramidă triunghiulară regulată cu vârful V , latura bazei $AB = 12$ cm și $\cos(\angle((VBC), (ABC))) = \frac{\sqrt{3}}{4}$ (vezi figura 10).
 - a) Calculează lungimea laturii VA .
 - b) Determină $\sin(\angle(VA, (ABC)))$.
- 7 Fie $VABCDEF$ o piramidă hexagonală regulată cu vârful V , latura bazei $AB = 6$ cm și $\angle(VA, (ABC)) = 45^\circ$. Determină:
 - a) $\cos(\angle((VAB), (ABC)))$;
 - b) $\angle((VAD), (ABC))$.
- 8 Fie $ABCD A'B'C'D'$ un trunchi de piramidă patrulateră regulată cu latura bazei mari $AB = 6$ cm, latura bazei mici $A'B' = 2$ cm și înălțimea $OO' = 2\sqrt{3}$ cm (figura 11). Determină măsura unghiului dintre planele (BCC') și (ABC) .
- 9 Fie ABC un triunghi dreptunghic în A , cu $BC = 4$ cm și $AB = 2\sqrt{3}$ cm. Pe perpendiculara în C pe planul ABC se consideră punctul D , astfel încât $CD = 2$ cm (figura 12).
 - a) Demonstrează că $AB \perp (ACD)$.
 - b) Determină măsura unghiului dintre planele (ACD) și (BCD) .
 - c) Determină măsura unghiului dintre planele (ABD) și (ABC) .
- 10 Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu vârful V și $AB = 4\sqrt{3}$ cm. Unghiul planelor (VBC) și (ABC) are măsura de 60° . Calculează lungimea înălțimii piramidei.
- 11 Fie prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ cu $AB = 6$ cm și măsura unghiului dintre planele $(C'AB)$ și (ABC) de 30° (vezi figura 13). Calculează lungimea laturii CC' .
- 12 Fie piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu vârful V , latura bazei $AB = 4\sqrt{3}$ cm și înălțimea $VO = 2$ cm.
 - a) Determină măsura unghiului dintre planele (VBC) și (ABC) .
 - b) Determină măsura unghiului dintre planele (VBC) și (VAD) .

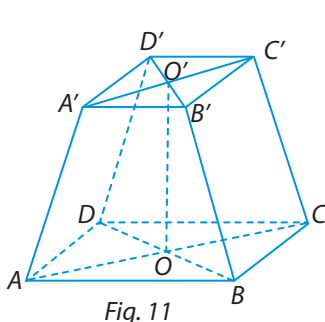


Fig. 11

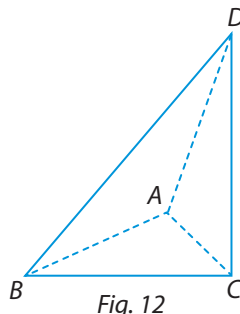


Fig. 12

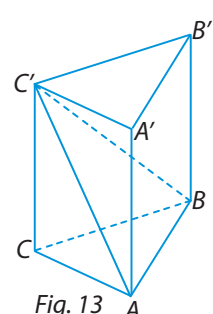


Fig. 13

**Din oficiu: 1 punct****AUTOEVALUARE****Timp de lucru: 40 de minute**

La problemele 1, 2, 3 și 4, alege litera corespunzătoare răspunsului corect.

- 1** Se consideră un cub $ABCA'B'C'D'$. Măsura unghiului dintre planele (ACC') și $(A'B'C')$ este egală cu: **2 puncte**
- a) 30° ; b) 45° ; c) 60° ; d) 90° .
- 2** Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată. Măsura unghiului dintre planele $(A'AB)$ și $(B'BC)$ este egală cu: **2 puncte**
- a) 30° ; b) 45° ; c) 60° ; d) 90° .
- 3** Cosinusul unghiului dintre două fețe ale unui tetraedru regulat este egal cu: **2 puncte**
- a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; c) $\frac{1}{3}$; d) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.
- 4** Propoziția: „În orice piramidă patrulateră regulată, cu vârful V , planele (VAC) și (VBD) sunt perpendiculare.” este: **2 puncte**
- a) adevărată; b) falsă.
- 5** Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu vârful V , latura bazei $AB = 12$ cm și înălțimea $VO = 6$ cm. Punctul M este proiecția punctului O pe muchia VC . **1 punct**
- a) Demonstrează că $VC \perp (BDM)$.
- b) Determină măsura unghiului plan al diedrului format de semiplanele (VBC) și (VCD) .

LECȚIA 15

Teorema celor trei perpendiculare; calculul distanței de la un punct la o dreaptă; calculul distanței de la un punct la un plan; calculul distanței dintre două plane paralele

**Observăm și descoperim cunoștințe noi****Teorema celor trei perpendiculare**

Fie o dreaptă d perpendiculară pe un plan α în punctul O și OA perpendiculară în A pe dreapta $a \subset \alpha$, $O \notin a$. Atunci, oricare ar fi punctul $P \in d$, avem $PA \perp a$ (vezi figura 1).

$$\left. \begin{array}{l} \text{Scriem: } d \perp \alpha, d \cap \alpha = \{O\} \\ OA \perp a, A \in a, a \subset \alpha, O \notin a \\ P \in d \end{array} \right\} \Rightarrow PA \perp a$$

Demonstrație:

Dacă $P = O$, atunci $PA \perp a$ (căci $OA \perp a$).

Presupunem, în continuare, că $P \neq O$. Din relațiile $d \perp \alpha$ și $a \subset \alpha$ rezultă că $d \perp a$ sau $a \perp d$. Cum $a \perp d$, $a \perp OA$ și $d \cap OA = \{O\}$, avem $a \perp (AOP)$. Din $a \perp (AOP)$ și $PA \subset (AOP)$, deducem că $a \perp PA$ sau $PA \perp a$.

EXEMPLU: Fie un dreptunghi $ABCD$ și $EA \perp (ABC)$. Demonstrează că $EB \perp BC$ și $ED \perp DC$ (vezi figura 2).

Rezolvare: Aplicăm teorema celor trei perpendiculare.

Din relațiile $EA \perp (ABC)$, $AB \perp BC$ ($ABCD$ este dreptunghi) și $BC \subset (ABC)$ rezultă că $EB \perp BC$, conform teoremei.

Pentru a doua perpendicularitate procedăm la fel: $EA \perp (ABC)$, $AD \perp DC$ ($ABCD$ este dreptunghi) și $DC \subset (ABC)$ implică $ED \perp DC$, conform teoremei celor trei perpendiculare.

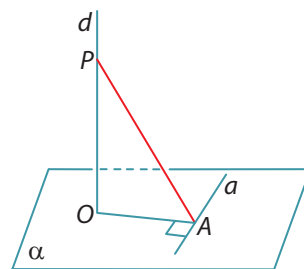


Fig. 1

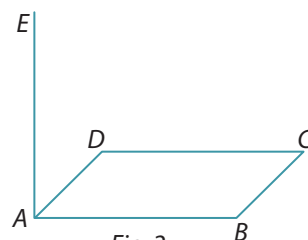


Fig. 2

Teoremă (Reciproca I a teoremei celor trei perpendiculare)

Fie o dreaptă d perpendiculară pe un plan α în punctul O și dreapta a inclusă în α , $O \notin a$. Dacă $PA \perp a$, $P \in d$, $A \in a$, atunci $OA \perp a$ (vezi figura 3).

Scriem:
$$\left. \begin{array}{l} d \perp \alpha, d \cap \alpha = \{O\} \\ a \subset \alpha, O \notin a \\ PA \perp a, P \in d, A \in a \end{array} \right\} \Rightarrow OA \perp a$$

Demonstrație: Dacă $P = O$, atunci $OA \perp a$ (căci $PA \perp a$).

Presupunem, în continuare, că $P \neq O$. Din relațiile $d \perp \alpha$ și $a \subset \alpha$ rezultă că $d \perp a$ sau $a \perp d$. Cum $a \perp d$, $a \perp PA$ și $d \cap PA = \{P\}$, avem $a \perp (AOP)$. Din $a \perp (AOP)$ și $OA \subset (AOP)$, deducem că $a \perp OA$ sau $OA \perp a$.

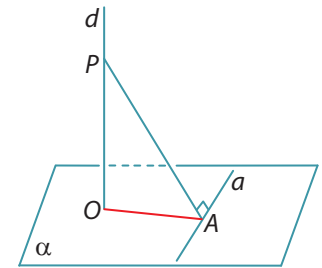


Fig. 3

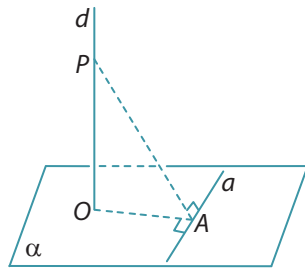


Fig. 4

OBSERVAȚIE: Fie o dreaptă d perpendiculară pe un plan α în punctul O și dreapta a inclusă în α , $O \notin a$. Teorema celor trei perpendiculare și prima ei reciprocă arată că, dacă $P \in d$, $P \neq O$, atunci proiecțiile punctelor P și O pe dreapta a coincid (perpendicularele din P și O pe dreapta a au același picior pe a) (vezi figura 4).

$d \perp \alpha, d \cap \alpha = \{O\}$
 $a \subset \alpha, O \notin a$
 $P \in d, P \neq O$

Prima reciprocă a teoremei celor trei perpendiculare ne poate ajuta să găsim **distanța de la un punct la o dreaptă**.

EXEMPLU: Considerăm tetraedrul $ABCD$ cu proprietățile: $AB \perp (BCD)$, $BC \perp BD$, $AB = 5$ cm, $BC = 15$ cm, $BD = 20$ cm. Determină distanța de la punctul A la dreapta CD (vezi figura 5).

Rezolvare: Fie $AE \perp CD$, $E \in CD$. Cum $AB \perp (BCD)$, $AE \perp CD$ și $CD \subset (BCD)$, rezultă, conform primei reciproce a teoremei celor trei perpendiculare, că $BE \perp CD$. Această observație ne permite să calculăm lungimea segmentului BE astfel: $CD^2 = BC^2 + BD^2 = 15^2 + 20^2 = 25^2$, deci $CD = 25$ cm și deducem că $BE = BC \cdot BD : CD = 12$ cm. Triunghiul ABE este dreptunghic în B , deoarece $AB \perp (BCD)$, deci avem $AE^2 = AB^2 + BE^2 = 5^2 + 12^2 = 13^2$, adică $AE = 13$ cm.

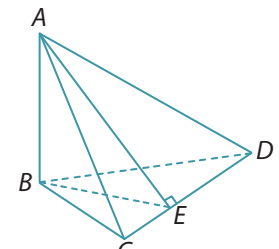


Fig. 5

Teoremă (Reciproca a II-a a teoremei celor trei perpendiculare)

Fie o dreaptă a și A un punct al ei. Considerăm punctele P și O astfel încât $PA \perp a$, $OA \perp a$ și $PO \perp OA$ (punctele O , A , P sunt necoliniare). Atunci PO este perpendiculară pe planul α determinat de dreptele OA și a (vezi figura 6).

Demonstrație: Cum $a \perp PA$, $a \perp OA$ și $PA \cap OA = \{A\}$, rezultă că $a \perp (AOP)$, deci $a \perp PO$ (căci $PO \subset (AOP)$). Din relațiile $PO \perp OA$, $PO \perp a$ și $OA \cap a = \{A\}$ deducem că $PO \perp \alpha = (OA, a)$.

A doua reciprocă a teoremei celor trei perpendiculare ne poate ajuta să calculăm **distanța de la un punct la un plan**.

EXEMPLU: Fie $ABCD$ un tetraedru astfel încât: $AB \perp (BCD)$, $AB = 20$ cm, $BC = BD = 25$ cm și $CD = 40$ cm. Calculează distanța de la vârful B la planul (ACD) (vezi figura 7).

Rezolvare: Căutăm două drepte, situate în planele (BCD) , respectiv (ACD) , care să fie perpendiculare, în același punct, pe CD . Fie M mijlocul lui CD . Triunghiul BCD este isoscel cu baza CD , deci $BM \perp CD$. Cum $AB \perp (BCD)$, $BM \perp CD$ și $CD \subset (BCD)$, rezultă că $AM \perp CD$ (teorema celor trei perpendiculare). Construim $BO \perp AM$, $O \in AM$. Din relațiile $BM \perp CD$, $AM \perp CD$, $BO \perp AM$ rezultă, conform celei de-a doua reciproce a teoremei celor trei perpendiculare, că $BO \perp (ACD)$. Prin urmare, distanța de la vârful B la planul (ACD) este BO . Calculăm lungimea segmentului BO astfel: $BM^2 = BC^2 - CM^2 = 25^2 - 20^2 = 15^2$, $BM = 15$ cm, $AM^2 = BM^2 + AB^2 = 15^2 + 20^2 = 25^2$, $AM = 25$ cm și $BO = AB \cdot BM : AM = 20 \cdot 15 : 25$ cm = 12 cm.

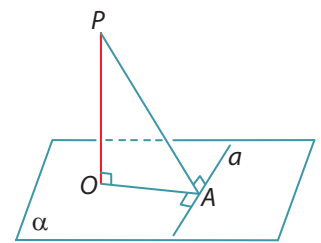


Fig. 6

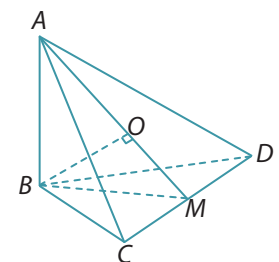
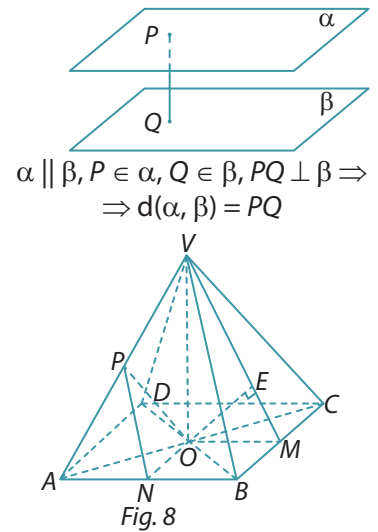


Fig. 7

Dacă planele α și β sunt paralele, atunci distanța dintre ele este egală, de exemplu, cu distanța de la un punct P , care aparține planului α , la planul β :
 $d(\alpha, \beta) = d(P, \beta)$, unde $P \in \alpha$.

EXEMPLU: În figura 8 este reprezentată piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu vârful V , înălțimea $VO = 20$ cm și latura $AB = 30$ cm. Fie N și P mijloacele laturilor AB , respectiv VA . Demonstrează că $(NOP) \parallel (VBC)$ și calculează distanța dintre planele (NOP) și (VBC) .

Rezolvare: Cum $NO \parallel BC$ și $PN \parallel VB$, $NO \cap PN = \{N\}$, rezultă că $(NOP) \parallel (VBC)$.
 Avem $d((NOP), (VBC)) = d(O, (VBC))$. Fie M mijlocul lui BC și $OE \perp VM$, $E \in VM$.
 Din relațiile $OM \perp BC$, $VM \perp BC$ și $OE \perp VM$ rezultă că $OE \perp (VBC)$ (reciproca a doua a teoremei celor trei perpendiculare), deci $d(O, (VBC)) = OE = VO \cdot OM : VM = 20 \cdot 15 : 25 \text{ cm} = 12 \text{ cm}$. Prin urmare, $d((NOP), (VBC)) = 12 \text{ cm}$.



Aplicăm cunoștințele

Considerăm un triunghi dreptunghic ABC cu $\angle A = 90^\circ$, $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm. Fie $DA \perp (ABC)$ astfel încât $DA = 2$ cm și $AE \perp BC$, $E \in BC$ (vezi figura 9).

a) Demonstrează că $DE \perp BC$.

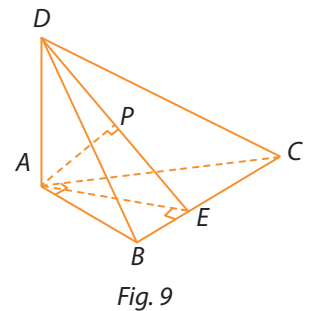
b) Calculează distanța de la punctul A la planul (BCD) .

Rezolvare:

a) Conform teoremei celor trei perpendiculare, din relațiile $DA \perp (ABC)$, $AE \perp BC$ și $BC \subset (ABC)$ rezultă că $DE \perp BC$.

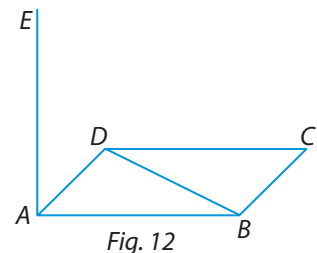
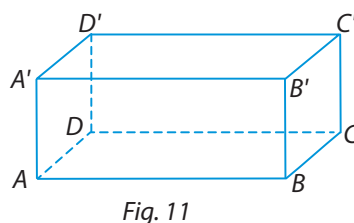
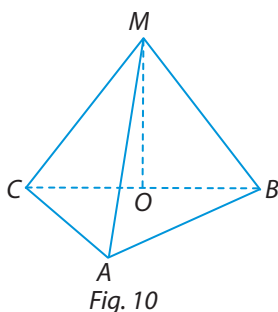
b) Fie $AP \perp DE$, $P \in DE$. Conform celei de-a doua reciproce a teoremei celor trei perpendiculare, din relațiile $AE \perp BC$, $DE \perp BC$ și $AP \perp DE$ rezultă că $AP \perp (BCD)$, deci distanța de la punctul A la planul (BCD) este AP . Avem: $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 100$, deci $BC = 10$ cm; $AE = AB \cdot AC : BC = 4,8$ cm; $DE^2 = DA^2 + AE^2 = 27,04$, deci $DE = 5,2$ cm;

$$AP = AD \cdot AE : DE = \frac{24}{13} \text{ cm}.$$



Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

- 1 Considerăm tetraedrul $ABCD$ cu $AB \perp (BCD)$, $BD \perp DC$, $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm și $CD = 3$ cm. Calculează distanța de la vârful A la muchia CD .
- 2 Fie piramida triunghiulară regulată $VABC$ cu vârful V , muchia $VA = \sqrt{13}$ cm și înălțimea $VO = 1$ cm. Determină distanța de la vârful V la latura BC .
- 3 Considerăm un triunghi ABC , dreptunghic în A , cu $AB = 6$ cm și $BC = 10$ cm. Fie O mijlocul segmentului BC și $OM \perp (ABC)$ astfel încât $OM = 3$ cm (vezi figura 10). Calculează ariile triunghiurilor MAB și MAC .
- 4 Fie $ABCD A'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic cu $AB = 20$ cm, $AD = 15$ cm și $AA' = 5$ cm (vezi figura 11).
 - a) Calculează distanța de la punctul A' la dreapta BD .
 - b) Determină lungimea proiecției segmentului $A'C'$ pe dreapta BD .
- 5 Considerăm un romb $ABCD$ cu $AB = 6$ cm și $\angle BAD = 60^\circ$. Fie $EA \perp (ABC)$, $EA = 3$ cm. Calculează distanța de la punctul E la dreapta BD (vezi figura 12).



- 6** Considerăm un tetraedru $ABCD$ astfel încât $BA \perp AC$ și $BA \perp AD$. Fie $AE \perp CD$, $E \in CD$ (vezi figura 13). Demonstrează că $BE \perp CD$.
- 7** Fie un cub $ABCD A'B'C'D'$, $\{O\} = AB' \cap BA'$, $OE \perp AC'$, $E \in AC'$ (vezi figura 14). Demonstrează că $BO \perp (AB'C')$ și $BE \perp AC'$.
- 8** Fie un tetraedru $ABCD$ astfel încât $AD \perp (DBC)$ și $AB \perp BC$. Determină aria triunghiului DBC , știind că $AD = 3$ m, $AB = 5$ m și $BC = 4$ m (vezi figura 15).

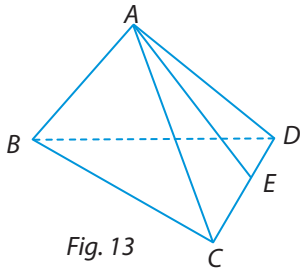


Fig. 13

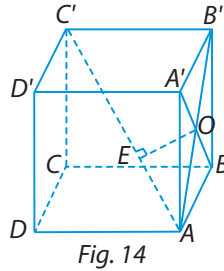


Fig. 14

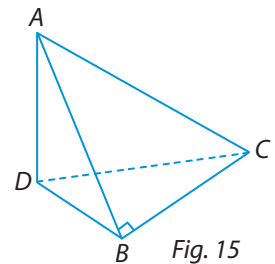


Fig. 15

- 9** Fie un triunghi ABC cu $BC = 8$ cm și un punct S astfel încât $SB \perp (ABC)$. Determină raza cercului circumscris triunghiului ABC , știind că $SA \perp AC$.
- 10** Pe planul paralelogramului $ABCD$ se ridică perpendiculara EA . Fie $\{O\} = AC \cap BD$. Demonstrează că, dacă $EO \perp BD$, atunci $AB = AD$.
- 11** Considerăm un tetraedru $ABCD$ astfel încât $DA \perp (ABC)$. Fie $AE \perp BC$, $E \in BC$ și $AF \perp DE$, $F \in DE$. Demonstrează că $AF \perp (DBC)$ (vezi figura 16).
- 12** Fie $ABCD$ un tetraedru cu $AB \perp (BCD)$, $AB = 15$ dm, $BC = 8$ dm și $\angle ACD = 90^\circ$. Calculează distanța de la vârful B la planul (ACD) .
- 13** Considerăm piramida triunghiulară regulată $VABC$ cu vârful V , înălțimea $VO = 8$ cm și latura bazei $AB = 12\sqrt{3}$ cm.
- Demonstrează că distanța de la punctul O la planul (VBC) este de 4,8 cm.
 - Calculează distanța de la vârful A la planul (VBC) .
- 14** Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu vârful V , înălțimea $VO = 20$ cm și latura bazei $AB = 30$ cm.
- Calculează distanța de la punctul O (centrul bazei) la planul (VBC) .
 - Demonstrează că distanța de la punctul A la planul (VBC) este de 24 cm.
- 15** **Lucru în echipă:** Împreună cu colegul de bancă, rezolvați sarcinile propuse și analizați rezultatele găsite. Considerăm cubul $ABCD A'B'C'D'$. Fie M, N, P mijloacele laturilor AB, CD , respectiv AA' (vezi figura 17).
- Demonstrează că $(MNP) \parallel (A'BC)$.
 - Calculează distanța dintre planele (MNP) și $(A'BC)$, știind că $AB = 12$ cm.
- 16** Fie $VABC$ o piramidă triunghiulară regulată cu vârful V , muchia laterală $VA = 3\sqrt{2}$ cm și muchia bazei $AB = 6$ cm.
- Calculează distanța de la punctul A la planul (VBC) .
 - Calculează cosinusul unghiului dintre planele (VBC) și (ABC) .
- 17** Considerăm un dreptunghi $ABCD$, cu $AB = 3$ cm și $AD = 4$ cm. Fie $VA \perp (ABC)$, $VA = 1$ cm (vezi figura 18).
- Calculează distanța de la punctul V la dreapta BD .
 - Determină tangenta unghiului format de planele (VBD) și (ABC) .

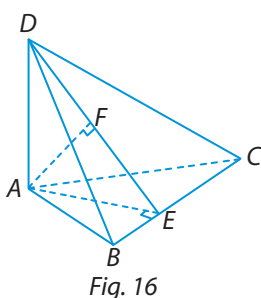


Fig. 16

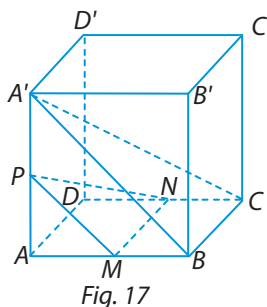


Fig. 17

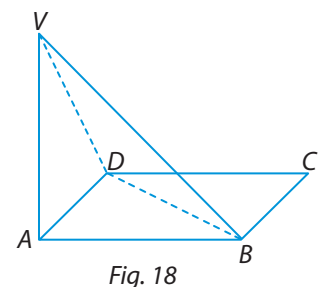


Fig. 18

18 Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată cu latura bazei $AB = 10$ cm și unghiul dintre planele (ABC') și (ABC) de 60° (vezi figura 19).

- a) Demonstrează că $CC' = 15$ cm.
b) Calculează distanța de la punctul C la planul $(C'AB)$.

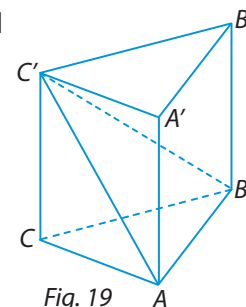


Fig. 19



Din oficiu: 1 punct

AUTOEVALUARE

Timp de lucru: 40 de minute

La problemele 1, 2 și 3, alege litera corespunzătoare răspunsului corect.

1 Fie $ABCD$ un tetraedru cu $AB \perp (BCD)$, $AB = 8$ dm, $BC = 15$ dm și $BC \perp CD$. Distanța de la punctul A la dreapta CD este egală cu: **2 puncte**

- a) 8 dm; b) 15 dm; c) 16 dm; d) 17 dm.

2 Fie $ABCD$ un tetraedru cu $AB \perp (BCD)$, $AB = 8$ cm, $BC = BD = 10$ cm și $CD = 16$ cm. Distanța de la punctul A la dreapta CD este egală cu: **2 puncte**

- a) 8 cm; b) 9 cm; c) 10 cm; d) 16 cm.

3 Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu vârful V , înălțimea $VO = 15$ cm și latura bazei $AB = 40$ cm. Distanța de la punctul O la planul (VAB) este egală cu: **2 puncte**

- a) 12 cm; b) 15 cm; c) 20 cm; d) 30 cm.

4 Fie $ABCD A'B'C'D'$ un cub cu latura de 6 cm. Calculează distanța de la punctul A la planul $(A'BD)$. **2 puncte**

5 Fie $ABCD A'B'C'D'$ un trunchi de piramidă patrulateră regulată cu latura bazei mari $AB = 12$ cm, latura bazei mici $A'B' = 4$ cm și înălțimea trunchiului $OO' = 3$ cm ($\{O\} = AC \cap BD$, $\{O'\} = A'C' \cap B'D'$). Calculează distanța de la punctul O la planul (DCC') . **1 punct**

FIȘĂ DE OBSERVARE SISTEMATICĂ A ACTIVITĂȚII ȘI A COMPORTAMENTULUI ELEVULUI

Autoevaluarea activității elevului în procesul de învățare este un instrument util atât cadrului didactic, cât și elevului, pentru a putea determina implicarea acestuia pe parcursul unui capitol.

Copiază pe o foaie de hârtie următorul tabel, completează-l, solicită observațiile profesorului și adaugă-l la portofoliul personal.

Răspunsuri	Autoevaluarea elevului Da/Nu/Parțial	Observațiile profesorului
Am participat activ la fiecare lecție.		
Am recapitulat înainte de fiecare lecție noțiunile învățate anterior.		
Am pus întrebări atunci când am avut nelămuriri.		
Am răspuns la întrebările profesorului sau ale colegilor.		
Am colaborat cu colegii la activitățile desfășurate.		
Am obținut la testul de recapitulare și evaluare nota ...		

1. PROBLEME RECAPITULATIVE

1 Fie $ABCD A'B'C'D'$ un cub cu latura $AB = 4$ cm. Punctele M și N sunt mijloacele laturilor $C'D'$, respectiv $B'C'$ (vezi figura 1).

- Demonstrează că $BN = DM$.
- Demonstrează că punctele B, D, M și N sunt coplanare.

2 În figura 2 este reprezentată o prismă patrulateră regulată $ABCD A'B'C'D'$ cu muchia bazei $AB = 2$ cm și muchia laterală $AA' = 15$ cm. Punctele M, N, P sunt situate pe muchiile BB', CC' , respectiv DD' .

- Calculează aria bazei $ABCD$.
- Determină valoarea minimă a sumei $AM + MN + NP + PA'$.

3 Fie $ABCD$ un tetraedru regulat cu muchia $AB = 12$ cm și punctele $M \in (AB), N \in (BC), Q \in (AD)$, astfel încât $MN \parallel AC$ și $MQ \parallel BD$. Planul (MNQ) intersectează muchia CD în punctul P (vezi figura 3).

- Calculează suma muchiilor tetraedrului $ABCD$.
- Demonstrează că patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram.

4 Fie $ABCD A'B'C'D'$ un cub cu latura $AB = 6$ cm și $\{O\} = AC \cap BD$ (vezi figura 4).

- Arată că aria triunghiului $AB'D'$ este egală cu $18\sqrt{3}$ cm².
- Demonstrează că dreapta $C'O$ este paralelă cu planul $(AB'D')$.

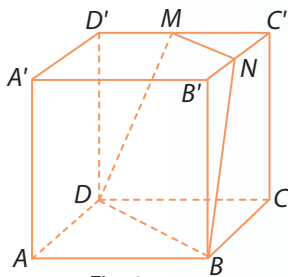


Fig. 1

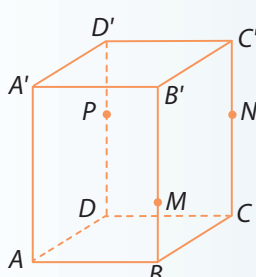


Fig. 2

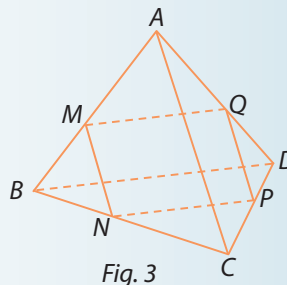


Fig. 3

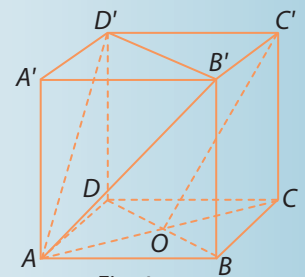


Fig. 4

5 Fie $ABCD A'B'C'D'$ un cub cu latura $AB = 8$ cm și M, N centrele fețelor $ABCD$, respectiv $BCC'B'$ (vezi figura 5).

- Calculează aria secțiunii diagonale $ACCA'$.
- Demonstrează că dreapta MN este paralelă cu planul $(A'C'D)$.

6 În figura 6 este reprezentat paralelipipedul dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$ cu $AB = 4$ cm, $BC = 3$ cm și $AA' = 12$ cm. Fie E simetricul punctului A față de punctul B .

- Calculează lungimea diagonalei $A'C$.
- Demonstrează că planele (BDD') și (ECC') sunt paralele.

7 În figura 7 este desenată o prismă triunghiulară regulată cu muchia bazei $AB = 15$ cm și muchia laterală $AA' = 20$ cm. Punctele M, N, P sunt mijloacele muchiilor $A'B', BB'$, respectiv CC' .

- Arată că planele $(A'BC)$ și (MNP) sunt paralele.
- Demonstrează că $MP \parallel (A'BC)$.

8 Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu vârful V , muchia laterală $VA = 6\sqrt{3}$ cm și înălțimea $VO = 6$ cm (vezi figura 8).

- Arată că $AB = 12$ cm.
- Calculează distanța de la punctul A la dreapta VB .

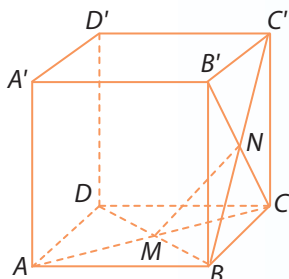


Fig. 5

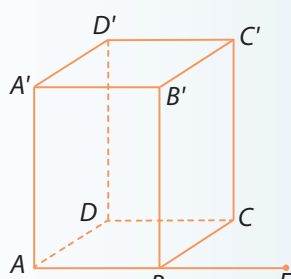


Fig. 6

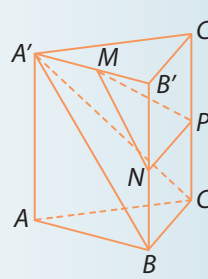


Fig. 7

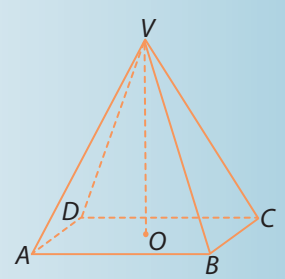


Fig. 8

9 Fie $ABCA'B'C'$ un trunchi de piramidă triunghiulară regulată cu muchia bazei mari $AB = 12$ dm, muchia bazei mici $A'B' = 6$ dm și muchia laterală $AA' = 3\sqrt{2}$ dm (vezi figura 9).

- Determină măsura unghiului dintre dreptele AB și $B'C'$.
- Determină măsura unghiului dintre dreptele AA' și BB' .

10 Considerăm piramida triunghiulară regulată $VABC$ cu vârful V , $AB = 12$ cm și $VA = 6\sqrt{2}$ cm. Punctul M este mijlocul laturii AB (vezi figura 10).

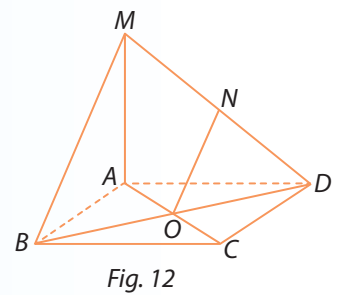
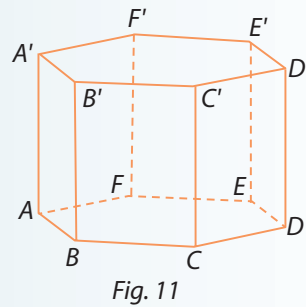
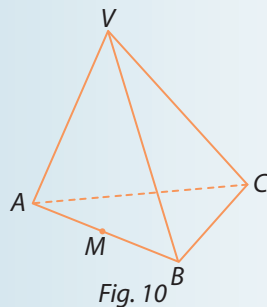
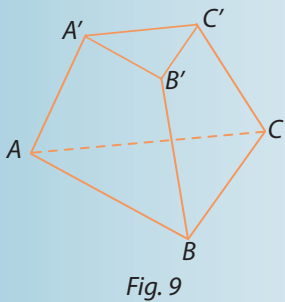
- Arată că triunghiul VMC este dreptunghic.
- Calculează măsura unghiului dintre dreptele VM și AC .

11 În figura 11 este desenată prisma hexagonală regulată $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$.

- Determină lungimea muchiei AB , știind că suma tuturor muchiilor prisme este egală cu 36 cm și $AB = AA'$.
- Demonstrează că dreapta AB este perpendiculară pe planul (BDD') .

12 Fie $ABCD$ un pătrat cu $AB = 2$ cm și $MA \perp (ABC)$, $MA = 2$ cm.

- Arată că triunghiul MBD este echilateral.
- Calculează măsura unghiului dintre dreptele ON și CD , unde $\{O\} = AC \cap BD$, iar N este mijlocul segmentului MD (vezi figura 12).



13 În figura 13 este reprezentat trunchiul de piramidă patrulateră regulată $ABCD A'B'C'D'$ cu latura bazei mari $AB = 12$ cm, latura bazei mici $A'B' = 6$ cm și înălțimea $OO' = 3\sqrt{2}$ cm.

- Calculează aria secțiunii diagonale $ACCA'$.
- Determină lungimea proiecției segmentului AA' pe planul $(C'BD)$.

14 Fie $ABCD A'B'C'D'$ o prismă patrulateră regulată cu muchia bazei $AB = 2$ m și muchia laterală $AA' = 2\sqrt{3}$ m. Punctele O și M sunt centrele fețelor $ABCD$, respectiv $BCC'B'$ (vezi figura 14).

- Arată că $OM = 2$ m.
- Determină măsura unghiului dintre dreapta OM și planul (BCC') .

15 Fie piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu vârful V , latura bazei $AB = 3\sqrt{2}$ cm și înălțimea $VO = 4$ cm (vezi figura 15).

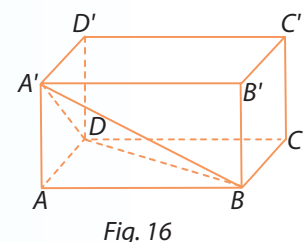
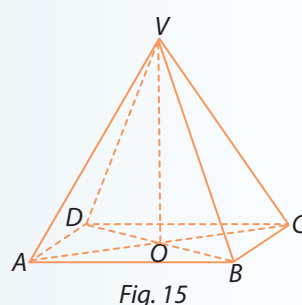
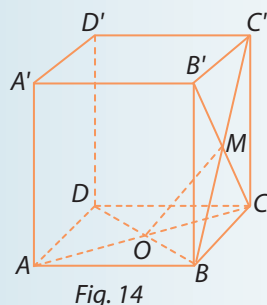
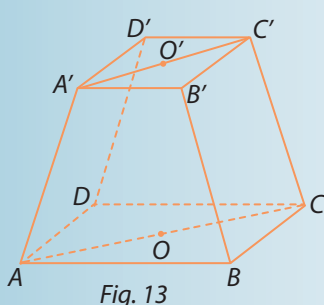
- Determină tangenta unghiului format de dreapta VA cu planul (ABC) .
- Calculează tangenta unghiului determinat de planele (VAC) și (VBC) .

16 Fie $VABCDEF$ o piramidă hexagonală regulată cu vârful V , latura bazei $AB = 6$ cm și înălțimea $VO = 9$ cm.

- Calculează măsura unghiului dintre planele (VAB) și (ABC) .
- Secționăm piramida cu un plan paralel cu baza dus prin punctul $Q \in (VO)$, $VQ = 3$ cm. Calculează aria acestei secțiuni.

17 Fie $ABCD A'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile: $AB = 8\sqrt{5}$ cm, $AD = 4\sqrt{5}$ cm și $AA' = 15$ cm (vezi figura 16). Calculează:

- aria triunghiului $A'BD$;
- distanța de la punctul A la planul $(A'BD)$.



18 Considerăm cubul $ABCD A'B'C'D'$ cu $AB = 4$ cm. Fie M mijlocul segmentului $A'B'$ și O punctul de intersecție a dreptelor AC și BD .

- Calculează lungimea segmentului CM .
- Determină distanța de la punctul O la planul (CMD) .

19 În figura 17 este reprezentată o prismă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ cu $AB = AA' = 12$ cm. Punctele N, P, Q sunt mijloacele segmentelor $BB', B'C',$ respectiv $A'C'$.

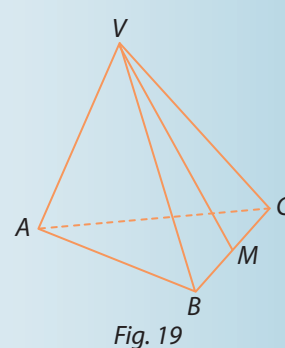
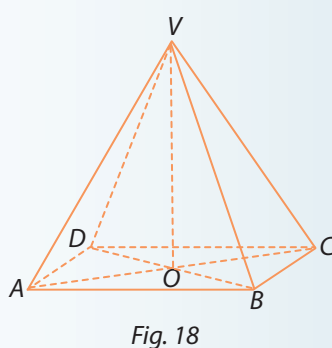
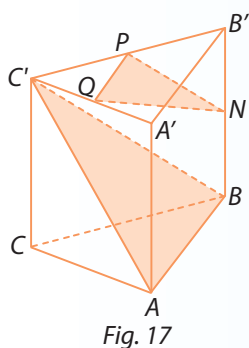
- Arată că planele (NPQ) și $(C'AB)$ sunt paralele.
- Calculează lungimea proiecției segmentului NQ pe planul $(C'AB)$.

20 În figura 18 este reprezentată o piramidă patrulateră regulată $VABCD$ cu vârful V , latura $AB = 10$ cm și înălțimea $VO = 5\sqrt{3}$ cm.

- Calculează aria triunghiului VAB .
- Determină măsura unghiului planelor (VAD) și (VBC) .

21 În figura 19 este desenată piramida triunghiulară regulată $VABC$ cu vârful V , $VA = 10$ cm și $AB = 12$ cm. Punctul M este mijlocul laturii BC .

- Calculează lungimea segmentului VM .
- Determină măsura unghiului dintre dreapta AB și planul (VAM) .



22 În figura 20 este reprezentat un cilindru circular drept, având secțiunea axială pătratul $ABB'A'$ cu aria 144 cm^2 .

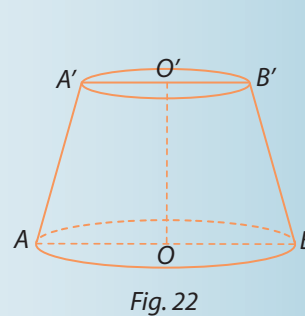
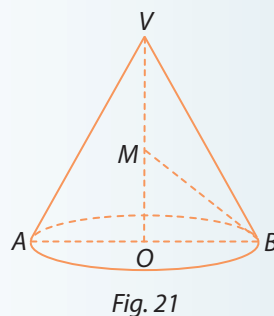
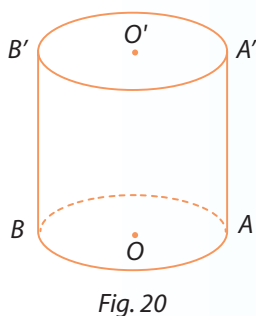
- Calculează aria bazei cilindrului.
- O furnică pornește din punctul A și merge pe suprafața laterală a cilindrului până ajunge în punctul B' . Demonstrează că furnica parcurge mai mult de 21 cm.

23 În figura 21 este reprezentat un con circular drept cu vârful V , generatoarea $VA = 10$ cm și diametrul bazei $AB = 12$ cm.

- Calculează aria secțiunii axiale a conului.
- Fie un punct M situat pe înălțimea VO a conului, astfel încât M este egal depărtat de V și de punctele cercului de bază. Calculează distanța de la M la planul bazei.

24 În figura 22 este desenat un trunchi de con circular drept cu secțiunea axială $ABB'A'$, $O'A' = 3$ cm, $OA = 12$ cm și $AA' = 15$ cm.

- Calculează înălțimea trunchiului de con.
- Determină înălțimea conului din care provine trunchiul.



2. TEST DE EVALUARE

Timp de lucru: 45 de minute.

I. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

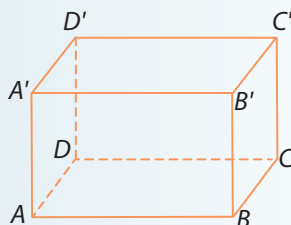
30 de puncte

- (5p) 1. Dacă $ABCD$ este un tetraedru regulat cu latura $AB = 2$ cm, atunci aria uneia dintre fețele tetraedrului este egală cu:
 A. $4\sqrt{3}$ cm²; B. 4 cm²; C. $2\sqrt{3}$ cm²; D. $\sqrt{3}$ cm².
- (5p) 2. Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu vârful V și $VA = AB = 4$ cm. Suma lungimilor tuturor muchiilor piramidei este egală cu:
 A. 8 cm; B. 16 cm; C. 32 cm; D. 48 cm.
- (5p) 3. Un con circular drept are înălțimea $h = 8$ cm și generatoarea $g = 10$ cm. Aria bazei conului este egală cu:
 A. 6π cm²; B. 36π cm²; C. 64π cm²; D. 144π cm².
- (5p) 4. Fie $ABCD A'B'C'D'$ un cub. Măsura unghiului dintre dreptele AC și $B'C'$ este egală cu:
 A. 30°; B. 45°; C. 60°; D. 90°.
- (5p) 5. Un paralelipiped dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$ are $AB = 2\sqrt{3}$ cm și $AA' = 2$ cm. Măsura unghiului format de planele (ABC) și $(A'BC)$ este egală cu:
 A. 30°; B. 45°; C. 60°; D. 90°.
- (5p) 6. Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu vârful V și $VA = AB$. Măsura unghiului format de muchia laterală VA cu planul bazei (ABC) este egală cu:
 A. 30°; B. 45°; C. 60°; D. 90°.

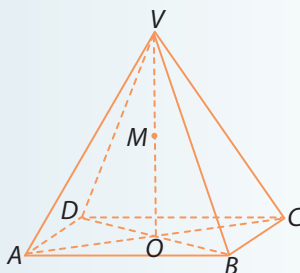
II. Scrie rezolvările complete.

60 de puncte

1. În figura de mai jos este reprezentată prisma patrulateră regulată $ABCD A'B'C'D'$ cu $AB = BC = 4$ cm și $AA' = 2$ cm.



- (10p) a) Calculează perimetrul patrulaterului $ADD'A'$.
 (10p) b) Determină măsura unghiului dintre dreapta AC și planul (BDD') .
 (10p) c) Determină distanța de la punctul A la dreapta $B'M$, unde M este mijlocul laturii BC .
2. În figura de mai jos este desenată piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu vârful V , latura bazei $AB = 8$ cm și înălțimea $VO = 4\sqrt{3}$ cm. Punctul M este mijlocul segmentului VO .



- (10p) a) Calculează lungimea laturii VA .
 (10p) b) Determină măsura unghiului format de planele (VBC) și (ABC) .
 (10p) c) Calculează distanța de la punctul M la planul (VBC) .

Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota se obține împărțind punctajul final la 10.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	I.5	I.6	II.1a	II.1b	II.1c	II.2a	II.2b	II.2c
Punctajul												
Nota												

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE 5

ARII ȘI VOLUME ALE UNOR CORPURI GEOMETRICE

- 
- L1. Cubul. Distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul cubului. Aria laterală, aria totală și volumul cubului
- L2. Paralelipipedul dreptunghic. Distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul paralelipipedului dreptunghic. Aria și volumul paralelipipedului dreptunghic
- L3. Prisma dreaptă cu baza triunghi echilateral, pătrat sau hexagon regulat. Distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul prisme. Aria laterală, aria totală și volumul prisme regulate
- L4. Piramida regulată. Distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul piramidei regulate. Aria laterală, aria totală și volumul piramidei regulate
- L5. Trunchiul de piramidă regulată. Distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul trunchiului de piramidă regulată. Aria laterală, aria totală și volumul trunchiului de piramidă regulată
- L6. Cilindrul circular drept. Distanțe și măsuri de unghiuri pe suprafața sau în interiorul cilindrului circular drept. Aria laterală, aria totală și volumul cilindrului circular drept
- L7. Conul și trunchiul de con. Distanțe și măsuri de unghiuri pe suprafața sau în interiorul conului circular drept sau trunchiului de con circular drept. Aria laterală, aria totală și volumul conului circular drept, respectiv ale trunchiului de con circular drept
- L8. Sfera: arie și volum

Recapitulare și evaluare

1. Probleme recapitulative
2. Test de evaluare

LECȚIA 1

Cubul. Distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul cubului. Aria laterală, aria totală și volumul cubului

Observăm și descoperim cunoștințe noi

În figura 1, $ABCD A'B'C'D'$ este un cub. Diagonala unei fețe a cubului cu muchia de lungime l este egală cu $l\sqrt{2}$ (de exemplu, $BC' = AC = l\sqrt{2}$).

Diagonala cubului este segmentul determinat de două vârfuri care nu se găsesc pe aceeași față a cubului.

Lungimea diagonalei cubului este egală cu $l\sqrt{3}$ (de exemplu, $AC' = BD' = l\sqrt{3}$).

Aria laterală a cubului este suma ariilor fețelor laterale:

$$A_{\text{lat}} = 4 \cdot A_{\text{față}}$$

$$A_{\text{lat}} = 4l^2$$

Aria totală a cubului este suma ariilor tuturor fețelor:

$$A_{\text{tot}} = 6 \cdot A_{\text{față}}$$

$$A_{\text{tot}} = 6l^2$$

Volumul cubului este:

$$V = l^3$$

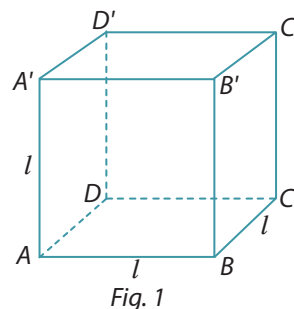


Fig. 1

Rezolvăm împreună

În figura 2 este reprezentat cubul $ABCD A'B'C'D'$ cu $AB = l$ cm.

1 Calculează măsura unghiului dintre planele $(A'BC)$ și (ABC) .

Rezolvare:

$$\left. \begin{array}{l} (A'BC) \cap (ABC) = BC \\ \text{În } (A'BC): A'B \perp BC \\ \text{În } (ABC): AB \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow \angle((A'BC), (ABC)) = \angle A'BA = 45^\circ$$

(deoarece $ABB'A'$ este pătrat cu diagonala $A'B$).

2 Calculează măsura unghiului dintre fețele (ABB') și (BCC') .

Rezolvare:

$$\left. \begin{array}{l} (ABB') \cap (BCC') = BB' \\ \text{În } (ABB'): AB \perp BB' \\ \text{În } (BCC'): CB \perp BB' \end{array} \right\} \Rightarrow \angle((ABB'), (BCC')) = \angle ABC = 90^\circ$$

3 Calculează distanțele de la vârful A' la muchiile AB și BC ale cubului $ABCD A'B'C'D'$.

Rezolvare:

$$A = \text{pr}_{AB} A' \Rightarrow AA' \perp AB \Rightarrow d(A', AB) = AA' = l \text{ cm};$$

$$\left. \begin{array}{l} AA' \perp (ABC) \\ AB \perp BC \\ AB, BC \subset (ABC) \end{array} \right\} \xrightarrow{T_3 \perp} d(A', BC) = A'B = l\sqrt{2} \text{ cm}.$$

4 Determină distanța de la vârful D' la AC .

Rezolvare:

Fie $\{O\} = AC \cap BD$. Deoarece $ABCD$ este pătrat, rezultă că $AC \perp BD$, deci $DO \perp AC$.

$$DD' \perp (ABC), DO \perp AC \text{ și } DO, AC \subset (ABC) \xrightarrow{T_3 \perp} D'O \perp AC \Rightarrow d(D', AC) = D'O.$$

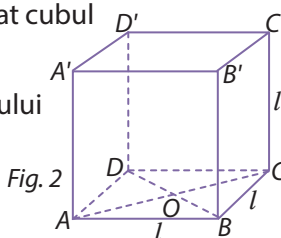


Fig. 2

$$ABCD - \text{pătrat} \Rightarrow BD = l\sqrt{2} \text{ cm} \Rightarrow DO = \frac{BD}{2} = \frac{l\sqrt{2}}{2} \text{ cm};$$

$$DD' \perp (ABC) \text{ și } DB \subset (ABC) \Rightarrow DD' \perp DB.$$

$$\begin{aligned} \text{În } \triangle D'DO \quad (\angle D'DO = 90^\circ) &\xrightarrow{\text{T. Pitagora}} D'O^2 = D'D^2 + DO^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow D'O^2 = l^2 + \frac{2l^2}{4} = \frac{6l^2}{4} &\Rightarrow D'O = \frac{l\sqrt{6}}{2} \text{ cm} = d(D', AC). \end{aligned}$$

5 Determină distanța de la O , centrul bazei $ABCD$, la fața $(BCC'B')$ a cubului $ABCD A'B'C'D'$.

Rezolvare:

$$\begin{aligned} C'C \perp (ABC) \text{ și } C'C \subset (BCC') &\Rightarrow (BCC') \perp (ABC) \text{ și } (BCC') \cap \\ \cap (ABC) = BC. \text{ Fie } OM \perp BC, M \in BC, OM &\subset (ABC) \Rightarrow \\ \Rightarrow OM \perp (BCC') &\Rightarrow d(O, (BCC')) = OM = \frac{l}{2} \text{ cm}. \end{aligned}$$

6 Determină tangenta unghiului dintre diagonala BD' și planul bazei (ABC) în cubul $ABCD A'B'C'D'$.

Rezolvare:

$$\begin{aligned} \text{pr}_{(ABC)} D' = D &\Rightarrow \text{pr}_{(ABC)} BD' = BD \Rightarrow \angle(BD', (ABC)) = \\ = \angle(BD', BD) &= \angle D'BD. \end{aligned}$$

$$\text{În } \triangle D'BD, \angle D'DB = 90^\circ \Rightarrow \text{tg}(\angle D'BD) = \frac{DD'}{DB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

7 Determină măsura unghiului dintre AD' și CD' .

Rezolvare:

$$\triangle AD'C \text{ este echilateral, deci } \angle(AD', CD') = \angle AD'C = 60^\circ.$$

8 Determină măsura unghiului dintre secțiunea diagonală $(ACC'A')$ și planul bazei (ABC) în cubul $ABCD A'B'C'D'$.

Rezolvare:

$$AA' \perp (ABC) \text{ și } AA' \subset (ACC') \Rightarrow (ACC') \perp (ABC) \Rightarrow \angle((ACC'), (ABC)) = 90^\circ.$$



Aplicăm cunoștințele

În figura 3 este reprezentat cubul $ABCD A'B'C'D'$ cu $l = AB = 6$ cm, iar O este centrul bazei $ABCD$.

- Calculează volumul cubului $ABCD A'B'C'D'$.
- Determină tangenta unghiului dintre $C'O$ și planul (ABC) .
- Determină lungimea segmentului CM , unde M este mijlocul muchiei $A'B'$.

Rezolvare:

a) $V = l^3 = 216 \text{ cm}^3$;

b) $\angle(C'O, (ABC)) = \angle(C'O, \text{pr}_{(ABC)} C'O) = \angle(C'O, CO) = \angle C'OC$.

În $\triangle C'CO$, $\angle C = 90^\circ \Rightarrow \text{tg}(\angle C'OC) = \frac{CC'}{OC} = \frac{6}{3\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

c) $MB' \perp (B'BC)$, $B'C \subset (B'BC) \Rightarrow MB' \perp B'C \Rightarrow \triangle MB'C$ are $\angle B' = 90^\circ \xrightarrow{\text{T.P.}} CM^2 = 3^2 + (6\sqrt{2})^2 = 81 \Rightarrow CM = 9$ cm.

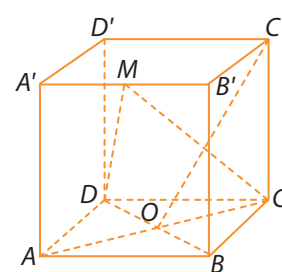


Fig. 3

Reține!

Într-un cub cu muchia de lungime l au loc relațiile:

• $\mathcal{A}_{\text{lat}} = 4l^2$; • $\mathcal{A}_{\text{tot}} = 6l^2$; • $V = l^3$; • $d = l\sqrt{3}$, unde d este lungimea diagonalei cubului.



Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

- Calculează volumul unui cub cu lungimea muchiei de 2 cm.
- Determină aria laterală a unui cub cu lungimea diagonalei cubului de $4\sqrt{3}$ cm.
- Determină lungimea laturii unui cub cu aria totală de 24 cm^2 .
- Calculează lungimea diagonalei unei fețe a unui cub cu aria laterală de 72 cm^2 .
- Calculează lungimea diagonalei cubului cu volumul de 27 cm^3 .
- Suma lungimilor tuturor muchiilor unui cub este 48 cm. Calculează aria totală a cubului.
- Aria secțiunii diagonale a unui cub este de $36\sqrt{2} \text{ cm}^2$. Calculează suma lungimilor tuturor muchiilor cubului.
- Lucru în echipă:** Împreună cu colegul de bancă, rezolvați sarcinile propuse și analizați rezultatele găsite.
În figura 4 este desenat un cub $ABCD A'B'C'D'$. Copiază și completează tabelul de mai jos, în care l , $d_{\text{față}}$, d , $\mathcal{A}_{\text{lat}}$, $\mathcal{A}_{\text{tot}}$ și V sunt lungimea laturii, a diagonalei unei fețe, a diagonalei cubului (măsurate în cm), aria laterală, aria totală (măsurate în cm^2), respectiv volumul cubului (măsurat în cm^3).

	l	$d_{\text{față}}$	d	$\mathcal{A}_{\text{lat}}$	$\mathcal{A}_{\text{tot}}$	V
a)	6					
b)		$8\sqrt{2}$				
c)			$12\sqrt{3}$			
d)				24		
e)					216	
f)						64

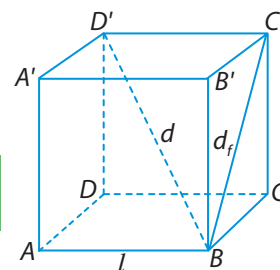


Fig. 4

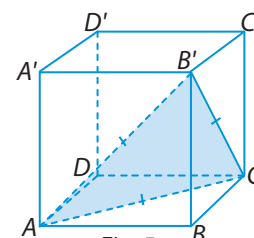
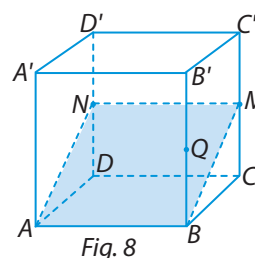
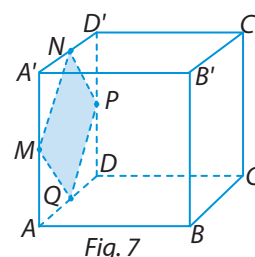
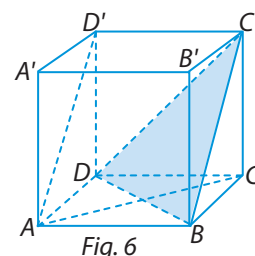


Fig. 5

- În cubul $ABCD A'B'C'D'$ din figura 5, $l = AB = 6$ cm. Calculează:
 - unghiul dintre dreptele AC și $B'C$;
 - distanța de la punctul B' la dreapta AB ;
 - distanța de la punctul B' la dreapta AD .



- 10** Aria totală a unui cub $ABCD A'B'C'D'$ este egală cu 24 cm^2 .
- Arată că triunghiul $AB'C$ este echilateral.
 - Calculează aria triunghiului $AB'C$.
- 11** Un cub $ABCD A'B'C'D'$ cu latura $L = AB = 6 \text{ cm}$ este vopsit verde, apoi este secționat astfel încât să se obțină 27 de cubulețe identice.
- Calculează volumul cubului $ABCD A'B'C'D'$.
 - Care este volumul unui cubuleț?
 - Determină muchia l a unui cubuleț.
 - Câte cubulețe au câte trei fețe vopsite verde?
 - Câte cubulețe nu au nicio față vopsită?
 - Câte cubulețe au doar o față vopsită verde?
 - Câte cubulețe au câte două fețe vopsite verde?
- 12** În figura 6 este reprezentat cubul $ABCD A'B'C'D'$ cu muchia $l = AB = 4 \text{ cm}$.
- Determină aria cubului $ABCD A'B'C'D'$.
 - Calculează măsura unghiului dintre dreptele AD' și BD .
 - Demonstrează că $D'A \perp AB$.
 - Calculează distanța de la punctul D' la AB .
 - Calculează distanța de la punctul C la planul (BDC') .
- 13** În figura 7 este reprezentat cubul $ABCD A'B'C'D'$ cu $l = AB = 12 \text{ cm}$. Punctele M, N, P, Q sunt mijloacele segmentelor $AA', A'D', DD',$ respectiv AD .
- Calculează lungimea diagonalei cubului $ABCD A'B'C'D'$.
 - Determină aria triunghiului ACB' .
 - Calculează perimetrul patrulaterului $MNPQ$.
 - Calculează distanța de la punctul C la dreapta PQ .
 - Determină măsura unghiului dintre dreptele MN și BC .
 - Determină măsura unghiului dintre dreapta MN și planul (ABC) .
- 14** În figura 8 este reprezentat cubul $ABCD A'B'C'D'$ cu $l = AB = 12 \text{ cm}$. Punctele M și N sunt mijloacele muchiilor CC' și DD' .
- Arată că aria laterală a cubului este 576 cm^2 .
 - Calculează sinusul unghiului dintre planele (AMN) și (ABC) .
 - Determină distanța de la punctul D' la planul (AMN) .
- 15** Un cub cu muchia de 5 cm este vopsit roșu pe toate cele 6 fețe ale sale. Întregul cub este apoi tăiat în cubulețe mai mici cu muchia de 1 cm . Câte cubulețe nu au vopsea pe fețele lor?
- 16** Maria are o cutie fără capac. Cutia are forma unui cub cu muchia de 8 cm . Maria umple cutia cu cubulețe identice cu muchia de 2 cm . Câte dintre aceste cubulețe sunt în contact cu cutia?



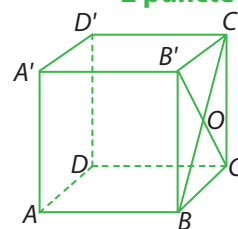
Din oficiu: 1 punct

AUTOEVALUARE

Timp de lucru: 40 de minute

Pentru fiecare problemă, alege litera corespunzătoare răspunsului corect.

- Măsura unghiului dintre muchiile $A'B'$ și BC în cubul $ABCD A'B'C'D'$ este de: **2 puncte**
 - 60° ;
 - 30° ;
 - 45° ;
 - 90° .
- Unghiul dintre muchia AD' și muchia BC în cubul $ABCD A'B'C'D'$ are măsura de: **2 puncte**
 - 60° ;
 - 90° ;
 - 45° ;
 - 30° .
- Fie $ABCD A'B'C'D'$ un cub cu suma lungimilor tuturor muchiilor egală cu 120 cm . Aria totală a cubului este egală cu: **2 puncte**
 - 400 cm^2 ;
 - 600 cm^2 ;
 - 1440 cm^2 ;
 - 480 cm^2 .
- În figura alăturată, $ABCD A'B'C'D'$ este cub cu $AB = 6 \text{ cm}$, iar O este centrul feței $(BCC'B')$. Lungimea segmentului AO este egală cu: **2 puncte**
 - $3\sqrt{6} \text{ cm}$;
 - $6\sqrt{2} \text{ cm}$;
 - 6 cm ;
 - 12 cm .
- Andra lipește 216 cubulețe cu muchia de 10 cm și obține un cub mare. Propoziția „Muchia cubului mare este egală cu 60 cm .” este: **1 punct**
 - adevărată;
 - falsă.



LECȚIA 2

Paralelipipedul dreptunghic. Distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul paralelipipedului dreptunghic. Aria și volumul paralelipipedului dreptunghic

Observăm și descoperim cunoștințe noi

În figura 1, $ABCD A'B'C'D'$ este un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile: $a = AB$ (lungimea), $b = BC$ (lățimea) și $c = CC'$ (înălțimea).

Diagonala paralelipipedului dreptunghic este:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

EXEMPLU: În paralelipipedul dreptunghic din figura 1, $d = AC' = BD' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Aria laterală a paralelipipedului dreptunghic este suma ariilor fețelor laterale:

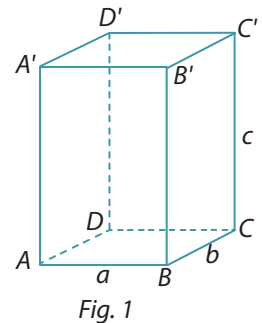
$$\mathcal{A}_{\text{lat}} = \mathcal{P}_{\text{bază}} \cdot h = 2(a + b) \cdot c$$

Aria totală a paralelipipedului dreptunghic este suma ariilor tuturor fețelor sale:

$$\mathcal{A}_{\text{tot}} = 2ab + 2ac + 2bc$$

Volumul paralelipipedului dreptunghic este:

$$\mathcal{V} = a \cdot b \cdot c$$



Rezolvăm împreună

Pentru problemele următoare considerăm paralelipipedul dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$ cu notațiile din figura 1.

1 Calculează lungimea diagonalei paralelipipedului dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$, știind că are dimensiunile $a = 5$ cm, $b = 12$ cm, respectiv $c = 13$ cm.

Rezolvare:

$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 5^2 + 12^2 + 13^2 = 2 \cdot 13^2$, de unde obținem $d = AC' = 13\sqrt{2}$ cm.

2 Determină distanța de la punctul A' la muchia BC în paralelipipedul dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$ cu dimensiunile $AB = a = 8$ cm și $AA' = c = 6$ cm.

Rezolvare:

Folosim teorema celor trei perpendiculare:

$$\left. \begin{array}{l} AA' \perp (ABC) \\ AB \perp BC \\ AB, BC \subset (ABC) \end{array} \right\} \begin{array}{l} T_{3 \perp} \\ \Rightarrow A'B \perp BC, \text{ de unde obținem că} \end{array}$$

$d(A', BC) = A'B$. În $\triangle A'AB$, $\angle A = 90^\circ \Rightarrow A'B^2 = A'A^2 + AB^2 = 6^2 + 8^2 = 10^2$, de unde $A'B = d(A', BC) = 10$ cm.

3 Calculează lungimea proiecției diagonalei BD' pe planul bazei (ABC) în paralelipipedul dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$ cu dimensiunile $a = AB = 6$ cm, $b = BC = 8$ cm.

Rezolvare:

Mai întâi proiectăm capetele segmentului BD' pe planul bazei; $B \in (ABC)$, deci $\text{pr}_{(ABC)} B = B$, iar $\text{pr}_{(ABC)} D' = D$, deoarece $DD' \perp (ABC)$. Astfel, $\text{pr}_{(ABC)} BD' = BD$. Cum $ABCD$

este dreptunghi, $\triangle ABD$ este dreptunghic în A și cu teorema lui Pitagora avem: $BD^2 = AB^2 + AD^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow BD = \text{pr}_{(ABC)} BD' = 10$ cm.

4 Determină măsura unghiului dintre planul secțiunii diagonale (BDD') și planul bazei (ABC) în paralelipipedul dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$.

Rezolvare:

$BB' \perp (ABC)$ și $BB' \subset (BDD')$ implică $(BDD') \perp (ABC)$, deci $\angle((BDD'), (ABC)) = 90^\circ$.

5 Determină măsura unghiului dintre planul secțiunii diagonale $(ACC'A')$ și planul feței laterale (ABB') în paralelipipedul dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$ cu dimensiunile $a = AB = 6\sqrt{3}$ cm, $b = BC = 6$ cm.

Rezolvare:

$$\left. \begin{array}{l} (ACC') \cap (ABB') = AA' \\ \text{În } (ACC'): CA \perp AA' \\ \text{În } (ABB'): BA \perp AA' \end{array} \right\} \Rightarrow \angle((ACC'), (ABB')) = \angle(CA, BA) =$$

$\angle BAC$. În $\triangle ABC$, $\angle B = 90^\circ \Rightarrow CA^2 = AB^2 + BC^2 = 6^2 \cdot 4 \Rightarrow CA = 12$ cm. Cum $BC = 6$ cm $= \frac{12}{2} = \frac{CA}{2} \Rightarrow \angle BAC = \angle((ACC'), (ABB')) = 30^\circ$.

6 Calculează distanța de la vârful B' la fața (ADD') în paralelipipedul dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$ cu $a = AB = 6$ cm.

Rezolvare:

$B'A' \perp (ADD') \Rightarrow d(B', (ADD')) = B'A' = a = 6$ cm.

Aplicăm cunoștințele

1 În figura 2 este reprezentat paralelipipedul dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$ cu dimensiunile $a = AB = 4$ cm, $b = BC = c = CC' = 2\sqrt{2}$ cm.

- a) Calculează aria totală a paralelipipedului $ABCD A'B'C'D'$.
b) Calculează cosinusul unghiului dintre planele $(A'BC')$ și $(D'AB)$.

Rezolvare:

a) $\mathcal{A}_{\text{tot}} = (2 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{2} + 2 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{2} + 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}) \text{ cm}^2 = (32\sqrt{2} + 16) \text{ cm}^2 = 16(1 + 2\sqrt{2}) \text{ cm}^2$.

b) Deoarece $D'C' \parallel AB$, avem $C' \in (D'AB)$, deci $(A'BC') \cap (D'AB) = BC'$. Dacă O este centrul feței (BCC') , atunci $A'O \perp BC'$, deoarece triunghiul $A'BC'$ este isoscel de vârf A' ; $AB \perp (BCC')$, $BC' \subset (BCC') \Rightarrow AB \perp BC'$ și cum $AD' \parallel BC'$, avem $MO \perp BC'$, unde M este centrul feței (ADD') . Astfel, $\angle((A'BC'), (D'AB)) = \angle MOA'$; $\triangle A'MO$ este dreptunghic cu

$$\angle M = 90^\circ \Rightarrow \cos(\angle MOA') = \frac{OM}{OA'} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

2 În figura 3 este reprezentat paralelipipedul dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$ cu $AB = 3$ cm, $BC = 2\sqrt{3}$ cm și $\angle D'CA' = 30^\circ$.

- a) Determină lungimea diagonalei feței $CDD'C'$ a paralelipipedului.
b) Arată că înălțimea paralelipipedului $ABCD A'B'C'D'$ este egală cu $3\sqrt{3}$ cm.
c) Calculează distanța de la punctul A la planul $(D'CA')$.

Rezolvare:

a) $CD \perp (ADD')$, $DD' \perp D'A'$, DD' , $D'A' \subset (ADD')$ (teorema celor trei perpendiculare) $\Rightarrow CD' \perp D'A'$, deci $\triangle CD'A'$ este dreptunghic în D' . Cum $\angle D'CA' = 30^\circ \Rightarrow D'A' = \frac{A'C}{2}$, deci $A'C = 4\sqrt{3}$ cm; în $\triangle A'CD'$ $\xrightarrow{\text{T.P.}}$ $CD' = 6$ cm $= DC'$.

b) Aplicăm teorema lui Pitagora în $\triangle CDD'$ și obținem $DD'^2 = D'C^2 - DC^2 = 36 - 9 = 27$, de unde $h = AA' = 3\sqrt{3}$ cm.

c) $D'A' \perp (ABB'A')$, $D'A' \subset (D'CA') \Rightarrow (D'CA') \perp (ABB'A')$, $(D'CA') \cap (ABB'A') = A'B \Rightarrow d(A, (D'CA')) = AO$, unde $AO \perp A'B$, $O \in A'B$; $\triangle AA'B$ este dreptunghic în A , deci $AO = \frac{AA' \cdot AB}{A'B} = \frac{3\sqrt{3} \cdot 3}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm $= d(A, (D'CA'))$.

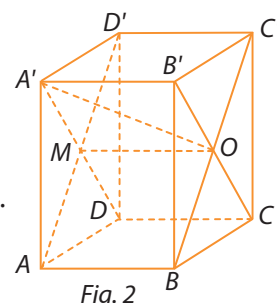


Fig. 2

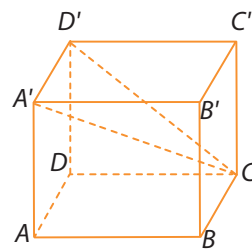


Fig. 3

Reține!

Într-un paralelipiped dreptunghic cu lungimea a , lățimea b și înălțimea c au loc relațiile:

- $\mathcal{A}_{\text{lat}} = 2(a + b) \cdot c$; • $\mathcal{A}_{\text{tot}} = 2ab + 2ac + 2bc$; • $\mathcal{V} = a \cdot b \cdot c$;
- $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, unde d este lungimea diagonalei paralelipipedului dreptunghic.

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1 Lucru în echipă: Împreună cu colegul de bancă, rezolvați sarcinile propuse și analizați rezultatele găsite.

În figura 4, $ABCD A'B'C'D'$ este un paralelipiped dreptunghic cu $AB = a$ cm, $BC = b$ cm și $CC' = c$ cm. Copiază și completează tabelul de mai jos, în care d , $\mathcal{A}_{\text{lat}}$, $\mathcal{A}_{\text{tot}}$, $\mathcal{V}$ sunt lungimea diagonalei (măsurată în cm), aria laterală, aria totală (măsurate în cm^2), respectiv volumul paralelipipedului $ABCD A'B'C'D'$ (măsurat în cm^3).

	a	b	c	d	$\mathcal{A}_{\text{lat}}$	$\mathcal{A}_{\text{tot}}$	$\mathcal{V}$
a)	6	8		$10\sqrt{2}$			
b)	5	12	13				
c)	6				90	126	
d)		18	5				360

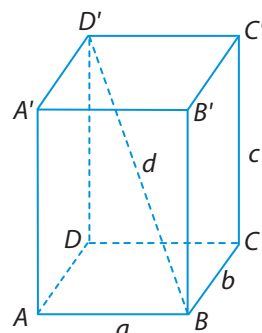


Fig. 4

- 2** Calculează volumul paralelipipedului dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$ cu $AB = 3$ m, $BC = 4$ m și $AA' = 10$ m.
3 Determină aria totală a unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile: 2 cm, 5 cm, respectiv 3 cm.
4 Determină lungimea diagonalei paralelipipedului dreptunghic cu dimensiunile: 3 cm, 4 cm, respectiv 10 cm.
5 Determină înălțimea paralelipipedului dreptunghic cu laturile bazei de 8 cm, 10 cm și aria totală de 340 cm^2 .

- 6** Dacă volumul unui paralelipiped dreptunghic este 900 cm^3 , iar două dintre dimensiuni sunt de 9 cm , respectiv 4 cm , determină cea de-a treia dimensiune.
- 7** Un paralelipiped dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$ are aria feței $BCC'B'$ egală cu 40 cm^2 , $AD = 4 \text{ cm}$ și aria totală 136 cm^2 . Determină lungimea muchiei AB .
- 8** Se consideră un paralelipiped dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$ cu $AB = 3 \text{ cm}$, $BC = 4 \text{ cm}$ și $AA' = 5 \text{ cm}$.
a) Demonstrează că secțiunea diagonală a paralelipipedului este pătrat.
b) Determină măsura unghiului dintre dreapta AC' și planul (ABC) .
- 9** O cutie în formă de paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 5 cm , 12 cm , respectiv 20 cm este plină cu lapte. Tot laptele se toarnă în pahare de 100 ml . Determină câte pahare s-au umplut cu laptele din cutie.
- 10** Un acvariu are forma unui paralelipiped dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$ cu baza $ABCD$ și dimensiunile $AB = 6 \text{ dm}$, $BC = 4 \text{ dm}$ și $CC' = 6 \text{ dm}$. Înălțimea apei din acvariu este de $5,5 \text{ dm}$.
a) Calculează câți litri de apă sunt în acvariu.
b) Dacă $M \in DD'$ astfel încât $AM + MC'$ este minimă, determină distanța de la M la planul $(ABCD)$, baza paralelipipedului.
- 11** Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$ cu $AB = AA' = 12 \text{ cm}$ și $BC = 6 \text{ cm}$.
a) Calculează volumul paralelipipedului dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$.
b) Fie punctul O proiecția punctului C' pe dreapta $B'D'$ și punctul P proiecția punctului C' pe dreapta CB' . Arată că dreapta OP este paralelă cu planul (ACD') .
- 12** Acvariul din figura 5 are baza un dreptunghi cu dimensiunile de 80 cm și 25 cm și o înălțime de 30 cm . Acesta se umple cu apă până la înălțimea de 20 cm . Dacă un corp solid cu volumul de 5000 cm^3 este complet scufundat în acvariu, determină cu câți centimetri se va ridica nivelul apei.
- 13** Un bloc de piatră în formă de paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 3 cm , 4 cm , respectiv 5 cm este format din cubulețe cu muchia de 1 cm . Suprafața exterioră a blocului de piatră se vopsește cu albastru. Câte cubulețe au exact o față vopsită cu albastru?
- 14** Scările din figura 6 au baza un dreptunghi cu dimensiunile de 5 m , respectiv 6 m . Cele trei trepte au dimensiuni egale și fiecare dintre ele are o înălțime de 20 cm . Dacă densitatea materialului din care sunt construite scările este de 130 kg/m^3 , determină masa acestor scări, în kilograme ($\rho = \frac{m}{V}$, densitatea este egală cu masa corpului împărțită la volumul acestuia).
- 15** Se consideră un paralelipiped dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$ cu $AB = 30 \text{ cm}$ și $BC = AA' = 15 \text{ cm}$.
a) Calculează aria totală a paralelipipedului.
b) Determină poziția punctului M , situat pe muchia BB' , astfel încât perimetrul triunghiului AMC' să fie minim.

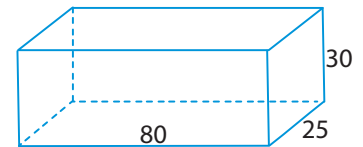


Fig. 5

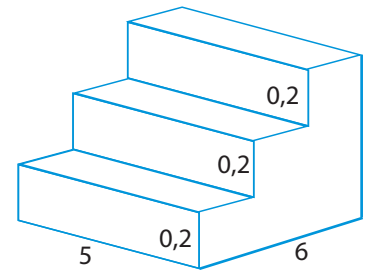


Fig. 6

Din oficiu: 1 punct

AUTOEVALUARE

Timp de lucru: 40 de minute

Pentru fiecare problemă, alege litera corespunzătoare răspunsului corect.

- 1** Un paralelipiped dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$ are dimensiunile $AB = 3\sqrt{2} \text{ cm}$, $BC = 3 \text{ cm}$ și $AA' = 3\sqrt{3} \text{ cm}$. Afirmatia: „Patrulaterul $ACCA'$ este pătrat.” este: **1 punct**
a) adevărată; **b)** falsă.
- 2** În paralelipipedul dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$, $AB = 4 \text{ cm}$, $BC = 3 \text{ cm}$ și $AA' = 5 \text{ cm}$. Lungimea diagonalei CA' este egală cu: **2 puncte**
a) 12 cm ; **b)** $5\sqrt{2} \text{ cm}$; **c)** 7 cm ; **d)** 6 cm .
- 3** În paralelipipedul dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$, $AB = 6\sqrt{3} \text{ cm}$ și $BC = 6$. Măsura unghiului dintre muchiile $A'C'$ și BC este egală cu: **2 puncte**
a) 90° ; **b)** 60° ; **c)** 0° ; **d)** 30° .

Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$ cu $AA' = AB = 4\sqrt{3} \text{ cm}$ și $BC = 4 \text{ cm}$.

- 4** Volumul paralelipipedului este egal cu: **2 puncte**
a) $16\sqrt{3} \text{ cm}^3$; **b)** 96 cm^3 ; **c)** $64\sqrt{3} \text{ cm}^3$; **d)** 192 cm^3 .
- 5** Distanța de la punctul A la planul (BDD') este egală cu: **2 puncte**
a) 8 cm ; **b)** 14 cm ; **c)** $2\sqrt{3} \text{ cm}$; **d)** $4\sqrt{3} \text{ cm}$.



LECȚIA 3

Prisma dreaptă cu baza triunghi echilateral, pătrat sau hexagon regulat. Distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul prisme. Aria laterală, aria totală și volumul prisme regulate

Observăm și descoperim cunoștințe noi

Prisma dreaptă cu baza un poligon regulat se numește **prismă regulată**.

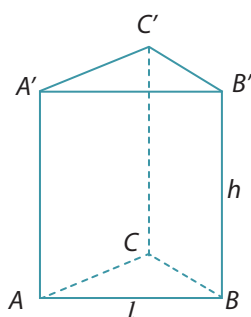


Fig. 1

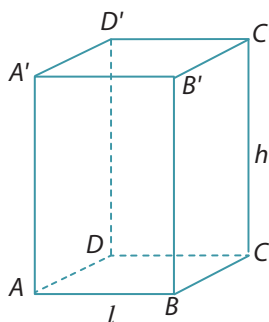


Fig. 2

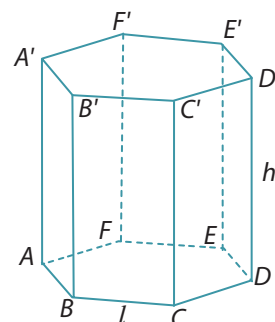


Fig. 3

Aria laterală a unei prisme regulate având înălțimea (muchia laterală) h este egală cu suma ariilor fețelor laterale sau de n ori aria unei fețe, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, este numărul laturilor bazei:

$$\mathcal{A}_{\text{lat}} = \mathcal{P}_b \cdot h$$

$$\mathcal{A}_{\text{lat}} = n \cdot \mathcal{A}_{\text{față}}$$

Aria totală a unei prisme regulate este egală cu suma ariilor tuturor fețelor prisme:

$$\mathcal{A}_{\text{tot}} = \mathcal{A}_{\text{lat}} + 2 \cdot \mathcal{A}_{\text{bază}}$$

Dacă baza este un triunghi echilateral cu latura l , atunci $\mathcal{A}_{\text{bază}} = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4}$.

Dacă baza este un pătrat cu latura l , atunci $\mathcal{A}_{\text{bază}} = l^2$.

Dacă baza este un hexagon regulat de latură l , atunci $\mathcal{A}_{\text{bază}} = \frac{3l^2 \sqrt{3}}{2}$.

Volumul prisme drepte este:

$$\mathcal{V} = \mathcal{A}_{\text{bază}} \cdot h$$

OBSERVAȚIE: Cubul și paralelipipedul dreptunghic sunt prisme drepte, prin urmare ariile și volumele lor se pot calcula după aceste formule.

Rezolvăm împreună

1 Determină distanța de la punctul A' la muchia BC în prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ cu latura bazei $l = AB = 6\sqrt{3}$ cm și înălțimea $h = AA' = 12$ cm (vezi figura 1).

Rezolvare:

Vom folosi teorema celor trei perpendiculare:

$$\left. \begin{array}{l} AA' \perp (ABC) \\ \text{Fie } AM \perp BC, M \in BC \\ AM, BC \subset (ABC) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{T3}\perp \\ \Rightarrow A'M \perp BC \Rightarrow d(A', BC) = A'M; \end{array}$$

$$\Delta ABC \text{ este echilateral cu înălțimea } AM \Rightarrow AM = \frac{l\sqrt{3}}{2} = 9 \text{ cm};$$

$AA' \perp (ABC)$, $AM \subset (ABC) \Rightarrow \Delta A'AM$ este dreptunghic cu $\angle A = 90^\circ \Rightarrow A'M^2 = A'A^2 + AM^2 = 12^2 + 9^2 = 225$ (din teorema lui Pitagora). Prin urmare, $d(A', BC) = A'M = 15$ cm.

2 Prisma dreaptă $ABCD A'B'C'D'$, cu baza pătratul $ABCD$, are $l = AB = 6$ cm și înălțimea $h = AA' = 8$ cm (vezi figura 2). Calculează distanța de la vârful A' la diagonală bazei BD .

Rezolvare:

$$\left. \begin{array}{l} AA' \perp (ABC) \\ AO \perp BD \text{ (} \{O\} = AC \cap BD \text{)} \\ AO, BD \subset (ABC) \end{array} \right\} \xrightarrow{T3 \perp} A'O \perp BD \Rightarrow d(A', BD) = A'O; AO = 3\sqrt{2} \text{ cm} \xrightarrow{\text{T. Pitagora}} A'O^2 = 82 \Rightarrow d(A', BD) = \sqrt{82} \text{ cm}.$$

3 Prisma dreaptă $ABCD A'B'C'D'$ cu baza pătratul $ABCD$ are latura bazei jumătate din înălțimea prismei (vezi figura 2). Determină sinusul unghiului dintre diagonală AC' și fața laterală (BCC') .

Rezolvare:

$$\text{Fie } l = AB \Rightarrow h = AA' = 2 \cdot AB = 2l; \angle(AC', (BCC')) = \angle(AC', \text{pr}_{(BCC')} AC') = \angle(AC', BC) = \angle AC'B; AC' = l\sqrt{6}.$$

$$\text{În } \triangle ABC', \angle B = 90^\circ, \sin(\angle AC'B) = \frac{AB}{AC'} = \frac{l}{l\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

4 Prisma hexagonală regulată $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$ are latura bazei $l = AB = 6\sqrt{3}$ cm și înălțimea $h = AA' = 6$ cm (vezi figura 3). Calculează distanța de la vârful A la fața laterală (CDD') și distanța de la A la muchia $C'D'$.

Rezolvare:

$ABCDEF$ este hexagon regulat, așadar $AC \perp CD$; $C'C \perp (ABC)$ și $AC \subset (ABC) \Rightarrow AC \perp CC'$, $CC' \cap CD = \{C\}$, $CC', CD \subset (CDD') \Rightarrow AC \perp (CDD') \Rightarrow d(A, (CDD')) = AC = l\sqrt{3} = 18$ cm.

$$\left. \begin{array}{l} AC \perp (CDD') \\ CC' \perp C'D' \\ CC', C'D' \subset (CDD') \end{array} \right\} \xrightarrow{T3 \perp} AC' \perp C'D' \Rightarrow d(A, C'D') = AC'. \text{În } \triangle ACC', \angle C = 90^\circ \xrightarrow{\text{T. Pitagora}} AC'^2 = 360 \Rightarrow d(A, C'D') = 6\sqrt{10} \text{ cm}.$$

5 Prisma dreaptă $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$ are baza hexagonul regulat $ABCDEF$ (vezi figura 3). Determină măsura unghiului dintre fețele laterale (ABB') și (BCC') .

Rezolvare:

$$\left. \begin{array}{l} (ABB') \cap (BCC') = BB' \\ \text{În } (ABB'): AB \perp BB' \\ \text{În } (BCC'): CB \perp BB' \end{array} \right\} \Rightarrow \angle((ABB'), (BCC')) = \angle ABC = 120^\circ, \text{ deoarece } ABCDEF \text{ este hexagon regulat.}$$



Aplicăm cunoștințele

În figura 4 este reprezentată prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ cu baza triunghiul echilateral ABC , $AB = 6\sqrt{3}$ cm și $AA' = 6$ cm. Punctul M este mijlocul muchiei BC .

- Calculează volumul prismei $ABCA'B'C'$.
- Calculează distanța de la punctul A' la dreapta BC .
- Determină tangenta unghiului dintre dreapta $A'M$ și planul bazei (ABC) .
- Calculează distanța de la punctul M la planul $(AB'C')$.

Rezolvare:

$$\text{a) } V = \mathcal{A}_{\text{bază}} \cdot h; \triangle ABC - \text{echilateral} \Rightarrow \mathcal{A}_{\text{bază}} = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{36 \cdot 3\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2 = 27\sqrt{3} \text{ cm}^2; V = 27\sqrt{3} \cdot 6 = 162\sqrt{3} \text{ cm}^3.$$

$$\text{b) În } \triangle ABC, AM - \text{înălțime} \Rightarrow AM = \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} \text{ cm} = 9 \text{ cm};$$

$$AA' \perp (ABC), AM \perp BC, AM, BC \subset (ABC) \xrightarrow{T3 \perp} A'M \perp BC \Rightarrow d(A', BC) = A'M.$$

$$\text{În } \triangle A'MA, \angle A = 90^\circ \Rightarrow A'M^2 = AA'^2 + AM^2 = (36 + 81) \text{ cm} = 117 \text{ cm} \Rightarrow A'M = 3\sqrt{13} \text{ cm}.$$

$$\text{c) } \angle(A'M, (ABC)) = \angle(A'M, \text{pr}_{(ABC)} A'M) = \angle(A'M, AM) = \angle A'MA; \text{tg}(\angle A'MA) = \frac{AA'}{AM} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

d) Fie N mijlocul lui $B'C'$. Cum $\triangle AB'C'$ este isoscel de vârf A , AN este înălțime, deci $AN \perp B'C'$; $BC \perp AM$, $B'C' \parallel BC$, $AM, AN \subset (AMN)$, $AM \cap AN = \{A\} \Rightarrow B'C' \perp (AMN)$. Fie $MP \perp AN$, $P \in AN$, $B'C' \perp (AMN) \Rightarrow B'C' \perp MP \Rightarrow MP \perp (AB'C') \Rightarrow$

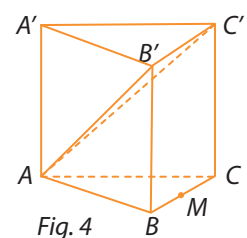


Fig. 4

$$\Rightarrow d(M, (AB'C')) = MP. \text{ În } \triangle AMN, \angle M = 90^\circ \Rightarrow MP = \frac{MA \cdot MN}{AN}, MA = 9 \text{ cm}, MN = h = 6 \text{ cm}, AN = A'M = 3\sqrt{13} \text{ cm}$$

$$(AMNA' \text{ este dreptunghi}) \Rightarrow MP = \frac{9 \cdot 6}{3\sqrt{13}} = \frac{18\sqrt{13}}{13} \text{ cm} = d(M, (AB'C')).$$

Reține!

Într-o prismă regulată cu latura bazei l și înălțimea h au loc relațiile:

$$\bullet \mathcal{A}_{\text{lat}} = \mathcal{P}_{\text{bază}} \cdot h; \quad \bullet \mathcal{A}_{\text{tot}} = \mathcal{A}_{\text{lat}} + 2 \cdot \mathcal{A}_{\text{bază}}; \quad \bullet \mathcal{V} = \mathcal{A}_{\text{bază}} \cdot h.$$



Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

- O prismă patrulateră regulată are perimetrul bazei egal cu 32 cm și înălțimea egală cu 6 cm. Calculează aria totală și volumul prisme.
- O prismă patrulateră regulată are aria laterală egală cu 64 cm^2 și volumul de 128 cm^3 . Calculează aria secțiunii diagonale.
- O prismă triunghiulară regulată are aria totală egală cu $36\sqrt{3} \text{ cm}^2$ și aria laterală egală cu $28\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Determină volumul prisme.
- O prismă triunghiulară regulată are volumul egal cu $36\sqrt{3} \text{ cm}^3$ și înălțimea egală cu 4 cm. Calculează perimetrul bazei.
- O prismă hexagonală regulată are latura bazei egală cu 12 cm și înălțimea egală cu 5 cm. Calculează volumul prisme.
- O prismă hexagonală regulată are aria laterală egală cu 54 cm^2 și latura bazei egală cu 6 cm. Determină perimetrul secțiunii axiale a prisme.
- Lucru în echipă:** Împreună cu colegul de bancă, rezolvați sarcinile propuse și analizați rezultatele găsite. Copiază și completează tabelul de mai jos, în care $n, l, h, \mathcal{A}_b, \mathcal{A}_{\text{lat}}, \mathcal{A}_{\text{tot}}$ și $\mathcal{V}$ reprezintă numărul laturilor bazei, latura bazei, înălțimea (măsurate în cm), aria bazei, aria laterală, aria totală (măsurate în cm^2), respectiv volumul unei prisme regulate (măsurat în cm^3).



	n	l	h	$\mathcal{A}_b$	$\mathcal{A}_{\text{lat}}$	$\mathcal{A}_{\text{tot}}$	$\mathcal{V}$
a)	3	6					$90\sqrt{3}$
b)	3			$16\sqrt{3}$		$200\sqrt{3}$	
c)	4		5				80
d)	4			25	80		
e)	6	12	5				
f)	6			$54\sqrt{3}$			$540\sqrt{3}$

- În figura 5 este reprezentată prismă patrulateră regulată $ABCD A'B'C'D'$ cu latura bazei $AB = 8 \text{ cm}$ și măsura unghiului dintre diagonala AC' și planul feței laterale (BCC') egală cu 30° .

- Arată că înălțimea prisme este egală cu $8\sqrt{2} \text{ cm}$.
- Calculează distanța de la vârful D' la dreapta AC' .

- Fie $ABCD A'B'C'D'$ o prismă patrulateră regulată cu latura bazei $AB = 4\sqrt{3} \text{ cm}$. Măsura unghiului dintre planul $(A'BC)$ și planul bazei (ABC) este de 60° .

- Arată că volumul prisme este 576 cm^3 .
- Calculează distanța de la vârful D la planul (ACD') .

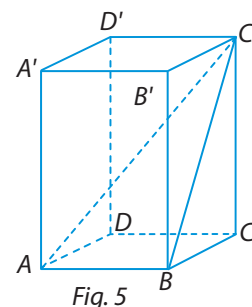
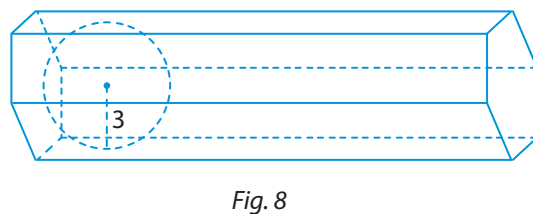
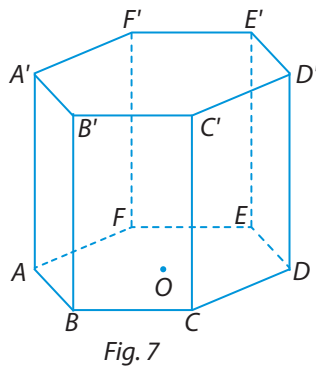
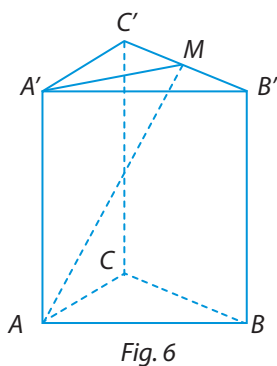


Fig. 5

- 10** Iustin vrea să împacheteze o cutie în formă de paralelipiped dreptunghic cu baza un pătrat cu aria de 25 cm^2 . Volumul cutiei este de 100 cm^3 . De câți centimetri pătrați de hârtie de împachetat are nevoie Iustin pentru a acoperi exact toate fețele cutiei?
- 11** Se consideră o prismă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ cu înălțimea $AA' = 12 \text{ cm}$ și aria laterală egală cu 216 cm^2 .
- Calculează sinusul unghiului dintre planele $(A'BC)$ și (ABC) .
 - Determină distanța de la vârful A la planul $(A'BC)$.
- 12** Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată cu latura bazei $AB = 48 \text{ cm}$ și aria unei fețe laterale egală cu 1152 cm^2 .
- Calculează volumul prisme.
 - Arată că tangenta unghiului dintre dreapta AC' și planul feței laterale (ABB') este egală cu $\frac{\sqrt{6}}{2}$.
- 13** În figura 6 este reprezentată prisma dreaptă $ABCA'B'C'$ cu baza triunghiul echilateral ABC , iar $AB = 6 \text{ cm}$ și $AA' = 9 \text{ cm}$.
- Calculează aria laterală a prisme.
 - Se consideră M mijlocul muchiei $B'C'$. Calculează măsura unghiului dintre AM și planul $(A'B'C')$.
- 14** În figura 7 este reprezentată prisma hexagonală regulată $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$ în care fețele laterale sunt pătrate cu latura de 6 cm .
- Calculează distanța de la vârful A' la muchia CD .
 - Determină sinusul unghiului dintre planele $(OB'F')$ și $(OC'E')$, unde O este centrul bazei $ABCDEF$.
- 15** O cutie de mingi are forma unei prisme hexagonale regulate (vezi figura 8). Știind că în cutie încap exact 10 mingi, fiecare cu raza de 3 cm , calculează cantitatea minimă de material folosită la confecționarea cutiei.



Din oficiu: 1 punct

AUTOEVALUARE

Timp de lucru: 40 de minute

Se consideră o prismă triunghiulară $ABCA'B'C'$ cu baza triunghiul echilateral ABC , $AB = 6 \text{ cm}$ și $AA' = 6\sqrt{3} \text{ cm}$. Pentru fiecare problemă, alege litera corespunzătoare răspunsului corect.

- Volumul prisme este egal cu: 2 puncte
 - $216\sqrt{3} \text{ cm}^3$;
 - 648 cm^3 ;
 - 108 cm^3 ;
 - 162 cm^3 .
- Distanța de la punctul A la planul feței laterale (BCC') este egală cu: 2 puncte
 - $3\sqrt{3} \text{ cm}$;
 - 6 cm ;
 - $6\sqrt{3} \text{ cm}$;
 - 3 cm .
- Măsura unghiului dintre muchiile AA' și BC este egală cu: 1 punct
 - 60° ;
 - 90° ;
 - 30° ;
 - 45° .
- Se consideră o prismă patrulateră regulată $ABCD A'B'C'D'$ cu baza pătratul $ABCD$, $AB = 10 \text{ cm}$ și $AA' = 4 \text{ cm}$. Distanța de la vârful A la fața laterală (BCC') este egală cu: 2 puncte
 - 4 cm ;
 - $10\sqrt{2} \text{ cm}$;
 - 10 cm ;
 - $4\sqrt{2} \text{ cm}$.
- Se consideră o prismă hexagonală regulată $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$ cu $AB = 6 \text{ cm}$ și $AA' = 10 \text{ cm}$. Aria laterală a prisme este egală cu: 2 puncte
 - $60\sqrt{3} \text{ cm}^2$;
 - 600 cm^2 ;
 - 360 cm^2 ;
 - 60 cm^2 .



LECȚIA 4

Piramida regulată. Distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul piramidei regulate. Aria laterală, aria totală și volumul piramidei regulate



Ne amintim

În figurile de mai jos sunt reprezentate principalele tipuri de piramide regulate care au fost studiate anterior: **piramida triunghiulară regulată** (figura 1), **piramida patrulateră regulată** (figura 2) și **piramida hexagonală regulată** (figura 3).

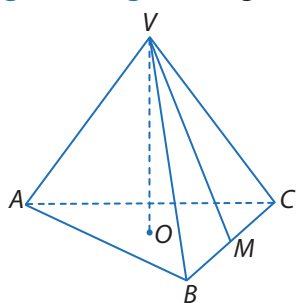


Fig. 1

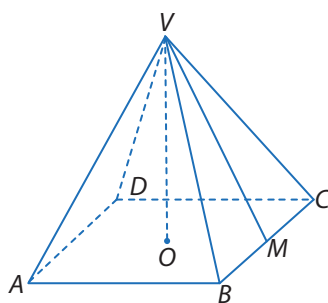


Fig. 2

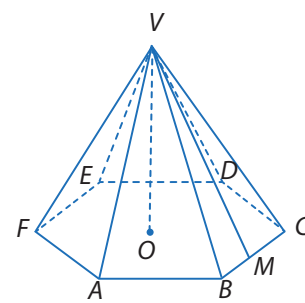


Fig. 3

O piramidă regulată are baza poligon regulat și muchiile laterale congruente, iar proiecția vârfului piramidei regulate pe planul bazei coincide cu centrul bazei.

Înălțimea piramidei (regulate) este distanța de la vârful piramidei la planul bazei; în toate cele trei figuri de mai sus, $h = VO$.

Distanța de la vârful piramidei regulate la o muchie a bazei este **apotema piramidei**, notată a_p . Concret, în figurile de mai sus, $a_p = VM$, unde M este mijlocul laturii BC .

Distanța de la centrul bazei la o muchie a bazei, într-o piramidă regulată, este **apotema bazei**; în exemplele ilustrate mai sus, $a_b = OM$.

În toate piramidele regulate de mai sus au loc relațiile:

$$h^2 + a_b^2 = a_p^2$$

$$VO^2 + OB^2 = VB^2$$

$$VM^2 + MB^2 = VB^2.$$



Rezolvăm împreună

1 O piramidă triunghiulară regulată are muchia bazei de lungime $8\sqrt{3}$ cm și muchia laterală de lungime 10 cm (figura 4).

- Calculează distanța de la vârful piramidei la planul bazei.
- Determină tangenta unghiului dintre o muchie laterală și planul bazei.
- Determină sinusul unghiului dintre o față laterală și planul bazei.

Rezolvare:

a) Fie O centrul bazei în piramida triunghiulară regulată $VABC$. Atunci $VO \perp (ABC)$,

$AO \subset (ABC) \Rightarrow VO \perp AO$ și $AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 8$ cm. Aplicăm teorema lui Pitagora în

$\triangle VAO$ dreptunghic în O și obținem $VA^2 = VO^2 + OA^2 \Rightarrow VO^2 = 10^2 - 8^2 = 36 \Rightarrow VO = 6$ cm $\Rightarrow d(V, (ABC)) = 6$ cm.

b) $\angle(VA, (ABC)) = \angle(VA, \text{pr}_{(ABC)} VA) = \angle(VA, AO) = \angle VAO$. În $\triangle VAO$ dreptunghic în O avem $\text{tg}(\angle VAO) = \frac{VO}{AO} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

c) Notăm cu M mijlocul muchiei BC ; cum triunghiul VBC este isoscel de bază BC , avem $VM \perp BC$ cu $VM \subset (VBC)$. Triunghiul ABC este echilateral, prin urmare $OM \perp BC$, $OM \subset (ABC)$, iar cum $(VBC) \cap (ABC) = BC$, deducem că $\angle((VBC), (ABC)) = \angle(VM, OM) = \angle VMO$. Aplicăm teorema lui Pitagora în $\triangle VMC$ dreptunghic în M : $VC^2 = VM^2 + MC^2 \Rightarrow VM^2 = 10^2 - (4\sqrt{3})^2 = 52 \Rightarrow VM = 2\sqrt{13}$ cm. În $\triangle VOM$ dreptunghic în O : $\sin(\angle VMO) = \frac{VO}{VM} = \frac{6}{2\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$.

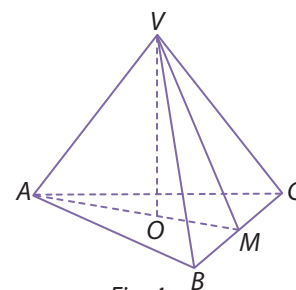


Fig. 4

2 Piramida patrulateră regulată $SABCD$ (figura 5) are baza $ABCD$ de centru O și diagonala $AC = 12\sqrt{2}$ cm, iar unghiul format de o muchie laterală cu planul bazei are măsura egală cu 60° .

- Determină lungimea muchiei laterale a piramidei.
- Calculează distanța de la centrul bazei la o față laterală.
- Determină cosinusul unghiului dintre planele (SAC) și (SBC) .

Rezolvare:

a) $\angle(SA, (ABC)) = \angle(SA, \text{pr}_{(ABC)} SA) = \angle(SA, OA) = \angle SAO \Rightarrow \angle SAC = 60^\circ$.

Cum $SA = SC$, rezultă că triunghiul SAC este echilateral, deci $SA = AC = 12\sqrt{2}$ cm.

b) Fie M mijlocul muchiei BC și $OH \perp SM$, $H \in SM$; $OH \perp SM$, $SM \perp BC$, $OM \perp BC$, iar $SM, BC \subset (SBC) \Rightarrow OH \perp (SBC)$, conform reciprocei a doua a teoremei celor trei perpendiculare $\Rightarrow d(O, (SBC)) = OH$.

În $\triangle SAC$, SO este înălțime, deci $SO = 6\sqrt{6}$ cm; $ABCD$ este pătrat cu diagonala $AC = 12\sqrt{2}$ cm $\Rightarrow AB = 12$ cm $\Rightarrow OM = \frac{AB}{2} = 6$ cm. Aplicăm teorema lui Pitagora în $\triangle SOM$ cu $\angle SOM = 90^\circ$: $SM^2 = SO^2 + OM^2 \Rightarrow SM = 6\sqrt{7}$ cm.

În $\triangle SOM$ dreptunghic în O , OH este înălțimea corespunzătoare ipotenuzei, deci $OH = \frac{SO \cdot OM}{SM} = \frac{6\sqrt{42}}{7}$ cm $\Rightarrow$

$$\Rightarrow d(O, (SBC)) = \frac{6\sqrt{42}}{7} \text{ cm.}$$

c) Considerăm $BT \perp SC$, $T \in SC$. Atunci $\mathcal{A}_{\triangle SBC} = \frac{SM \cdot BC}{2} = \frac{BT \cdot SC}{2} \Rightarrow BT = 3\sqrt{14}$ cm.

Aplicăm teorema lui Pitagora în $\triangle BTC$ dreptunghic în T : $BT^2 + TC^2 = BC^2 \Rightarrow TC = 3\sqrt{2}$ cm, deci $TC = \frac{SC}{4}$.

În $\triangle SAC$ echilateral, dacă notăm cu N mijlocul lui SC , atunci $AN \perp SC$. Cum O este mijlocul lui AC și T mijlocul lui NC , OT este linie mijlocie în $\triangle ANC \Rightarrow OT = \frac{AN}{2} = 3\sqrt{6}$ cm și $OT \parallel AN$, dar $AN \perp SC \Rightarrow OT \perp SC$; $(SAC) \cap (SBC) = SC$,

$OT \perp SC$ cu $OT \subset (SAC)$ și $BT \perp SC$ cu $BT \subset (SBC) \Rightarrow \angle((SAC), (SBC)) = \angle(OT, BT) = \angle OTB$.

În $\triangle BOT$: $BT^2 = 126 = 54 + 72 = TO^2 + OB^2 \Rightarrow \angle BOT = 90^\circ$ (din reciproca teoremei lui Pitagora) $\Rightarrow \cos(\angle OTB) = \frac{OT}{BT} = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

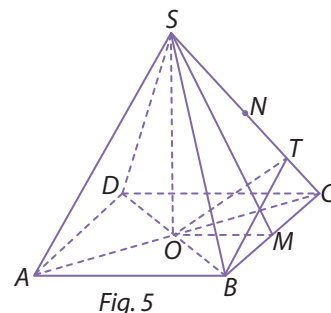


Fig. 5

Observăm și descoperim cunoștințe noi

Pentru orice piramidă regulată putem determina aria laterală, aria totală și volumul cu ajutorul elementelor cunoscute ale piramidei respective.

Aria laterală a unei piramide este suma ariilor fețelor laterale și se notează cu $\mathcal{A}_{\text{lat}}$. Pentru piramida regulată, având baza un poligon regulat cu n laturi și perimetrul bazei $\mathcal{P}_b$, avem:

$$\mathcal{A}_{\text{lat}} = n \cdot \mathcal{A}_{\text{față laterală}} \quad \text{sau} \quad \mathcal{A}_{\text{lat}} = \frac{\mathcal{P}_b \cdot a_p}{2}$$

Aria totală a unei piramide este suma dintre aria laterală și aria bazei ($\mathcal{A}_{\text{bază}}$) și se notează cu $\mathcal{A}_{\text{tot}}$:

$$\mathcal{A}_{\text{tot}} = \mathcal{A}_{\text{lat}} + \mathcal{A}_{\text{bază}}$$

Volumul unei piramide este egal cu o treime din produsul dintre aria bazei și înălțimea piramidei:

$$V = \frac{\mathcal{A}_{\text{bază}} \cdot h}{3}$$

În cazul unui tetraedru regulat cu muchia de lungime l , au loc relațiile:

$$a_b = \frac{l\sqrt{3}}{6}, \quad a_p = \frac{l\sqrt{3}}{2}, \quad h = \frac{l\sqrt{6}}{3}, \quad \mathcal{A}_{\text{lat}} = 3 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4}, \quad \mathcal{A}_{\text{tot}} = l^2\sqrt{3}, \quad V = \frac{l^3\sqrt{2}}{12}.$$





Aplicăm cunoștințele

1 Un ornament sculptat în lemn are forma unui tetraedru regulat $ABCD$ cu $l = AB = 15$ cm, iar O este centrul bazei BCD (figura 6). Calculează:

a) suprafața care va fi vopsită la final, știind că ornamentul va fi colorat în întregime cu vopsea;

b) volumul de lemn necesar obținerii acestui ornament, neglijând pierderile.

Rezolvare:

a) Pentru a colora în întregime ornamentul este necesar să vopsim toate cele patru fețe ale sale, care sunt triunghiuri echilaterale congruente. Prin urmare:

$$S_{\text{colorată}} = \mathcal{A}_{\text{tot}} = 4 \cdot \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} = 225\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

b) Cum $AO \perp (BCD)$ și $BO \subset (BCD)$, deducem că $AO \perp BO$ și aplicăm teorema lui Pitagora în $\triangle AOB$, dreptunghic în O , cu $BO = \frac{2}{3} \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$ cm: $AB^2 = AO^2 + OB^2 \Rightarrow AO^2 = AB^2 - BO^2 = 15^2 - (5\sqrt{3})^2 = 150 \Rightarrow h = AO = 5\sqrt{6}$ cm.

$$\text{Volumul de lemn este volumul tetraedrului } ABCD: \mathcal{V} = \frac{\mathcal{A}_b \cdot h}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{225\sqrt{3}}{4} \cdot 5\sqrt{6} \text{ cm}^3 = \frac{1125\sqrt{2}}{4} \text{ cm}^3.$$

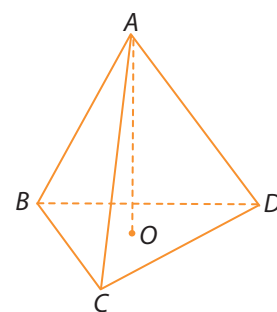


Fig. 6

2 Figura 7 ilustrează o piramidă patrulateră regulată $VABCD$ care are muchia bazei de lungime $l = AB = 12$ cm și măsura unghiului format de o muchie laterală cu planul bazei de 45° . Calculează:

a) aria laterală și volumul acestei piramide;

b) măsura unghiului AVC ;

c) distanța de la centrul bazei $ABCD$, notat cu O , la o față laterală a piramidei.

Rezolvare:

a) $\sphericalangle(VA, (ABC)) = \sphericalangle(VA, \text{pr}_{(ABC)} VA) = \sphericalangle(VA, AO) = \sphericalangle VAO$ este unghiul format de muchia laterală VA cu planul bazei. Atunci, în $\triangle VOA$ dreptunghic în O , $\sphericalangle VAO = 45^\circ$, deci $\triangle VOA$ este dreptunghic isoscel cu $VO = OA = \frac{AC}{2} = \frac{l\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$ cm, iar $VA = AO\sqrt{2} = 12$ cm. Observăm că $VA = AB$, prin urmare fețele

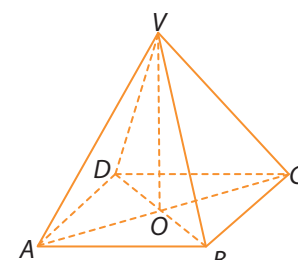


Fig. 7

laterale ale piramidei $VABCD$ sunt triunghiuri echilaterale și $\mathcal{A}_{\text{lat}} = 4 \cdot \mathcal{A}_{\triangle VAB} = 4 \cdot \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} = 144\sqrt{3} \text{ cm}^2$,

$$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{A}_b \cdot h}{3} = \frac{l^2 \cdot VO}{3} = 288\sqrt{2} \text{ cm}^3.$$

b) $\triangle VAC$ este isoscel de bază AC , cu $\sphericalangle VAC = 45^\circ$, deci $\sphericalangle AVC = 180^\circ - 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$.

c) Exprimăm volumul corpului $VOBC$ în două moduri: pentru o piramidă de vârf V și bază OBC , având înălțimea VO (figura 8), respectiv pentru o piramidă de vârf O și bază VBC , având înălțimea egală cu distanța căutată (figura 9).

$$\text{Atunci } \mathcal{V}_{VOBC} = \mathcal{V}_{OVBC} \Leftrightarrow \frac{\mathcal{A}_{\triangle OBC} \cdot VO}{3} = \frac{\mathcal{A}_{\triangle VBC} \cdot d(O, (VBC))}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \cdot AB^2 \cdot VO = \frac{BC^2 \sqrt{3}}{4} \cdot d(O, (VBC)) \Rightarrow d(O, (VBC)) = 2\sqrt{6} \text{ cm}.$$

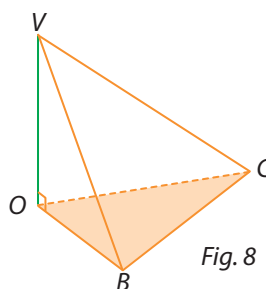


Fig. 8

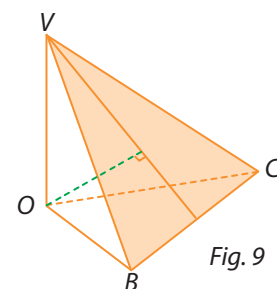


Fig. 9

3 Într-un bloc de gheață de forma unei piramide hexagonale regulate $SABCDEF$ se realizează o scobitură $VABCDEF$, tot de forma unei piramide hexagonale regulate, pentru a forma un iglu (figura 10). Se știe că $AB = 4$ m, iar înălțimile celor două piramide sunt $VO = 3$ m și $SO = 5$ m.

a) Calculează volumul de gheață rămas după realizarea acestui iglu.

b) Calculează aria laterală a blocului de gheață inițial.

c) Calculează distanța de la punctul V la dreapta BD .

d) Determină cosinusul unghiului format de o muchie laterală exterioară a blocului de gheață cu planul bazei.

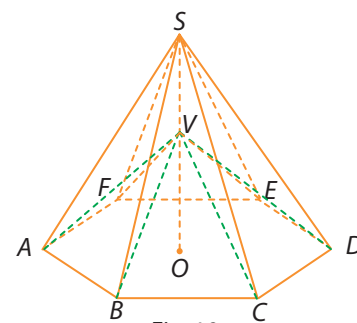


Fig. 10

Rezolvare:

a) Volumul de gheață rămas este diferența dintre volumul blocului de gheață inițial și volumul eliminat (iglu),

$$\text{adică: } \mathcal{V} = \mathcal{V}_{SAB CDEF} - \mathcal{V}_{VAB CDEF} = \frac{\mathcal{A}_{AB CDEF} \cdot SO}{3} - \frac{\mathcal{A}_{AB CDEF} \cdot VO}{3} = \frac{\mathcal{A}_{AB CDEF} \cdot (SO - VO)}{3} = 16\sqrt{3} \text{ m}^3.$$

b) $AB CDEF$ – hexagon regulat $\Rightarrow a_b = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ m} \Rightarrow a_p^2 = h^2 + a_b^2 = SO^2 + a_b^2 = 5^2 + (2\sqrt{3})^2 = 37 \Rightarrow a_p = \sqrt{37} \text{ m};$

$$\mathcal{A}_{\text{lat}} = \frac{\mathcal{P}_b \cdot a_p}{2} = \frac{6 \cdot 4 \cdot \sqrt{37}}{2} = 12\sqrt{37} \text{ m}^2.$$

c) $AB CDEF$ – hexagon regulat $\Rightarrow BODC$ – romb $\Rightarrow OC \perp BD$. Notăm $\{M\} = CO \cap BD$ și avem $OM \perp BD$ cu $OM = \frac{OC}{2} = 2 \text{ m}$. Din $VO \perp (ABC)$, $OM \perp BD$ și $OM, BD \subset (ABC) \xrightarrow{T3 \perp} V, BD) = VM$. În $\triangle VOM$ dreptunghic în O teorema lui Pitagora și obținem $VM^2 = VO^2 + OM^2 = 3^2 + 2^2 = 13 \Rightarrow d(V, BD) = \sqrt{13} \text{ m}$.

d) $\angle(SA, (ABC)) = \angle(SA, \text{pr}_{(ABC)} SA) = \angle(SA, AO) = \angle SAO$. În $\triangle SAO$ dreptunghic în O : $\cos(\angle SAO) = \frac{AO}{SA}$, iar aplicând

$$\text{teorema lui Pitagora obținem } SA^2 = SO^2 + OA^2 = 5^2 + 4^2 = 41 \Rightarrow SA = \sqrt{41} \text{ m} \Rightarrow \cos(\angle SAO) = \frac{4}{\sqrt{41}} = \frac{4\sqrt{41}}{41}.$$

Reține!

- Într-o piramidă regulată au loc relațiile: • $\mathcal{A}_{\text{lat}} = \frac{\mathcal{P}_b \cdot a_p}{2}$; • $\mathcal{A}_{\text{tot}} = \mathcal{A}_{\text{lat}} + \mathcal{A}_{\text{bază}}$; • $\mathcal{V} = \frac{\mathcal{A}_{\text{bază}} \cdot h}{3}$.
- Într-un tetraedru regulat de muchie l au loc relațiile: • $h = \frac{l\sqrt{6}}{3}$; • $\mathcal{A}_{\text{lat}} = \frac{3l^2\sqrt{3}}{4}$; • $\mathcal{A}_{\text{tot}} = l^2\sqrt{3}$; • $\mathcal{V} = \frac{l^3\sqrt{2}}{12}$.



Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1 Lucru în echipă: Împreună cu colegul de bancă, rezolvați sarcinile propuse și analizați rezultatele găsite.

Se consideră o piramidă regulată având baza un poligon regulat cu n laturi. Copiază și completează tabelul de mai jos, în care $l, m, a_b, a_p, h, \mathcal{A}_{\text{lat}}, \mathcal{A}_{\text{tot}}$ și $\mathcal{V}$ reprezintă latura bazei, muchia laterală, apotema bazei, apotema piramidei, înălțimea (măsurate în cm), aria laterală, aria totală (măsurate în cm^2), respectiv volumul piramidei (măsurat în cm^3).

	n	l	m	a_b	a_p	h	$\mathcal{A}_{\text{lat}}$	$\mathcal{A}_{\text{tot}}$	$\mathcal{V}$
a)	3	6				5			
b)	3		10	$2\sqrt{3}$					
c)	3				3		36		
d)	4					8			108
e)	4				5		60		
f)	4		5	3					
g)	6	6				3			
h)	6	$6\sqrt{3}$					$270\sqrt{3}$		

2 Suma tuturor muchiilor unui tetraedru regulat este egală cu 72 cm. Determină distanța de la un vârf al acestui tetraedru la fața opusă și volumul tetraedrului.

3 Tetraedrul regulat STEM are volumul egal cu 72 cm^3 .

- Calculează latura acestui tetraedru.
- Calculează distanța dintre centrele a două fețe ale acestui tetraedru.
- Determină tangenta unghiului determinat de muchia ST și planul (TEM).



- 4 O piramidă triunghiulară regulată are aria laterală egală cu 576 cm^2 , iar raza cercului circumscris bazei este de $8\sqrt{3} \text{ cm}$. Calculează volumul acestei piramide.
- 5 O piramidă triunghiulară regulată $VABC$ cu baza ABC are muchia laterală $VA = 20 \text{ cm}$, iar unghiul dintre dreapta VA și planul (ABC) este de 60° . Calculează volumul acestei piramide și distanța de la un vârf al bazei la fața laterală opusă.
- 6 O piramidă triunghiulară regulată $VABC$ are baza ABC de centru O , muchia bazei $AB = 12 \text{ cm}$ și muchia laterală $VA = 2\sqrt{13} \text{ cm}$.
- Calculează volumul acestei piramide.
 - Calculează distanța de la mijlocul laturii BC la dreapta VA .
 - Determină sinusul unghiului dintre două fețe laterale.
- 7 Piramida triunghiulară regulată $VABC$, cu O centrul bazei ABC , are volumul egal cu $1125\sqrt{3} \text{ cm}^3$, iar unghiul dintre planele (VAB) și (ABC) are măsura de 60° .
- Calculează înălțimea piramidei.
 - Determină cotangentă unghiului dintre dreapta VA și planul (VOC) .
- 8 Calculează aria totală și volumul unei piramide patrulateră regulate care are toate muchiile de lungime 10 cm .
- 9 O piramidă patrulateră regulată are raza cercului circumscris bazei de $6\sqrt{2} \text{ cm}$ și volumul egal cu 384 cm^3 . Determină aria laterală a piramidei și distanța de la centrul bazei la o față laterală.
- 10 O piramidă patrulateră regulată $VABCD$ are aria bazei egală cu 144 cm^2 și aria laterală egală cu 240 cm^2 .
- Calculează volumul piramidei.
 - Determină tangenta unghiului dintre o muchie laterală și planul (ABC) .
 - Calculează sinusul unghiului dintre planele (VBC) și (ABC) .
- 11 O cutie de cadouri are forma unei piramide patrulateră regulate $VABCD$ cu baza $ABCD$, ca în figura 11. Cutia se împachetează integral și apoi se fixează un ornament în punctul $F \in VC$, astfel încât panglica folosită $BF + FD$ să aibă lungimea minimă. Știm că $VO = 18\sqrt{7} \text{ cm}$ și $AO = 18\sqrt{2} \text{ cm}$, unde O este centrul bazei.
- Calculează volumul cutiei.
 - Determină aria triunghiului FBD .
 - Calculează cosinusul unghiului format de VO cu planul (FBD) .
- 12 Un vas în formă de piramidă hexagonală regulată $VABCDEF$ (figura 12) cu vârful V , $VA = 24 \text{ cm}$ și $AB = 12 \text{ cm}$, este plin cu apă. Se toarnă toată apa din acest vas într-o formă specială pentru a se forma cuburi de gheață cu latura de 2 cm fiecare. Calculează câte cuburi de gheață se obțin.
- 13 Un cort are forma unei piramide hexagonale regulate $VABCDEF$ cu muchia bazei $AB = 4 \text{ m}$ și muchia laterală $VA = 5 \text{ m}$. Cu excepția podelei, care este fabricată din lemn, cortul este confecționat din pânză.
- Stabilește dacă ajung 56 m^2 de pânză pentru realizarea cortului.
 - Podeaua se acoperă cu plăci de lemn, fiecare placă având forma unui pătrat de latură egală cu 50 cm . Știind că plăcile de lemn sunt livrate în pachete de câte 4 bucăți, calculează de câte pachete este nevoie pentru a acoperi podeaua cortului în întregime (se neglijează pierderile rezultate prin tăiere).
- 14 În piramida hexagonală regulată $VABCDEF$ cu înălțimea $VO = 8 \text{ cm}$, secțiunea diagonală VAD are aria egală cu 64 cm^2 .
- Calculează volumul piramidei.
 - Calculează distanța de la punctul A la planul (VBE) .
 - Determină măsura unghiului dintre dreapta VB și planul bazei.
- 15 În piramida hexagonală regulată $VABCDEF$ din figura 13, aria secțiunii VBD este egală cu $15\sqrt{3} \text{ cm}^2$, iar muchia bazei este $AB = 6 \text{ cm}$.
- Calculează volumul piramidei.
 - Determină măsura unghiului dintre planele (MBD) și (ABC) , unde M este mijlocul lui CV .
 - Determină tangenta unghiului dintre dreapta MA și planul bazei.

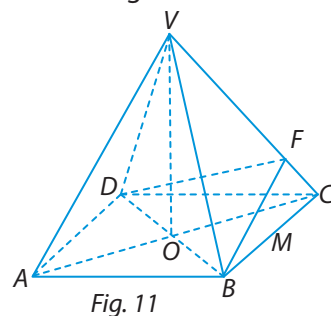


Fig. 11

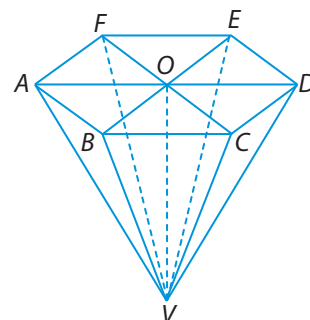


Fig. 12

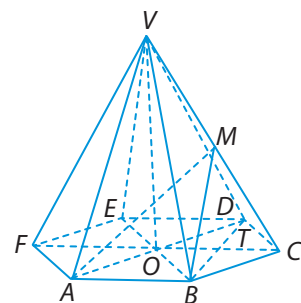


Fig. 13

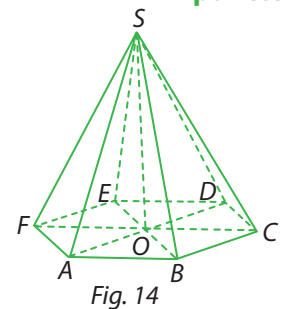
Din oficiu: 1 punct

AUTOEVALUARE

Timp de lucru: 40 de minute

Pentru fiecare problemă, alege litera corespunzătoare răspunsului corect.

- 1** Aria laterală a unui tetraedru regulat cu muchia de 4 cm este egală cu: 2 puncte
 a) $12\sqrt{3}$ cm²; b) $16\sqrt{3}$ cm²; c) $12\sqrt{2}$ cm²; d) 36 cm².
- 2** Aria totală a unei piramide patrulateră regulate cu muchia bazei de 6 cm și apotema piramidei de 5 cm este egală cu: 2 puncte
 a) 120 cm²; b) 60 cm²; c) 96 cm²; d) 156 cm².
- 3** Volumul unei piramide triunghiulare regulate cu înălțimea de 12 cm și apotema bazei de 9 cm este egal cu: 2 puncte
 a) 972 cm³; b) $972\sqrt{3}$ cm³; c) $81\sqrt{3}$ cm³; d) $2916\sqrt{3}$ cm³.
- 4** Piramida hexagonală regulată $SAB CDEF$ din figura 14 are înălțimea $SO = 4$ cm și volumul egal cu $24\sqrt{3}$ cm³. Distanța de la punctul O la planul (SBC) este egală cu: 2 puncte
 a) 4 cm; b) 4,8 cm; c) 2,4 cm; d) $2\sqrt{3}$ cm.
- 5** O piramidă triunghiulară regulată are muchia bazei de 36 cm și înălțimea de 18 cm. Afirmația: „Măsura unghiului dintre o față laterală și planul bazei, în această piramidă, este egală cu 60° ” este: 1 punct
 a) adevărată; b) falsă.



LECȚIA 5

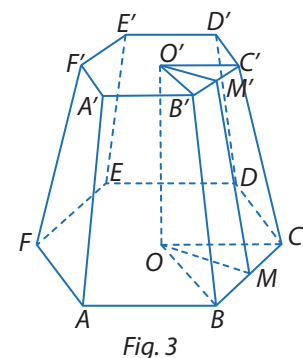
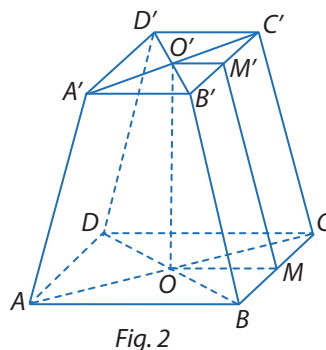
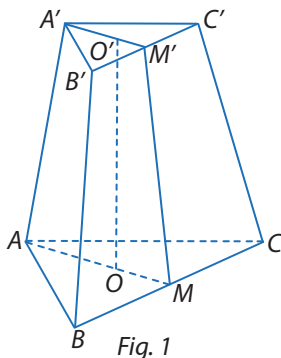
Trunchiul de piramidă regulată. Distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul trunchiului de piramidă regulată. Aria laterală, aria totală și volumul trunchiului de piramidă regulată



Ne amintim

Corpul rămas după secționarea unei piramide (regulate) cu un plan paralel cu baza acesteia și îndepărtarea piramidei mici astfel obținute este un trunchi de piramidă (regulată).

Un trunchi de piramidă regulată are bazele poligoane regulate asemenea și muchiile laterale congruente. În figurile de mai jos sunt ilustrate: un **trunchi de piramidă triunghiulară regulată** (figura 1), un **trunchi de piramidă patrulateră regulată** (figura 2) și un **trunchi de piramidă hexagonală regulată** (figura 3).



Înălțimea trunchiului de piramidă este distanța dintre cele două plane paralele ce conțin bazele trunchiului; în cazul trunchiului de piramidă regulată, înălțimea acestuia este distanța dintre centrele celor două baze și se notează, de obicei, cu h .

Într-un trunchi de piramidă regulată avem trei tipuri de apoteme:

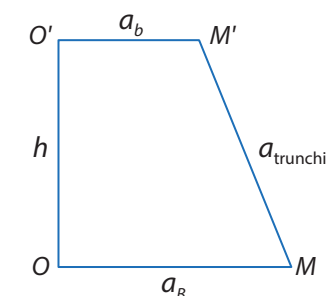
- **apotema trunchiului** (notată a_{trunchi}), care este distanța dintre cele două laturi paralele ale unei fețe laterale în trunchi;
- **apotema bazei mici** (notată a_b), care este distanța de la centrul bazei mici a trunchiului la o muchie a acesteia;
- **apotema bazei mari** (notată a_B), care este distanța de la centrul bazei mari a trunchiului la o muchie a acesteia.

$$h^2 + (a_B - a_b)^2 = a_{\text{trunchi}}^2$$

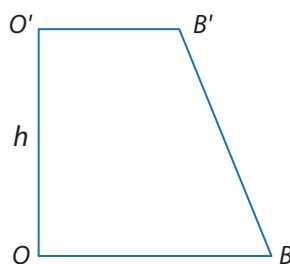
$$m_{\text{lat trunchi}}^2 = (R - r)^2 + h^2$$

Reamintim relațiile de proporționalitate care au loc într-un trunchi de piramidă regulată cu baza mică de centru O' și muchie $A'B'$, iar baza mare de centru O și muchie AB : $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'O'}{BO} = \frac{a_b}{a_B}$.

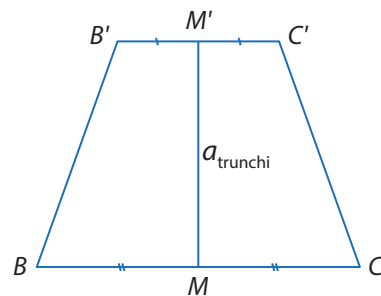
Cu notațiile din figurile 1-3, pentru a calcula distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul unui trunchi de piramidă regulată, sunt de interes următoarele trei trapeze relevante:



$OMM'O'$ – trapez dreptunghic
($\angle O = \angle O' = 90^\circ$)
 $MM'^2 = OO'^2 + (OM - O'M')^2$



$OBB'O'$ – trapez dreptunghic
($\angle O = \angle O' = 90^\circ$)
 $BB'^2 = OO'^2 + (OB - O'B')^2$



$BCC'B'$ – trapez isoscel de baze $B'C' \parallel BC$ și înălțime $MM' = a_{\text{trunchi}}$
 $BB'^2 = M'M^2 + \left(\frac{BC - B'C'}{2}\right)^2$



Rezolvăm împreună

1 Un trunchi de piramidă regulată $ABCA'B'C'$ are înălțimea de 6 cm și muchiile bazelor $AB = 18$ cm, $A'B' = 12$ cm (vezi figura 4).

- Calculează apotema trunchiului.
- Determină distanța de la punctul A' la dreapta BC .
- Determină măsura unghiului dintre o muchie laterală și planul bazei mari a trunchiului.

Rezolvare:

a) Notăm cu O și O' centrele bazelor ABC , respectiv $A'B'C'$ și cu M și M' mijloacele muchiilor BC , respectiv $B'C'$;

$$a_B = OM = \frac{AM}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ cm};$$

$$\frac{a_b}{a_B} = \frac{A'B'}{AB} \Leftrightarrow \frac{a_b}{3\sqrt{3}} = \frac{12}{18} \Rightarrow a_b = 2\sqrt{3} \text{ cm}.$$

Fie P proiecția punctului M' pe OM ; cum $OMM'O'$ este trapez dreptunghic de baze

$OM \parallel O'M'$ și $\angle O'OM = 90^\circ$, deducem că $OPM'O'$ este dreptunghi cu $OP = O'M' = a_b \Rightarrow PM = a_B - a_b = \sqrt{3}$ cm și $M'P = OO' = h = 6$ cm. Aplicăm teorema lui Pitagora în $\triangle M'PM$ cu $\angle P = 90^\circ$ și aflăm:

$$M'M^2 = M'P^2 + PM^2 = 6^2 + (\sqrt{3})^2 = 39 \Rightarrow a_{\text{trunchi}} = MM' = \sqrt{39} \text{ cm}.$$

b) $\triangle ABC$ este echilateral, M – mijlocul lui $BC \Rightarrow BC \perp AM$, $OO' \perp (ABC)$, $BC \subset (ABC) \Rightarrow BC \perp OO'$ și cum AM , $OO' \subset (AMA') \Rightarrow BC \perp (AMA')$, $A'M \subset (AMA') \Rightarrow BC \perp A'M$, deci $d(A', BC) = A'M$. Fie T proiecția punctului A' pe AM ; atunci $TOO'A'$ este dreptunghi cu $A'T = OO' = 6$ cm și $TO = A'O' = 2 \cdot O'M' = 4\sqrt{3}$ cm $\Rightarrow TM = TO + OM = 7\sqrt{3}$ cm. Aplicând teorema lui Pitagora în $\triangle A'TM$ cu $\angle T = 90^\circ$, obținem $A'M^2 = A'T^2 + TM^2 = 6^2 + (7\sqrt{3})^2 = 183 \Rightarrow A'M = \sqrt{183}$ cm.

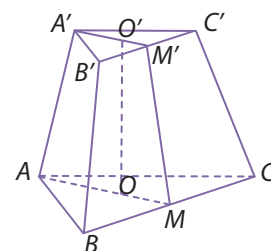
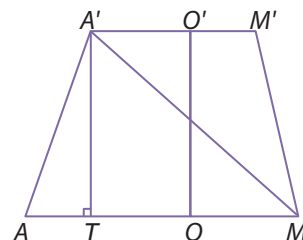
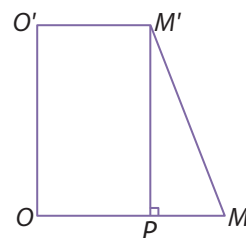


Fig. 4



$$c) \angle(AA', (ABC)) = \angle(AA', \text{pr}_{(ABC)} AA') = \angle(AA', AT) = \angle A'AT; AT = AM - TM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} - TM = 9\sqrt{3} - 7\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \text{ cm. În}$$

$$\triangle A'AT, \angle T = 90^\circ, \text{avem } AT = 2\sqrt{3} \text{ cm și } A'T = 6 \text{ cm, deci } \tan(\angle A'AT) = \frac{A'T}{AT} = \sqrt{3}, \text{ de unde } \angle A'AT = 60^\circ.$$

2 Trunchiul de piramidă patrulateră regulată $ABCD A'B'C'D'$ din figura 5 are secțiunea diagonală trapezul isoscel $ACC'A'$ cu diagonalele perpendiculare. Muchia bazei mici și muchia laterală a trunchiului sunt egale cu 6 cm, respectiv 10 cm.

- Calculează înălțimea piramidei din care provine trunchiul.
- Determină distanța de la punctul O la planul (BCC') .
- Determină sinusul unghiului dintre planele (BCC') și (ABC) .

Rezolvare:

a) Notăm cu P intersecția diagonalelor în trapezul isoscel $ACC'A'$ de baze $AC \parallel A'C'$. Cum $AC' \perp A'C$, deducem că triunghiurile $A'PC'$ și APC sunt dreptunghice isoscele de ipotenuze $A'C'$, respectiv AC . Atunci $A'C' = A'P\sqrt{2}$, iar cum $A'C'$ este diagonală în pătratul $A'B'C'D'$, deducem că $A'P = A'B' = 6$ cm. Analog, obținem că $AP = PC = AB$. În $\triangle C'PC$ cu $\angle P = 90^\circ$, aplicând teorema lui Pitagora, avem $C'C^2 = C'P^2 + PC^2 \Rightarrow PC = 8$ cm $\Rightarrow AB = 8$ cm.

Fie O și O' mijloacele bazelor AC , respectiv $A'C'$, în trapezul isoscel $ACC'A'$; cum $AC' \cap A'C = \{P\}$, deducem că punctele O', P, O sunt coliniare și $OO' = O'P + PO = \frac{A'C'}{2} + \frac{AC}{2} = \frac{(A'B' + AB)\sqrt{2}}{2} = 7\sqrt{2}$ cm. Dacă V este vârful piramidei din care pro-

vine trunchiul, atunci $\frac{VO - OO'}{VO} = \frac{6}{8} \Leftrightarrow \frac{VO - 7\sqrt{2}}{VO} = \frac{3}{4}$, de unde rezultă că înălțimea piramidei este $VO = 28\sqrt{2}$ cm.

b) Notăm cu M și M' mijloacele muchiilor BC , respectiv $B'C'$; atunci $OM = \frac{AB}{2} = 4$ cm și $O'M' = \frac{A'B'}{2} = 3$ cm. În trapezul dreptunghic $OMM'O'$ de baze $OM \parallel O'M'$ construim $OH \perp MM'$, $H \in MM'$.

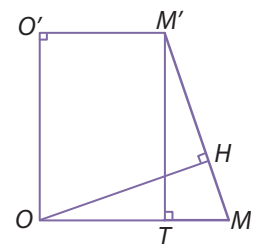
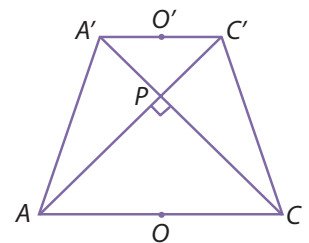
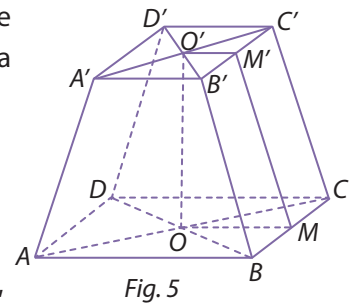
$$\left. \begin{array}{l} OH \perp MM' \\ MM' \perp BC \\ OM \perp BC \\ MM', BC \subset (BCC') \end{array} \right\} \begin{array}{l} R_2 T_3 \perp \\ \Rightarrow OH \perp (BCC') \Rightarrow d(O, (BCC')) = OH. \text{ Fie } M'T \perp OM, T \in OM. \end{array}$$

Atunci $OTM'O'$ este dreptunghi $\Rightarrow M'T = OO' = 7\sqrt{2}$ cm și $OT = O'M' = 3$ cm $\Rightarrow TM = OM - OT = 4 - 3 = 1$ cm. Aplicând teorema lui Pitagora în $\triangle M'TM$ cu $\angle T = 90^\circ$, obținem $M'M^2 = M'T^2 + TM^2 = (7\sqrt{2})^2 + 1 = 99 \Rightarrow$

$$\Rightarrow M'M = 3\sqrt{11} \text{ cm; } \sin_{\triangle M'OM} = \frac{M'T \cdot OM}{2} = \frac{OH \cdot MM}{2} \Rightarrow OH = \frac{M'T \cdot OM}{M'M} = \frac{28\sqrt{22}}{33} \text{ cm.}$$

$$\left. \begin{array}{l} (BCC') \cap (ABC) = BC \\ OM \perp BC, OM \subset (ABC) \\ M'M \perp BC, M'M \subset (BCC') \end{array} \right\} \Rightarrow \angle((BCC'), (ABC)) = \angle(M'M, OM) = \angle M'MO = \angle M'MT.$$

$$\text{În } \triangle M'TM \text{ dreptunghic în } T: \sin(\angle M'MT) = \frac{M'T}{MM'} = \frac{7\sqrt{2}}{3\sqrt{11}} = \frac{7\sqrt{22}}{33}.$$



Observăm și descoperim cunoștințe noi

În cele ce urmează vom analiza noțiunile de arie laterală, arie totală și volum pentru trunchiul de piramidă regulată. Desigur, acestea pot fi obținute prin diferență între atributele numerice ale piramidei regulate din care provine trunchiul și valorile omoloage din piramida mică îndepărtată, luând în considerare rapoartele de asemănare cunoscute între elementele celor două piramide.

Aria laterală a trunchiului de piramidă regulată este suma ariilor fețelor laterale (care sunt trapeze isoscele) și se notează cu $\mathcal{A}_{\text{lat}}$. Pentru trunchiul de piramidă regulată, având bazele poligoane regulate cu n laturi, $\mathcal{P}_b$ perimetrul bazei mici și $\mathcal{P}_B$ perimetrul bazei mari, avem:

$$\mathcal{A}_{\text{lat}} = n \cdot \mathcal{A}_{\text{față}}$$

$$\mathcal{A}_{\text{lat}} = \frac{(\mathcal{P}_b + \mathcal{P}_B) \cdot a_{\text{trunchi}}}{2}$$

Aria totală a trunchiului de piramidă regulată este suma dintre aria laterală, aria bazei mici ($\mathcal{A}_b$) și aria bazei mari ($\mathcal{A}_B$) și se notează cu $\mathcal{A}_{\text{tot}}$.

$$\mathcal{A}_{\text{tot}} = \mathcal{A}_{\text{lat}} + \mathcal{A}_b + \mathcal{A}_B$$

Volumul unui trunchi de piramidă regulată cu înălțimea h , aria bazei mici $\mathcal{A}_b$ și aria bazei mari $\mathcal{A}_B$ se notează cu $\mathcal{V}$ și este dat de relația:

$$\mathcal{V} = \frac{h}{3} (\mathcal{A}_b + \mathcal{A}_B + \sqrt{\mathcal{A}_b \cdot \mathcal{A}_B})$$

OBSERVAȚIE IMPORTANTĂ: Prin secționarea unei piramide cu un plan paralel cu baza se obține o piramidă mică, „asemenea” cu piramida inițială (și un trunchi de piramidă). Dacă notăm cu k raportul dintre muchia bazei piramidei mici și muchia bazei piramidei mari, atunci au loc relațiile:

$$\frac{\mathcal{A}_{\text{lat piramidă mică}}}{\mathcal{A}_{\text{lat piramidă mare}}} = k^2, \quad \frac{\mathcal{A}_{\text{tot piramidă mică}}}{\mathcal{A}_{\text{tot piramidă mare}}} = k^2, \quad \frac{\mathcal{V}_{\text{piramidă mică}}}{\mathcal{V}_{\text{piramidă mare}}} = k^3.$$

Aplicăm cunoștințele

1 Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are aria bazei mici de 100 cm^2 , aria bazei mari de 225 cm^2 , iar volumul de 950 cm^3 . Calculează:

- înălțimea trunchiului;
- volumul piramidei din care provine trunchiul;
- aria laterală a trunchiului.

Rezolvare:

a) $\mathcal{V} = \frac{h}{3} (\mathcal{A}_b + \mathcal{A}_B + \sqrt{\mathcal{A}_b \cdot \mathcal{A}_B}) \Leftrightarrow 950 = \frac{h}{3} (225 + 100 + 150) \Rightarrow h = 6 \text{ cm}.$

b) Fie l lungimea muchiei bazei mici și L lungimea muchiei bazei mari. Din $\mathcal{A}_b = 100 \text{ cm}^2$ obținem $l = 10 \text{ cm}$ și similar, din $\mathcal{A}_B = 225 \text{ cm}^2$ obținem $L = 15 \text{ cm}$. Știm că trunchiul a rezultat prin secționarea piramidei mari și

eliminarea piramidei mici, deci $\mathcal{V}_{\text{piramidă mare}} = \mathcal{V}_{\text{piramidă mică}} + \mathcal{V}_{\text{trunchi}}$, iar $\frac{\mathcal{V}_{\text{piramidă mică}}}{\mathcal{V}_{\text{piramidă mare}}} = \left(\frac{l}{L}\right)^3 = \left(\frac{10}{15}\right)^3 = \frac{8}{27}$. Așadar,

$$\mathcal{V}_{\text{trunchi}} = \left(1 - \frac{8}{27}\right) \cdot \mathcal{V}_{\text{piramidă mare}} \Rightarrow \mathcal{V}_{\text{piramidă mare}} = 1350 \text{ cm}^3.$$

c) Pentru a calcula aria laterală a trunchiului, vom determina mai întâi apotema acestuia: $a_{\text{trunchi}}^2 = h^2 + (a_B - a_b)^2$,

$$a_B = \frac{L}{2} = 7,5 \text{ cm}, \quad a_b = \frac{l}{2} = 5 \text{ cm} \Rightarrow a_{\text{trunchi}}^2 = 6^2 + 2,5^2 = 42,25 \Rightarrow a_{\text{trunchi}} = 6,5 \text{ cm}; \quad \mathcal{A}_{\text{lat}} = \frac{(\mathcal{P}_b + \mathcal{P}_B) \cdot a_{\text{trunchi}}}{2} = 325 \text{ cm}^2.$$

OBSERVAȚIE: Cunoașterea detaliată a elementelor corpului și a formulelor de calcul au permis rezolvarea integrală a problemei fără a fi necesar desenul.

2 Un vas de sticlă, având forma unui trunchi de piramidă hexagonală regulată $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$ (figura 6) cu $A'B' = 4\sqrt{3}$ cm, $AB = 8\sqrt{3}$ cm și apotema de 10 cm, este plin cu apă. Calculează:

- aria laterală a vasului;
- volumul de apă din acest vas;
- sinusul unghiului dintre dreapta AM' și planul (EFD) , unde M' este mijlocul muchiei $B'C'$.

Rezolvare:

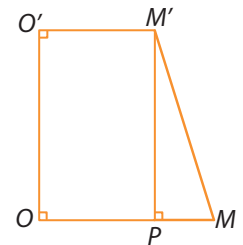
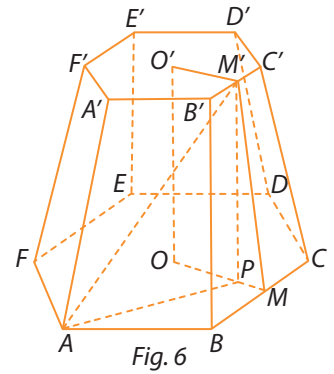
$$\text{a) } \mathcal{A}_{\text{lat}} = \frac{(\mathcal{P}_b + \mathcal{P}_B) \cdot a_{\text{trunchi}}}{2} = \frac{(6 \cdot 4\sqrt{3} + 6 \cdot 8\sqrt{3}) \cdot 10}{2} = 360\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

$$\text{b) } AB = 8\sqrt{3} \text{ cm} \Rightarrow a_B = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 12 \text{ cm. Analog, } a_b = 6 \text{ cm și } a_{\text{trunchi}}^2 = h^2 + (a_B - a_b)^2 \Rightarrow h = 8 \text{ cm.}$$

$$\text{Atunci } \mathcal{V}_{\text{apă}} = \mathcal{V}_{\text{trunchi}} = 1344\sqrt{3} \text{ cm}^3.$$

c) Fie O, O' și P centrul bazei mari, centrul bazei mici, respectiv proiecția lui M' pe OM ; $\angle(AM', (EFD)) = \angle(AM', (ABC)) = \angle(AM', \text{pr}_{(ABC)} AM')$; $M'P \parallel OO', OO' \perp (ABC) \Rightarrow M'P \perp (ABC) \Rightarrow \text{pr}_{(ABC)} AM' = AP \Rightarrow \angle(AM', (EFD)) = \angle(AM', AP) = \angle M'AP$; $ABCDEF$ este hexagon regulat de centru O, M – mijlocul lui $BC \Rightarrow OM$ – bisectoarea $\angle BOC = 60^\circ$, deci $\angle BOM = 30^\circ$. Cum $\angle AOB = 60^\circ$ și $\angle BOM = 30^\circ$, deducem că $\angle AOM = 90^\circ$. Aplicăm teorema lui Pitagora în $\triangle AOP$ cu $\angle AOP = 90^\circ, AO = 8\sqrt{3}$ cm și $OP = \frac{OM}{2} = 6$ cm și obținem $AP^2 = 228 \text{ cm}^2$.

Aplicăm teorema lui Pitagora în $\triangle M'AP$ cu $\angle M'PA = 90^\circ$ ($M'P \perp (ABC)$ și $AP \subset (ABC)$) și găsim: $M'A^2 = M'P^2 + PA^2 = 292 \Rightarrow M'A = 2\sqrt{73}$ cm. În $\triangle M'AP$ dreptunghic în P avem $\sin(\angle M'AP) = \frac{M'P}{M'A} = \frac{4\sqrt{73}}{73}$.



Reține!

Într-un trunchi de piramidă regulată, cu notațiile cunoscute din figurile 1-3, care provine din piramida regulată de vârf V , au loc relațiile:

$$\begin{aligned} \bullet \mathcal{A}_{\text{lat}} &= \frac{(\mathcal{P}_b + \mathcal{P}_B) \cdot a_{\text{trunchi}}}{2}; & \bullet \mathcal{A}_{\text{tot}} &= \mathcal{A}_{\text{lat}} + \mathcal{A}_b + \mathcal{A}_B; & \bullet \mathcal{V} &= \frac{h}{3} (\mathcal{A}_b + \mathcal{A}_B + \sqrt{\mathcal{A}_b \cdot \mathcal{A}_B}); \\ \bullet \frac{A'B'}{AB} &= \frac{A'O'}{AO} = \frac{a_b}{a_B} = \frac{VO'}{VO} = \frac{VM'}{VM} = k; & \bullet \frac{\mathcal{A}_b}{\mathcal{A}_B} &= \frac{\mathcal{A}_{\text{lat piramidă mică}}}{\mathcal{A}_{\text{lat piramidă mare}}} = \frac{\mathcal{A}_{\text{tot piramidă mică}}}{\mathcal{A}_{\text{tot piramidă mare}}} = k^2; & \bullet \frac{\mathcal{V}_{\text{piramidă mică}}}{\mathcal{V}_{\text{piramidă mare}}} &= k^3. \end{aligned}$$



Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1 Lucru în echipă: Împreună cu colegul de bancă, rezolvați sarcinile propuse și analizați rezultatele găsite. Se consideră trunchiul de piramidă regulată având bazele cu câte n laturi fiecare. Copiază și completează tabelul de mai jos, în care $l, L, m, a_b, a_B, a_{\text{trunchi}}, \mathcal{A}_{\text{lat}}, \mathcal{A}_{\text{tot}}$ și $\mathcal{V}$ reprezintă latura bazei mici, latura bazei mari, muchia laterală, apotema bazei mici, apotema bazei mari, apotema trunchiului (măsurate în cm), aria laterală, aria totală (măsurate în cm^2), respectiv volumul trunchiului (măsurat în cm^3).

	n	l	L	m	a_b	a_B	a_{trunchi}	$\mathcal{A}_{\text{lat}}$	$\mathcal{A}_{\text{tot}}$	$\mathcal{V}$
a)	3	9	15	6			5			
b)	3	12	18				$2\sqrt{3}$			
c)	4		18				$4\sqrt{3}$	$224\sqrt{3}$		
d)	4	8				6			368	
e)	6				$5\sqrt{3}$	$10\sqrt{3}$				$1750\sqrt{3}$
f)	6					$10\sqrt{3}$		$768\sqrt{3}$	$1584\sqrt{3}$	



2 Tetraedrul regulat $ABCD$ se secționează cu un plan paralel cu planul (BCD) , care trece prin mijlocul înălțimii AO . Determină ce procent din volumul tetraedrului îl reprezintă volumul trunchiului obținut.

3 Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are laturile bazelor de 6 cm, respectiv 18 cm, iar înălțimea piramidei din care provine trunchiul egală cu 27 cm.

- Calculează înălțimea trunchiului.
- Determină aria laterală a trunchiului.

4 În figura 7 este ilustrat un suport de creioane de forma unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ cu $AB = 18\sqrt{3}$ cm, $A'B' = 2\sqrt{3}$ cm și suma tuturor muchiilor egală cu $78 + 60\sqrt{3}$ cm.

a) Calculează înălțimea minimă pe care o poate avea un creion din acest suport, astfel încât vârful său să atingă planul $(A'B'C')$ (admitem că poziționăm creionul cu vârful în sus).

- Determină volumul acestui suport.

5 Un recipient de forma unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ (figura 8), cu $A'B' = 20$ cm și $AB = 40$ cm, se umple cu apă. S-au turnat în total 2,8 l de apă.

- Calculează înălțimea recipientului.
- Calculează aria triunghiului APQ , unde P și Q sunt proiecțiile vârfulor B' și C' pe planul (ABC) .
- Determină sinusul unghiului dintre planele $(A'PQ)$ și (ABC) .

6 Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are muchia laterală de 30 cm, raza cercului circumscris bazei mari egală cu $\frac{50\sqrt{15}}{3}$ cm, iar apotema bazei mici este $\frac{3}{5}$ din apotema bazei mari.

- Calculează distanța de la centrul bazei mari la o muchie a bazei mici.
- Determină tangenta unghiului dintre o muchie laterală și planul bazei mari.
- Calculează aria laterală a trunchiului.

7 Calculează aria totală și volumul unui trunchi de piramidă patrulateră regulată cu latura bazei mici de 8 cm, latura bazei mari de 24 cm și apotema de $8\sqrt{5}$ cm.

8 Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are înălțimea de 6 cm, muchia bazei mari de 12 cm, iar volumul său este $\frac{7}{8}$ din volumul piramidei din care provine trunchiul. Calculează aria laterală a acestui trunchi.

9 O piramidă patrulateră regulată, având toate muchiile de lungime 12 cm, se secționează cu un plan paralel cu baza, situat la o treime de bază și la două treimi de vârful piramidei. Calculează aria totală și volumul trunchiului obținut.

10 Sculptura emblematică „Coloana Infinitului” a lui Constantin Brâncuși este formată dintr-o succesiune de module octaedrice suprapuse. În figura 9 este ilustrat un astfel de modul, fiind format din trunchiurile de piramidă patrulateră regulată $ABCDMNQ$ și $A'B'C'D'MNPQ$ cu $AB = A'B' = 90$ cm, $MN = 45$ cm și $AM = A'M$, iar înălțimea unui modul este $OO' = 90$ cm, unde O și O' sunt centrele bazelor $ABCD$, respectiv $A'B'C'D'$.

- Arată că punctele A , M și O' sunt coliniare.
- Determină măsura unghiului dintre dreapta AM și planul $(B'C'PN)$.
- Calculează volumul a 15 astfel de module, în m^3 .

11 Pentru a construi fundația unui monument, se sapă o groapă de forma unui trunchi de piramidă patrulateră regulată $ABCA'B'C'D'$ (ca în figura 10), cu $AA' = A'B' = 6$ m și cu unghiul dintre o muchie laterală și muchia bazei mari pe care o intersectează de 60° .

- Calculează volumul de pământ scos pentru a obține spațiul necesar fundației.
- Determină distanța de la punctul A la dreapta BB' .
- Determină sinusul unghiului dintre două fețe laterale alăturate.

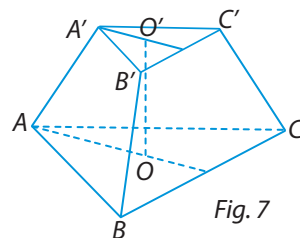


Fig. 7

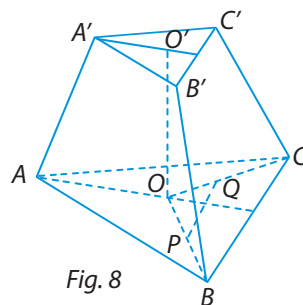


Fig. 8

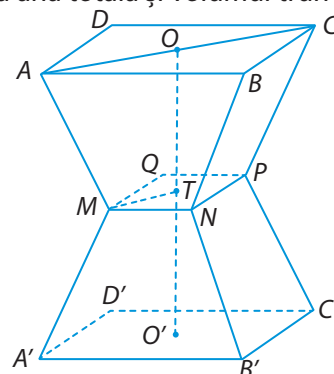


Fig. 9

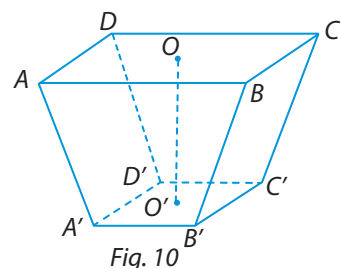


Fig. 10

12 Un trunchi de piramidă patrulateră regulată $ABCD A'B'C'D'$ (figura 11) are ariile bazelor de 100 cm^2 , respectiv 36 cm^2 , iar cosinusul unghiului făcut de o față laterală cu planul bazei mari este egal cu $\frac{\sqrt{2}}{7}$.

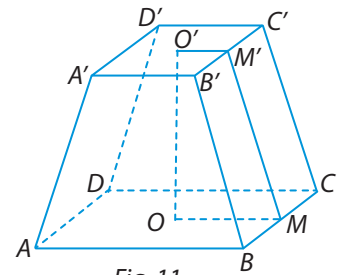


Fig. 11

- Calculează lungimea muchiei laterale a trunchiului.
- Determină distanța de la centrul bazei mari la o față laterală a trunchiului.
- Calculează cosinusul unghiului determinat de dreapta BB' cu planul $(ACCA')$.

13 O lumânare are forma unui trunchi de piramidă hexagonală regulată cu muchia bazei mici de 12 cm , apotema de $8\sqrt{3} \text{ cm}$ și unghiul dintre o față laterală și planul bazei mari de 60° . Lumânarea se topește integral, iar ceara obținută se pune în forme de paralelipiped dreptunghic, fiecare de dimensiuni $8 \text{ cm} \times 7 \text{ cm} \times 12 \text{ cm}$, spre a obține lumânări mai mici.

- Calculează volumul lumânării inițiale.
- Determină numărul maxim de lumânări mici pe care le putem obține din lumânarea inițială.
- Calculează aria totală a piramidei din care provine trunchiul.

14 În trunchiul de piramidă hexagonală regulată $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$ din figura 12, muchia laterală este de 40 cm , FC' este bisectoarea unghiului $F'FC$, iar unghiul dintre o muchie laterală și planul bazei mari este de 60° .

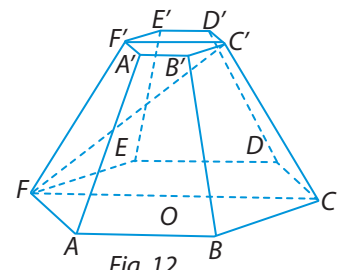


Fig. 12

- Calculează aria laterală a trunchiului.
- Calculează aria triunghiului $C'FB$.
- Exprimând volumul corpului $C'FAB$ în două moduri, calculează distanța de la punctul A la planul $(C'FB)$.

15 Trunchiul de piramidă hexagonală regulată $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$ din figura 13, are $AB = 30 \text{ cm}$, $A'B' = 24 \text{ cm}$ și înălțimea $OO' = 6 \text{ cm}$.

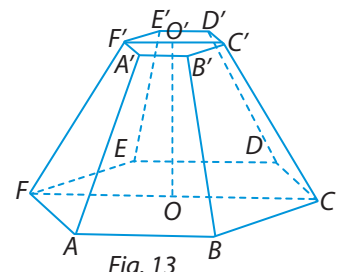


Fig. 13

- Calculează aria laterală a trunchiului.
- Determină măsura unghiului dintre o muchie laterală și planul bazei mari.
- Determină distanța de la punctul A' la muchia CD.

Din oficiu: 1 punct

AUTOEVALUARE

Timp de lucru: 40 de minute

Pentru fiecare problemă, alege litera corespunzătoare răspunsului corect.

1 Aria laterală a unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată, care provine prin secționarea unui tetraedru regulat de muchie 4 cm cu un plan paralel cu baza, dus prin jumătatea înălțimii tetraedrului, este egală cu: 2 puncte

- a) $9\sqrt{3} \text{ cm}^2$; b) $12\sqrt{3} \text{ cm}^2$; c) $3\sqrt{3} \text{ cm}^2$; d) $16\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

2 Volumul unui trunchi de piramidă patrulateră regulată cu muchiile bazelor de 10 cm , respectiv 16 cm și apotema de 5 cm este egal cu: 2 puncte

- a) 172 cm^3 ; b) 688 cm^3 ; c) 860 cm^3 ; d) 1000 cm^3 .

3 Secțiunea diagonală a unui trunchi de piramidă patrulateră regulată cu înălțimea de $4\sqrt{2} \text{ cm}$ este un trapez isoscel cu diagonalele perpendiculare. Dacă muchia bazei mici este o treime din muchia bazei mari, apotema trunchiului este egală cu: 2 puncte

- a) $4\sqrt{2} \text{ cm}$; b) 6 cm ; c) $5\sqrt{2} \text{ cm}$; d) $7\sqrt{2} \text{ cm}$.

4 Un trunchi de piramidă hexagonală regulată are apotema de $3\sqrt{3} \text{ cm}$, latura bazei mici de 6 cm , iar aria bazei mari este de patru ori mai mare decât aria bazei mici. Aria totală a acestui trunchi este egală cu: 2 puncte

- a) $162\sqrt{3} \text{ cm}^2$; b) $216\sqrt{3} \text{ cm}^2$; c) $432\sqrt{3} \text{ cm}^2$; d) $512\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

5 Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are latura bazei mici de 12 cm , latura bazei mari de 18 cm și unghiul dintre o față laterală și planul bazei de 60° . Afirmția: „Muchia laterală a trunchiului este egală cu 5 cm .” este: 1 punct

- a) adevărată; b) falsă.



TEMĂ DE INVESTIGAȚIE

- **Calculul distanței de la un punct la un plan în corpurile geometrice studiate**
- **Alegerea metodei adecvate pentru determinarea distanței de la un punct la un plan**
- **Exemple concludente**

MOD DE LUCRU: Echipe de câte 4-5 elevi

DURATA: 3 ore de curs

STRUCTURA RĂSPUNSULUI:

- Calcularea distanței de la un punct la un plan în corpurile geometrice studiate. Diverse metode
- Dați câte un exemplu de problemă dintre cele studiate pentru fiecare metodă de calcul.
- Prezența în fața clasei rezultatele investigației.

SCHEMA DE NOTARE

1. Enumerarea a patru modalități diferite pentru calcularea distanței de la un punct la un plan în corpurile studiate 1 p
2. Alegerea și rezolvarea uneia dintre problemele studiate pentru fiecare dintre metodele enumerate 2 p
3. Justificarea metodei alese 1 p
4. Abordarea celorlalte metode în rezolvarea problemei și compararea lor: avantaje/dezavantaje 2 p
5. Claritatea argumentării și forma prezentării 2 p
6. Cooperarea și participarea la lucrul în echipă 1 p
7. Flexibilitatea gândirii și deschiderea către noi idei. Creativitatea. Inițiativa 1 p

0. Introducere

Determinarea distanței de la un punct la un plan reprezintă una dintre cele mai întâlnite cerințe de la subpunctul b) al problemei 6 de la subiectul al III-lea din cadrul unui subiect de Evaluare Națională. Putând fi calculată prin mai multe metode, aceasta îi lasă elevului oportunitatea să aleagă soluția pe care o consideră cea mai convenabilă. Acest material va explora 5 metode de determinare a distanței de la un punct la un plan, rezultatul fiind menit să reprezinte un ghid pentru rezolvarea acestui tip de probleme.

Cele 5 metode pe care le vom aborda sunt:

1. Construirea perpendicularei pe plan.
2. Exprimarea volumului unui tetraedru în două moduri.
3. Utilizarea reciprocei a doua a teoremei celor trei perpendiculare.
4. Calcularea distanței de la o dreaptă paralelă cu planul considerat la acesta.
5. Calcularea distanței de la un plan paralel cu planul considerat la acesta.

La fiecare metodă, se vor întâlni următoarele conținuturi:

- ⇒ teorie – definiția și alte aspecte teoretice relevante;
- ⇒ avantaje – aspectele care oferă valoare respectivei metode;
- ⇒ dezavantaje – slăbiciunile metodei;
- ⇒ declanșatoare – aspecte care pot sugera utilizarea respectivei metode;
- ⇒ problemă model – o problemă rezolvată prin acea metodă, care are rolul de a exemplifica teoria.

Pentru a simplifica redactarea și parcurgerea materialului, vom considera un plan α și un punct P în spațiu, $P \notin \alpha$, scopul fiind determinarea distanței de la punctul P la planul α : $d(P, \alpha) = ?$

1. Construirea perpendicularei pe plan

⇒ **Teorie:**

Pentru a afla distanța de la un punct P la un plan α , putem să trasăm perpendiculara PO din P pe α , unde $O \in \alpha$, și să calculăm lungimea segmentului PO :

$$PO \perp \alpha, PO \cap \alpha = \{O\} \Rightarrow d(P, \alpha) = PO.$$

OBSERVAȚIE: $PO \perp \alpha \Leftrightarrow PO \perp a, PO \perp b, a, b$ drepte concurente în planul α .

⇒ **Avantaje:**

- Ideea poate fi aplicată mereu, fără constrângeri.
- Relațiile necesare pentru a utiliza această metodă nu sunt complicate.

⇒ **Dezavantaje:**

- Construirea perpendicularei nu oferă detalii foarte importante despre poziția efectivă a proiecției punctului pe plan și, deci, restrânge eficiența utilizării.

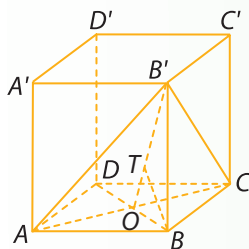
PROBLEMA 1

$ABCD A'B'C'D'$ – cub, $AB = 6$ cm

$AC \cap BD = \{O\}$

$d(B, (AB'C)) = ?$

Rezolvare:



$$\left. \begin{array}{l} AC \perp BO \\ ABCD - \text{pătrat} \Rightarrow BB' \perp (ABC) \\ AC, BO \subset (ABC) \end{array} \right\} \xrightarrow{T_3 \perp} B'O \perp AC;$$

$AC \perp BO, AC \perp B'O$, cu BO și $B'O$ drepte concurente în O , incluse în planul $(BOB') \Rightarrow AC \perp (BOB')$ și cum $AC \subset (AB'C) \Rightarrow (BOB') \perp (AB'C)$, $(BOB') \cap (AB'C) = B'O$.

Fie $BT \perp B'O, BT \subset (BOB') \Rightarrow BT \perp (AB'C) \Rightarrow d(B, (AB'C)) = BT$.

În $\triangle B'BO$, cu $\angle B = 90^\circ$, $B'B = 6$ cm, $BO = 3\sqrt{2}$ cm și

$B'O = 3\sqrt{6}$ cm, prin urmare:

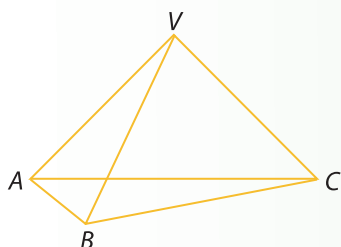
$$d(B, (AB'C)) = BT = \frac{BB' \cdot BO}{B'O} = 2\sqrt{3} \text{ cm.}$$

2. Exprimarea volumului unui tetraedru în două moduri

Teorie:

Pentru a afla distanța de la punctul V la un plan α , putem utiliza exprimarea volumului unui tetraedru în două moduri, plecând de la formula $V = \frac{A_{\text{bazei}} \cdot h}{3}$.

Considerăm tetraedrul $VABC$, în care $(ABC) = \alpha$.



$$\begin{aligned} V_{VABC} &= \frac{A_{\text{bazei}} \cdot h}{3} = \frac{A_{\triangle VAB} \cdot d(C, (VAB))}{3} = \frac{A_{\triangle ABC} \cdot d(V, \alpha)}{3} \Rightarrow \\ &\Rightarrow A_{\triangle VAB} \cdot d(C, (VAB)) = A_{\triangle ABC} \cdot d(V, \alpha) \Rightarrow \\ &\Rightarrow d(V, \alpha) = \frac{A_{\triangle VAB} \cdot d(C, (VAB))}{A_{\triangle ABC}}. \end{aligned}$$

Avantaje:

- Această metodă este universal valabilă și nu este afectată de natura tetraedrului, reprezentând o modalitate sigură de a determina prin calcul distanța de la un punct la un plan într-un tetraedru în care se cunosc, spre exemplu, doar lungimile muchiilor.
- Rezultatul final este direct răspunsul la cerință.

Dezavantaje:

- În unele situații, calculele pot fi relativ laborioase, amplificând riscul apariției erorilor de calcul.
- Calcularea ariilor a două triunghiuri despre care nu se cunosc suficiente aspecte sau a distanței de la un alt punct decât cel ales inițial la un plan pot reprezenta sarcini dificile, implicând utilizarea unor resurse precum formula lui Heron sau alte relații metrice complexe.

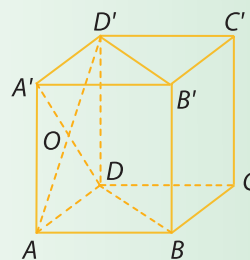
PROBLEMA 2

$ABCD A'B'C'D'$ – cub, $AB = 6\sqrt{2}$ cm

$AD' \cap A'D = \{O\}$

$d(O, (BDD')) = ?$

Rezolvare:



$ABCD A'B'C'D'$ – cub $\Rightarrow BA \perp (ADD')$; $(ADD') = (DOD') \Rightarrow$
 $\Rightarrow BA \perp (DOD')$;

$BA \perp (DOD')$, $BA \cap (DOD') = \{A\} \Rightarrow$

$\Rightarrow d(B, (DOD')) = BA = 6\sqrt{2}$ cm;

$ABCD A'B'C'D'$ – cub $\Rightarrow BDD'B'$ – dreptunghi,
 $\angle BDD' = 90^\circ$;

$ABCD$ – pătrat $\Rightarrow BD = AB\sqrt{2} = 12$ cm;

$\triangle BDD'$: $\angle BDD' = 90^\circ \Rightarrow$

$$\Rightarrow A_{\triangle BDD'} = \frac{BD \cdot DD'}{2} = \frac{12 \cdot 6\sqrt{2}}{2} = 36\sqrt{2} \text{ cm}^2;$$

$ADD'A'$ – pătrat, $AD' \cap A'D = \{O\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow A_{\triangle DOD'} = \frac{A_{ABCD}}{4} = \frac{6^2 \cdot 2}{4} = 18 \text{ cm}^2.$$

Exprimăm volumul tetraedrului $OBDD'$ în două moduri:

$$\begin{aligned} V_{OBDD'} &= \frac{A_{\text{bazei}} \cdot h}{3} = \frac{A_{\triangle BDD'} \cdot d(O, (BDD'))}{3} = \\ &= \frac{A_{\triangle DOD'} \cdot d(B, (DOD'))}{3} \Rightarrow \end{aligned}$$

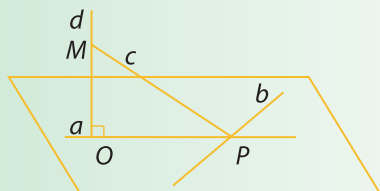
$$\Rightarrow d(O, (BDD')) = \frac{A_{\triangle DOD'} \cdot d(B, (DOD'))}{A_{\triangle BDD'}} = 3 \text{ cm.}$$

3. Utilizarea reciprocei a doua a teoremei celor trei perpendiculare

Teorie:

Pentru a afla distanța de la un punct M la un plan α , putem să utilizăm reciproca a doua a teoremei celor trei perpendiculare pentru a găsi proiecția punctului pe plan și pentru a determina distanța de la un punct la plan:

$d \perp a, d \cap a = \{O\}; a \subset \alpha, b \subset \alpha; a \perp b, a \cap b = \{P\};$
 $M \in d, MP \perp b \xrightarrow{R_2 T3 \perp} d \perp \alpha.$



Avantaje:

- Utilizând această metodă, se obțin atât proiecția punctului pe plan, cât și un triunghi dreptunghic în care distanța de la punct la plan poate fi calculată.
- Această metodă se bazează pe 3 perpendicularități dintre drepte în spațiu, care, în general, pot fi obținute ușor, și câteva relații între acestea, dar la final se obține perpendicularitate pe un plan, un rezultat greu de obținut.

Dezavantaje:

- Deși condițiile nu sunt foarte complicate, ele implică înțelegerea noțiunilor și vizualizarea tuturor relațiilor în spațiu, pentru ca soluția să poată fi redactată corect și complet.

PROBLEMA 3

$ABCA'B'C'$ – prismă triunghiulară regulată

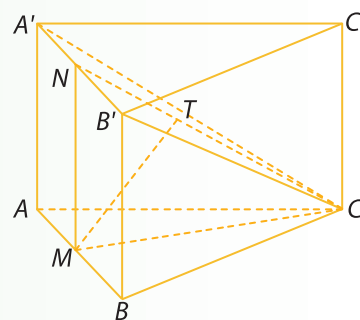
$AB = l = 12$ cm;

$AA' = h = 3\sqrt{3}$ cm

M – mijlocul lui AB

$d(M, (A'B'C)) = ?$

Rezolvare:



Fie N – mijlocul lui $A'B'$ și $MT \perp CN, T \in CN$;
 $\triangle ABC$ – echilateral, M – mijlocul lui $AB \Rightarrow$

$$\Rightarrow CM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ cm};$$

$ABCA'B'C'$ – prismă triunghiulară regulată $\Rightarrow$

$\Rightarrow A'C = B'C \Rightarrow \triangle A'B'C$: CN – mediană $\Rightarrow CN = h \Rightarrow$

$\Rightarrow CN \perp A'B'$;

$ABCA'B'C'$ – prismă triunghiulară regulată $\Rightarrow ABB'A'$ – dreptunghi, M – mijlocul lui AB , N – mijlocul lui $A'B' \Rightarrow$

$\Rightarrow NM \perp AB, NM = AA' = 3\sqrt{3}$ cm;

$$\left. \begin{array}{l} MT \perp CN \\ TN \perp A'B' \\ MN \perp A'B' \\ A'B', TN \subset (A'B'C) \end{array} \right\} \xrightarrow{R_2 T3 \perp} MT \perp (A'B'C) \Rightarrow d(M, (A'B'C)) = MT;$$

$(ABB'A') \perp (ABC), (ABB'A') \cap (ABC) = AB, NM \perp AB,$

$NM \subset (ABB'A') \Rightarrow NM \perp (ABC);$

$NM \perp (ABC), MC \subset (ABC) \Rightarrow NM \perp MC \Rightarrow \angle NMC = 90^\circ;$

$$\triangle NMC: NMC = 90^\circ \xrightarrow{T.Pitagora} NC^2 = NM^2 + CM^2 = (3\sqrt{3})^2 +$$

$$+ (6\sqrt{3})^2 = (3\sqrt{15})^2 \Rightarrow NC = 3\sqrt{15} \text{ cm};$$

$$\triangle NMC: NMC = 90^\circ, MT = h \Rightarrow MT = \frac{NM \cdot CM}{CN} =$$

$$= d(M, (A'B'C)) = \frac{6\sqrt{15}}{5} \text{ cm}.$$

Metodele 4 și 5 vor fi tratate împreună, deoarece sunt asemănătoare și pot apărea sub diverse forme asemănătoare.

4. Calcularea distanței de la o dreaptă paralelă cu planul considerat la acesta

Teorie:

Pentru a afla distanța de la un punct P la un plan α , putem considera o dreaptă d paralelă cu planul α , cu proprietatea că $P \in d$. Obținem, astfel: $d \parallel \alpha, P \in d \Rightarrow$
 $\Rightarrow d(P, \alpha) = d(d, \alpha) = d(Q, \alpha), \forall Q \in d.$

Avantaje:

- Este suficientă determinarea distanței de la un punct de pe o dreaptă paralelă cu un plan la respectivul

plan pentru a determina o infinitate de distanțe de la puncte de pe respectiva dreaptă la acel plan.

Dezavantaje:

- Această proprietate/metodă este utilă doar când există deja o paralelă prin punctul dat la plan sau atunci când este intuitivă construcția ei.

5. Calcularea distanței de la un plan paralel cu planul considerat la acesta

Teorie:

Pentru a afla distanța de la un punct P la un plan α , putem considera un plan β paralel cu planul α , cu proprietatea că $P \in \beta$. Obținem, astfel: $\beta \parallel \alpha, P \in \beta \Rightarrow d(P, \alpha) = d(\beta, \alpha) = d(Q, \alpha), \forall Q \in \beta$.

Avantaje:

▪ Este suficientă determinarea distanței de la un punct de pe o dreaptă paralelă cu un plan la respectivul plan pentru a determina o infinitate de distanțe de la puncte de pe respectivul plan la planul considerat inițial.

Dezavantaje:

▪ Această proprietate/metodă este utilă doar când există deja un plan paralel prin punctul dat la planul inițial sau când acest plan este intuitiv de construit.

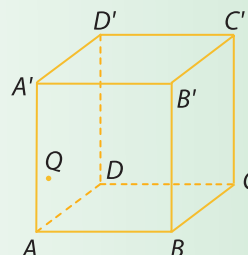
PROBLEMA 4

$ABCA'D'B'C'D'$ – cub, $AB = l$

$Q \in (ADD'A')$

$d(Q, (BCC'B')) = ?$

Rezolvare:



$ABCA'D'B'C'D'$ – cub $\Rightarrow (ADD'A') \parallel (BCC'B')$;

$ABCA'D'B'C'D'$ – cub $\Rightarrow AB \perp (BCC'B'), AD \perp (ADD'A')$;

$(ADD'A') \parallel (BCC'B'), AB \perp (BCC'B') \Rightarrow$

$\Rightarrow d((ADD'A'), (BCC'B')) = AB$;

$d((ADD'A'), (BCC'B')) = AB, Q \in (ADD'A') \Rightarrow$

$\Rightarrow d((ADD'A'), (BCC'B')) = AB = d(Q, (BCC'B')) = l$.

PROBLEMA 5

$ABCA'D'B'C'D'$ – trunchi de piramidă patrulateră regulată

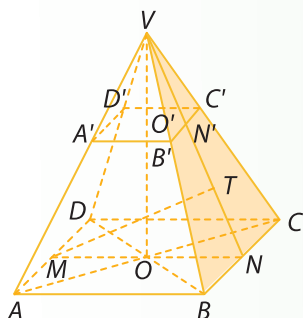
$A'B' = 8\sqrt{2} \text{ cm} = l$

$AB = 20\sqrt{2} \text{ cm} = L$

$OO' = 12 \text{ cm}; \{O\} = AC \cap BD; \{O'\} = A'C' \cap B'D'$

$d(A, (BCC')) = ?$

Rezolvare:



Fie $VABCD$ – piramidă patrulateră regulată din care provine trunchiul;

$ABCA'D'B'C'D'$ – trunchi de piramidă regulată $\Rightarrow$

$\Rightarrow VAB'C'D' \sim VABCD \Rightarrow \frac{l}{L} = \frac{VO'}{VO} = \frac{VN'}{VN}$, unde N este

mijlocul lui BC și N' este mijlocul lui $B'C'$ $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{8\sqrt{2}}{20\sqrt{2}} = \frac{VO'}{VO' + OO'} = \frac{VN'}{VN' + NN'} \Leftrightarrow \frac{2}{5} = \frac{VO'}{VO' + 12} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2VO' + 24 = 5VO' \Leftrightarrow 3VO' = 24 \quad VO' = 8 \text{ cm} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow VO = 20 \text{ cm}.$$

O – centrul pătratului $ABCD \Rightarrow VO \perp (ABC)$ și $ON \subset$

$(ABC) \Rightarrow VO \perp ON \Rightarrow \Delta VON$ – dreptunghic cu $\angle O =$

90° .

$$\Delta ABC: ON \text{ – linie mijlocie} \xRightarrow{\text{T.I.m.}} ON = \frac{AB}{2} = \frac{20\sqrt{2}}{2} =$$

$$= 10\sqrt{2} \text{ cm}.$$

ΔVON – dreptunghic cu $\angle O = 90^\circ \xRightarrow{\text{T.Pitagora}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow VN^2 = VO^2 + ON^2 = 20^2 + (10\sqrt{2})^2 = 10^2 \cdot 2^2 + 10^2 \cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow VN^2 = 10^2 \cdot 6 \Rightarrow VN = 10\sqrt{6} \text{ cm}.$$

$(BCC') = (BCC'B') = (VBC) \quad d(A, (BCC')) = d(A, (VBC)).$

$ABCD$ – pătrat, $BC \subset (VBC), AD \not\subset (VBC) \Rightarrow AD \parallel (VBC) \Rightarrow$

$\Rightarrow d(A, (VBC)) = d(M, (VBC)), M$ – mijlocul lui AD .

$(VMN) \perp (ABC), BC \perp (VMN), BC \subset (VBC) \Rightarrow$

$\Rightarrow (VMN) \perp (VBC), (VMN) \cap (VBC) = VN$.

Fie $MT \perp VN, T \in VN \Rightarrow MT \perp (VBC) \Rightarrow d(M, (VBC)) =$

$$= MT = \frac{2 \cdot \angle_{VMN}}{VN} = \frac{40\sqrt{3}}{3} \text{ cm}.$$

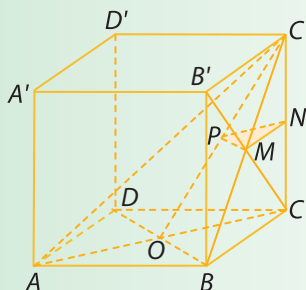
PROBLEMA 6

Se consideră cubul $ABCD A' B' C' D'$, cu $l = AB = 12$ cm. Calculează distanța de la punctul M la planul (ACC') , știind că M este mijlocul segmentului BC' .

Rezolvare:

Soluția 1

Construim perpendiculara din M pe planul (ACC') .



$$\left. \begin{array}{l} CC' \perp (ABC) \\ CO \perp BD, \{O\} = AC \cap BD \\ CO, BD \subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow C'O \perp BD.$$

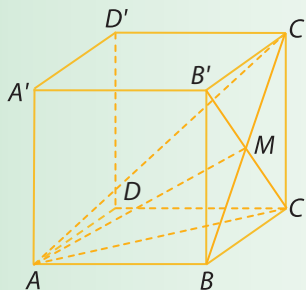
Fie N mijlocul lui $CC' \Rightarrow MN$ – linie mijlocie în $\triangle BCC' \Rightarrow MN \parallel BC$, dar $BC \perp CC' \Rightarrow MN \perp CC'$ și $MN = \frac{BC}{2} = 6$ cm.

Fie P mijlocul lui $OC' \Rightarrow NP$ – linie mijlocie în $\triangle COC' \Rightarrow NP \parallel OC$, dar $OC \perp CC' \Rightarrow NP \perp CC'$ și $NP = \frac{CO}{2} = 3\sqrt{2}$ cm;

$\triangle MNP$ – dreptunghic isoscel ($\angle M = 90^\circ$). Din $CC' \perp MN$, $CC' \perp NP$ și MN, NP – drepte concurente în planul $(MNP) \Rightarrow CC' \perp (MNP)$ și $CC' \subset (ACC') \Rightarrow (ACC') \perp (MNP)$, $(ACC') \cap (MNP) = NP$, $MP \perp NP$, $MP \subset (MNP) \Rightarrow MP \perp (ACC') \Rightarrow d(M, (ACC')) = MP = \frac{BO}{2} = 3\sqrt{2}$ cm.

Soluția 2

Scriem volumul tetraedrului $MACC'$ în două moduri.



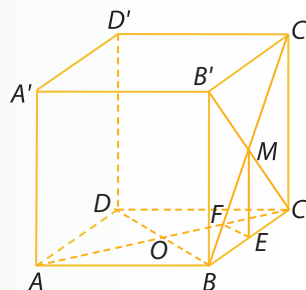
$$\begin{aligned} V_{AMCC'} &= \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{A_{\triangle MCC'} \cdot d(A, (MCC'))}{3} = \\ &= \frac{A_{\triangle ACC'} \cdot d(M, (ACC'))}{3}; A_{\triangle MCC'} = \frac{A_{BCC'B'}}{4} = \frac{144}{4} = 36 \text{ cm}^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AB \perp (MCC') &\Rightarrow d(A, (MCC')) = AB = 12 \text{ cm} \Rightarrow \\ \Rightarrow V_{AMCC'} &= 144 \text{ cm}^3; A_{\triangle ACC'} = \frac{AC \cdot CC'}{2} = 72\sqrt{2} \text{ cm}^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow d(A, (MCC')) = \frac{3 \cdot 144}{72\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} \text{ cm}.$$

Soluția 3

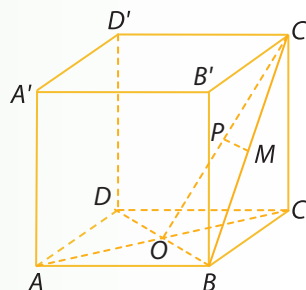
Calculul distanței de la dreapta ME paralelă cu planul (ACC')



Fie $E = pr_{(ABC)} M \Rightarrow ME \perp (ABC)$, dar $CC' \perp (ABC) \Rightarrow ME \parallel CC'$, $ME \subset (ACC') \Rightarrow ME \parallel (ACC') \Rightarrow d(M, (ACC')) = d(E, (ACC')) = EF = 3\sqrt{2}$ cm, unde $EF \perp (ACC')$ și EF – linie mijlocie în triunghiul BOC .

Soluția 4

Construim perpendiculara din M pe planul (ACC') .



$ABCD$ – pătrat de centru O ;

$BO \perp AC$, dar $BO \perp CC'$, $AC, CC' \subset (ACC')$, $AC \cap CC' = \{C\} \Rightarrow BO \perp (ACC') \Rightarrow d(B, (ACC')) = BO$.

Fie M mijlocul lui BC' și P mijlocul lui $C'O \Rightarrow MP$ – linie mijlocie în $\triangle BOC' \Rightarrow MP \parallel BO$, dar $BO \perp (ACC') \Rightarrow MP \perp (ACC') \Rightarrow d(M, (ACC')) = MP = \frac{BO}{2} = 3\sqrt{2}$ cm.

LECȚIA 6

Cilindru circular drept. Distanțe și măsuri de unghiuri pe suprafața sau în interiorul cilindrului circular drept. Aria laterală, aria totală și volumul cilindrului circular drept

Observăm și descoperim cunoștințe noi

În figura 1 este ilustrat un **cilindru circular drept** cu bazele discuri de rază R , înălțimea $h = OO'$ și **generatoarea** $G = BB'$. În cazul acestui corp, $h = G$.

Similar cu prisma dreaptă, vom atribui cilindrului circular drept noțiunile de arie laterală, arie totală și volum, raportându-ne la elementele acestui corp.

Aria laterală a unui cilindru circular drept se obține calculând aria dreptunghiului rezultat prin desfășurarea plană a suprafeței laterale a acestuia:

$$\mathcal{A}_{\text{lat}} = 2\pi RG$$

Aria totală a unui cilindru circular drept este suma dintre aria laterală și ariile celor două baze ale cilindrului respectiv:

$$\mathcal{A}_{\text{tot}} = \mathcal{A}_{\text{lat}} + 2 \cdot \mathcal{A}_{\text{bază}}$$

$$\mathcal{A}_{\text{tot}} = 2\pi R(G + R)$$

Volumul unui cilindru circular drept este produsul dintre aria bazei sale și înălțimea acestuia:

$$\mathcal{V} = \mathcal{A}_{\text{bază}} \cdot h$$

$$\mathcal{V} = \pi R^2 G$$

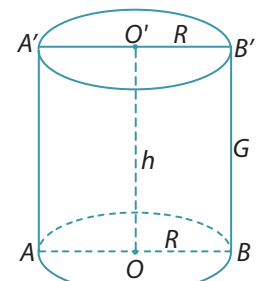


Fig. 1

Aplicăm cunoștințele

1 Secțiunea axială a unui cilindru circular drept este dreptunghiul $ABCD$, în care punctul Q este mijlocul lui CD (figura 2). Știm că măsura unghiului format de dreapta AQ și planul bazei care conține punctele A și B este egală cu 60° , iar aria laterală (în cm^2) și volumul (în cm^3) acestui cilindru sunt exprimate prin același număr.

- Calculează aria totală și volumul cilindrului.
- Determină distanța de la punctul B la dreapta AQ .
- Stabilește dacă în acest cilindru poate fi introdusă în întregime o tijă metalică de lungime egală cu $3\sqrt{3}$ cm.

Rezolvare:

a) Notăm cu O mijlocul diametrului AB și cum $ABCD$ este dreptunghi, iar Q este mijlocul laturii DC (opusă lui AB), deducem că $OQ \parallel BC$ și $OQ = BC$. Din $OQ \parallel BC$ și $BC \perp AB$ rezultă că $OQ \perp AB$, deci în triunghiul dreptunghic AOQ ($\angle AOQ = 90^\circ$) avem $\angle QAO = 60^\circ$; $\text{tg}(\angle QAO) = \frac{OQ}{AO} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{G}{R} \Leftrightarrow G = R\sqrt{3}$; $\mathcal{A}_{\text{lat}} = \mathcal{V} \Leftrightarrow 2\pi RG = \pi R^2 G \Leftrightarrow 2 = R$,

deci $R = 2$ cm și $G = 2\sqrt{3}$ cm, de unde $\mathcal{A}_{\text{tot}} = 8\pi(1 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$ și $\mathcal{V} = 8\pi\sqrt{3} \text{ cm}^3$.

b) Cum O este mijlocul lui AB și $QO \perp AB$, rezultă că $\triangle QAB$ este isoscel de bază AB . Dar $\angle QAB = 60^\circ$, deci $\triangle QAB$ este echilateral, prin urmare $d(B, AQ) = d(Q, AB) = QO = G = 2\sqrt{3}$ cm.

c) Cea mai mare lungime posibilă în interiorul cilindrului este diagonala AC a dreptunghiului $ABCD$. Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiul CAB cu $\angle CBA = 90^\circ$ și obținem $CA^2 = CB^2 + BA^2 = G^2 + (2R)^2 = (2\sqrt{3})^2 + 4^2 = 28$, deci $CA = 2\sqrt{7}$ cm; $(3\sqrt{3})^2 = 27 < 28$, așadar $3\sqrt{3} < CA$ și deducem că este posibil să introducem în întregime tijă metalică de lungime $3\sqrt{3}$ cm în cilindrul dat.

2 În figura 3 este reprezentat un vas de sticlă de forma unui cilindru circular drept de înălțime 8 cm și volum $128\pi \text{ cm}^3$, având secțiunea axială $ABCD$, iar punctul F este mijlocul arcului AB .

- Arată că distanța de la punctul C la punctul F , pe suprafața laterală a cilindrului, este mai mare decât lungimea segmentului CF ($\pi \approx 3,14$).
- Determină distanța de la punctul A la planul (FBC) .
- Determină sinusul unghiului dintre planele (CAF) și (AFB) .

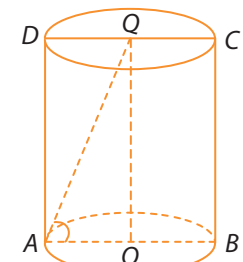


Fig. 2

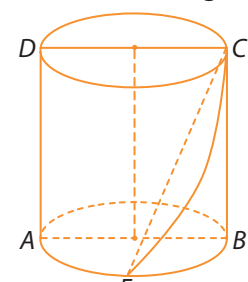


Fig. 3

Rezolvare:

a) $G = h \Rightarrow \mathcal{V} = 8\pi R^2 \Rightarrow R = 4$ cm; AB – diametru $\Rightarrow \angle AFB = 90^\circ$, iar cum F este mijlocul $\widehat{AB} \Rightarrow FA = FB$ și deducem că triunghiul AFB este dreptunghic isoscel cu ipotenuza $AB = 2R = 8$ cm. Aplicând teorema lui Pitagora în $\triangle AFB$ ($\angle AFB = 90^\circ$, $AB = 8$ cm, $AF = FB$), obținem $AF = FB = 4\sqrt{2}$ cm. Cum $CB \perp (AFB)$ și $BF \subset (AFB)$, rezultă că $CB \perp BF$.

Aplicăm teorema lui Pitagora în $\triangle CBF$ ($\angle CBF = 90^\circ$) și obținem $CF^2 = CB^2 + BF^2 = 8^2 + (4\sqrt{2})^2 = 96$. Dacă desfășurăm plan suprafața laterală a cilindrului, distanța d de la C la F va fi mai mare decât ipotenuza unui triunghi dreptunghic având catetele de 8 cm, respectiv $\frac{2\pi R}{4} = 2\pi$ cm, prin urmare $d^2 = 8^2 + (2\pi)^2 = 64 + 4\pi^2$. Cum $\pi > 3 \Rightarrow \pi^2 > 8 \Rightarrow d^2 > CF^2$ și $d > CF$.

b) Cum $CB \perp (AFB)$ și $AF \subset (AFB)$, rezultă că $CB \perp AF$. Din $AF \perp FB$ și $AF \perp CB$ cu $FB, CB \subset (FBC)$ rezultă că $AF \perp (FBC)$, deci $d(A, (FBC)) = AF = 4\sqrt{2}$ cm.

c) $AF \perp (FBC)$, $FC \subset (FBC) \Rightarrow AF \perp FC$. Avem: $(CAF) \cap (AFB) = AF$, $CF \perp AF$, $CF \subset (CAF)$, $BF \perp AF$, $BF \subset (AFB) \Rightarrow \angle((CAF), (AFB)) = \angle(CF, BF) = \angle CFB$. În $\triangle CFB$ dreptunghic în B : $\sin(\angle CFB) = \frac{CB}{CF} = \frac{8}{4\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Reține!

Într-un cilindru circular drept cu raza R și generatoarea G au loc relațiile:

$$\bullet \mathcal{A}_{\text{lat}} = 2\pi RG; \quad \bullet \mathcal{A}_{\text{tot}} = 2\pi R(G + R); \quad \bullet \mathcal{V} = \pi R^2 G.$$



Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

- 1 **Lucru în echipă:** Împreună cu colegul de bancă, rezolvați sarcinile propuse și analizați rezultatele găsite. Copiază și completează tabelul de mai jos, în care R , G , $\mathcal{A}_{\text{lat}}$, $\mathcal{A}_{\text{tot}}$ și $\mathcal{V}$ reprezintă raza, generatoarea (măsurate în cm), aria laterală, aria totală (măsurate în cm^2), respectiv volumul unui cilindru circular drept (măsurat în cm^3).



	R	G	$\mathcal{A}_{\text{lat}}$	$\mathcal{A}_{\text{tot}}$	$\mathcal{V}$
a)	2	5			
b)		3	12π		
c)			30π	48π	
d)		10			90π
e)			42π		63π

- 2 Calculează aria laterală și volumul unui cilindru circular drept cu raza de 5 cm și aria totală de $130\pi \text{ cm}^2$.
- 3 Calculează volumul unui cilindru circular drept a cărui secțiune axială este un pătrat de arie egală cu 36 cm^2 .
- 4 O cutie de lapte are forma unui cilindru circular drept cu înălțimea de 20 cm și este confecționată din carton. Știind că volumul cutiei este de 750 ml, calculează ce suprafață de carton a fost folosită pentru realizarea bazelor acestei cutii.
- 5 Calculează aria totală a unui cilindru circular drept de volum $48\pi \text{ cm}^3$, a cărui secțiune axială este dreptunghiul $ABCD$, cu măsura unghiului dintre diagonala AC și generatoarea cilindrului egală cu 60° (figura 4).

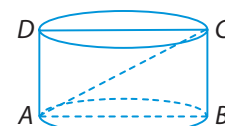


Fig. 4

- 6** O lumânare ornamentală are forma unui cilindru circular drept cu înălțimea de 15 cm și raza egală cu 20% din generatoare. Lumânarea urmează a fi pictată, iar 1,5 g de vopsea acoperă 1 cm^2 din suprafața acesteia. Stabilește dacă ajung 511 g de vopsea pentru a picta integral lumânarea ($3,14 < \pi < 3,15$).
- 7** Dintr-un bloc de marmură de formă paralelipipedică, cu dimensiunile $l = L = 1 \text{ m}$ și $h = 6 \text{ m}$, se sculpează o coloană cilindrică de înălțime 6 m și având baza de diametru maxim. Arată că volumul de marmură înlăturată depășește 20% din volumul blocului inițial ($3,14 < \pi < 3,15$).
- 8** În figura 5 este reprezentat un cilindru circular drept cu perimetrul secțiunii axiale $ABCD$ egal cu 30 cm și generatoarea AD de 9 cm. Coarda AP din planul bazei are lungimea egală cu 3 cm.
- Calculează distanța de la punctul C la dreapta AP .
 - Determină distanța de la punctul B la planul (CAP) .
- 9** În figura 6 este ilustrat un cilindru circular drept cu generatoarea de $5\sqrt{3} \text{ cm}$ și secțiunea axială $ABCD$ de arie egală cu $50\sqrt{3} \text{ cm}^2$, iar diametrele CD și MN sunt perpendiculare.
- Calculează distanța de la punctul A la dreapta MN .
 - Determină unghiul dintre dreapta AO și planul (DMC) .
 - Determină măsura unghiului dintre planele (AMN) și (BMN) .

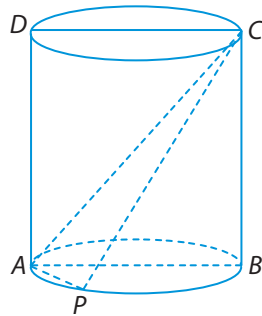


Fig. 5

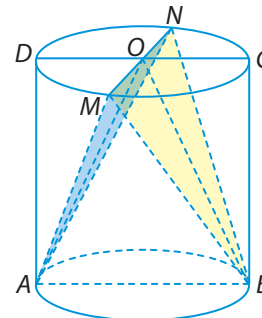


Fig. 6

Din oficiu: 1 punct

AUTOEVALUARE

Timp de lucru: 40 de minute

Pentru fiecare problemă, alege litera corespunzătoare răspunsului corect.

- 1** Dintr-un dreptunghi de dimensiuni $14\pi \text{ cm}$ și 5 cm se realizează suprafața laterală a unui cilindru circular drept cu generatoarea de 5 cm. Volumul acestui cilindru este egal cu: **2 puncte**
- $980\pi \text{ cm}^3$;
 - $245\pi \text{ cm}^3$;
 - $490\pi \text{ cm}^3$;
 - $70\pi \text{ cm}^3$.
- 2** Secțiunea axială a unui cilindru circular drept este un pătrat cu diagonala de 12 cm. Aria laterală a acestui cilindru este egală cu: **2 puncte**
- $72\pi \text{ cm}^2$;
 - $144\pi \text{ cm}^2$;
 - $216\pi \text{ cm}^2$;
 - $300\pi \text{ cm}^2$.
- 3** Aria laterală a unui cilindru circular drept este egală cu jumătate din aria totală a acestuia, iar volumul cilindrului este egal cu $64\pi \text{ cm}^3$. Raza cilindrului are lungimea egală cu: **2 puncte**
- 8 cm;
 - 4 cm;
 - 12 cm;
 - $2\pi \text{ cm}$.
- 4** Secțiunea axială a unui cilindru circular drept este pătratul $ABB'A'$ cu $AB = 6 \text{ cm}$. Punctul C aparține cercului de diametru AB astfel încât $\angle BAC = 60^\circ$. Distanța de la punctul A' la dreapta BC este egală cu: **2 puncte**
- $3\sqrt{2} \text{ cm}$;
 - $3\sqrt{3} \text{ cm}$;
 - $3\sqrt{5} \text{ cm}$;
 - $3\sqrt{7} \text{ cm}$.
- 5** Se topește un cub de ciocolată cu latura de 5 cm, iar ciocolata lichidă astfel obținută se toarnă într-un vas de forma unui cilindru circular drept cu baza de rază 2,5 cm ($3 < \pi < 4$). Afirmatia: „Înălțimea la care se ridică ciocolata în vasul cilindric este mai mică de 7 cm.” este: **1 punct**
- adevărată;
 - falsă.



LECȚIA 7

Conul și trunchiul de con. Distanțe și măsuri de unghiuri pe suprafața sau în interiorul conului circular drept sau trunchiului de con circular drept. Aria laterală, aria totală și volumul conului circular drept, respectiv ale trunchiului de con circular drept

Observăm și descoperim cunoștințe noi

În figura 1 este ilustrat un **con circular drept** având vârful V și baza discul de centru O și rază R . În acest corp, VO este perpendiculară pe planul bazei și reprezintă **înălțimea** conului circular drept (notată cu h), iar segmentul VB este **generatoare** pentru acest con (notată, de obicei, cu G).

Astfel, în orice con circular drept, cu notațiile de mai sus, are loc relația:

$$G^2 = R^2 + h^2$$

Pentru a determina aria laterală, aria totală și volumul unui con circular drept, vom face analogii cu abordările acestora în piramida regulată.

Aria laterală a unui con circular drept este aria sectorului de cerc obținut prin desfășurarea plană a suprafeței laterale a conului, având raza G și lungimea arcului egală cu lungimea cercului corespunzător bazei conului ($2\pi R$):

$$\mathcal{A}_{\text{lat}} = \pi R G$$

Aria totală a unui con circular drept este suma dintre aria laterală și aria bazei:

$$\mathcal{A}_{\text{tot}} = \mathcal{A}_{\text{lat}} + \mathcal{A}_{\text{bază}}$$

$$\mathcal{A}_{\text{tot}} = \pi R(G + R)$$

Volumul unui con circular drept este egal cu o treime din produsul dintre aria bazei și înălțimea conului:

$$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{A}_{\text{bază}} \cdot h}{3}$$

$$\mathcal{V} = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

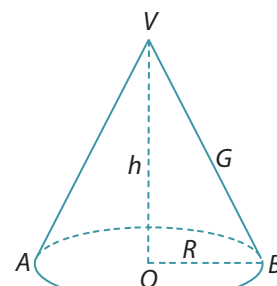


Fig. 1

Aplicăm cunoștințele

Secțiunea axială a unui con circular drept este triunghiul echilateral VAB de latură $4\sqrt{3}$ cm (figura 2). Pe cercul de diametru AB se consideră punctul C astfel încât $BC = 2\sqrt{3}$ cm.

- Calculează aria totală și volumul conului.
- Determină distanța cea mai scurtă de la A la B , pe suprafața laterală a conului.
- Determină tangenta unghiului dintre planul (VBC) și planul bazei conului.

Rezolvare:

a) Din $\triangle VAB$ – echilateral obținem că, în conul circular drept dat, $G = VB = 4\sqrt{3}$ cm, $R = \frac{AB}{2} = 2\sqrt{3}$ cm și $h = VO = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 6$ cm, unde O este centrul bazei conului.

Atunci $\mathcal{A}_{\text{tot}} = \pi R(G + R) = \pi \cdot 2\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} = 36\pi$ cm² și $\mathcal{V} = \frac{\pi R^2 h}{3} = 24\pi$ cm³.

b) În desfășurarea plană a suprafeței laterale a conului dat, sectorul de cerc cu raza $G = VA$ și lungimea arcului $\widehat{AB}$ egală cu $\pi R = 2\sqrt{3}\pi$ corespunde unui unghi de 90° . Drept urmare, distanța cea mai scurtă de la A la B pe suprafața laterală a conului este lungimea segmentului AB din desfășurarea plană, adică ipotenuza triunghiului dreptunghic isoscel de catete $4\sqrt{3}$ cm. Distanța cerută este $4\sqrt{6}$ cm.

c) Fie M mijlocul lui (BC) . În $\triangle VBC$ isoscel de bază BC , VM este mediană, deci $VM \perp BC$ cu $VM \subset (VBC)$. În $\triangle OBC$ echilateral de latură $R = 2\sqrt{3}$ cm, OM este mediană, deci $OM \perp BC$ cu $OM \subset (ABC)$ și $OM = \frac{OB\sqrt{3}}{2} = 3$ cm. Atunci

$\sphericalangle((VBC), (ABC)) = \sphericalangle(VM, OM) = \sphericalangle VMO$, iar în $\triangle VMO$, dreptunghic în O , avem $\text{tg}(\sphericalangle VMO) = \frac{VO}{OM} = 2$.

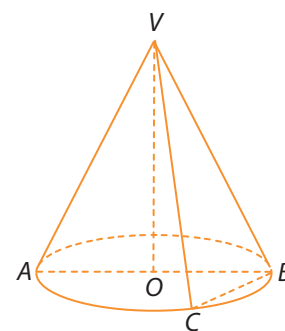


Fig. 2

Observăm și descoperim cunoștințe noi

Similar cu obținerea trunchiului de piramidă prin secționarea unei piramide cu un plan paralel cu baza, prin secționarea unui con circular drept cu un plan paralel cu baza și înlăturarea conului mic obținut rezultă un **trunchi de con circular drept** (figura 3); acesta are **bazele** discul de centru O și rază $R = OA$, respectiv discul de centru O' și rază $r = O'A'$, situate în plane paralele, **înălțimea** $h = OO'$ și **generatoarea** $G = AA'$.

Dacă trunchiul provine din conul circular drept de vârf V , atunci au loc relațiile:

$$\frac{VA'}{VA} = \frac{VO'}{VO} = \frac{r}{R}.$$

Aria laterală a trunchiului de con circular drept reprezintă diferența dintre aria laterală a conului inițial (mare) și aria laterală a conului îndepărtat (mic). De asemenea, pentru aria laterală a trunchiului de con circular drept, cu notațiile de mai sus, avem formula de calcul:

$$\mathcal{A}_{\text{lat}} = \pi G(R + r)$$

Aria totală a trunchiului de con circular drept este suma dintre aria laterală, aria bazei mici (notată $\mathcal{A}_b$) și aria bazei mari (notată $\mathcal{A}_B$) din trunchiul respectiv:

$$\mathcal{A}_{\text{tot}} = \mathcal{A}_{\text{lat}} + \mathcal{A}_b + \mathcal{A}_B$$

$$\mathcal{A}_{\text{tot}} = \pi G(R + r) + \pi r^2 + \pi R^2$$

Volumul unui trunchi de con cu înălțimea h , aria bazei mici $\mathcal{A}_b = \pi r^2$ și aria bazei mari $\mathcal{A}_B = \pi R^2$ este dat de relația:

$$V = \frac{h}{3} (\mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b + \sqrt{\mathcal{A}_B \cdot \mathcal{A}_b})$$

$$V = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + Rr)$$

OBSERVAȚIE IMPORTANTĂ: Prin secționarea unui con circular drept cu un plan paralel cu baza se obține un con circular drept mic și un trunchi de con. Dacă notăm cu k raportul dintre raza bazei conului mic și raza bazei conului mare, atunci au loc relațiile:

$$\frac{\mathcal{A}_{\text{lat con mic}}}{\mathcal{A}_{\text{lat con mare}}} = k^2, \quad \frac{\mathcal{A}_{\text{tot con mic}}}{\mathcal{A}_{\text{tot con mare}}} = k^2, \quad \frac{V_{\text{con mic}}}{V_{\text{con mare}}} = k^3.$$

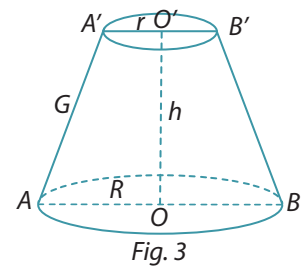


Fig. 3

Aplicăm cunoștințele

În figura 4 este ilustrată o fructieră, adâncă de 12 cm, având forma unui trunchi de con circular drept cu generatoarea AA' de 13 cm și raza bazei mici de 10 cm.

a) Calculează ce lungime minimă trebuie să aibă diametrul unui capac în formă de disc pentru a acoperi integral fructiera.

b) Dacă 5 g de vopsea acoperă 2 cm^2 , calculează ce cantitate de vopsea este necesară pentru a acoperi întreaga suprafață laterală a fructierei ($3,1 < \pi < 3,2$).

c) Determină sinusul unghiului dintre dreapta AA' și planul bazei mari a trunchiului de con.

Rezolvare:

a) Notăm cu O și O' centrul bazei mari, respectiv pe cel al bazei mici în trunchiul considerat, iar cu P proiecția punctului A' pe AO . Atunci $A'O'OP$ este dreptunghi cu $PO = A'O' = 10 \text{ cm}$ și $PA' = OO' = 12 \text{ cm}$. În $\triangle APA'$, dreptunghic în P , aplicăm teorema lui Pitagora și obținem $AA'^2 = AP^2 + A'P^2$, de unde $AP^2 = 13^2 - 12^2 = 25$, deci $AP = 5 \text{ cm} \Rightarrow AO = 15 \text{ cm}$. Capacul fructierei trebuie să aibă diametrul de minimum $2 \cdot 15 = 30 \text{ cm}$.

b) $\mathcal{A}_{\text{lat}} = \pi G(R + r) = 325\pi \text{ cm}^2$ și cum $3,1 < \pi < 3,2$, trebuie să putem acoperi $325 \cdot 3,2 = 1040 \text{ cm}^2$. Așadar, sunt necesare $\frac{1040}{2} \cdot 5 = 2600 \text{ g} = 2,6 \text{ kg}$ vopsea.

c) Cum proiecția punctului A' pe dreapta AO este punctul P , $A'P \parallel OO'$ și OO' este perpendiculară pe planul bazei mari, deducem că P este proiecția lui A' pe planul bazei mari, deci unghiul căutat este $\angle(AA', AP) = \angle A'AP$. În

$\triangle APA'$, dreptunghic în P , avem $\sin(\angle A'AP) = \frac{PA'}{AA'} = \frac{12}{13}$.

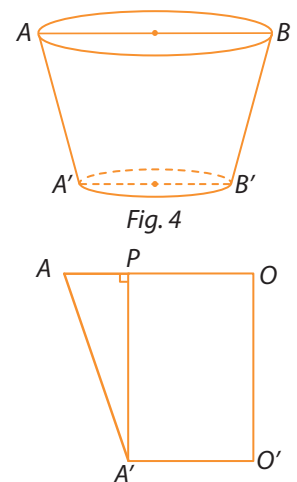


Fig. 4

Reține!

- ♦ Într-un con circular drept cu înălțimea h , generatoarea G și raza bazei R au loc relațiile:
 $\bullet G^2 = R^2 + h^2$; $\bullet \mathcal{A}_{\text{lat}} = \pi R G$; $\bullet \mathcal{A}_{\text{tot}} = \pi R(G + R)$; $\bullet V = \frac{\pi R^2 h}{3}$.
- ♦ Într-un trunchi de con circular drept cu înălțimea h , generatoarea G și razele bazelor r , respectiv R , au loc relațiile:
 $\bullet G^2 = (R - r)^2 + h^2$; $\bullet \mathcal{A}_{\text{lat}} = \pi G(R + r)$; $\bullet \mathcal{A}_{\text{tot}} = \pi G(R + r) + \pi R^2 + \pi r^2$; $\bullet V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$.



Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

- 1 Calculează volumul unui con circular drept cu raza bazei de $3\sqrt{2}$ cm, a cărui arie laterală este egală cu trei sferturi din aria totală.
- 2 Calculează raza bazei conului circular drept cu volumul de 72π cm³ și unghiul dintre o generatoare și planul bazei având măsura de 45° .
- 3 Calculează aria laterală a unui con circular drept cu generatoarea de 8 cm și aria totală de 65π cm².
- 4 Raportul dintre generatoarea și raza bazei unui con circular drept este egal cu $\sqrt{2}$. Calculează raportul dintre aria totală a conului și aria secțiunii axiale.
- 5* Conul circular drept din figura 5 are secțiunea axială triunghiul isoscel VAB cu $VA = VB = 20$ cm și $\angle VAB = 75^\circ$. Determină raportul dintre înălțimea și raza bazei conului.
- 6 Trapezul isoscel $ABCD$ cu bazele $AB \parallel CD$, $DA = AB = BC = \frac{CD}{2} = 10$ cm, se rotește în jurul axei sale de simetrie. Calculează aria totală și volumul corpului astfel obținut.
- 7 Secțiunea axială a unui trunchi de con circular drept este un trapez isoscel $ABB'A'$ de baze 12 cm și 18 cm, cu diagonalele perpendiculare (figura 6).
 - a) Calculează generatoarea trunchiului de con.
 - b) Calculează volumul trunchiului.
 - c) Determină sinusul unghiului dintre o generatoare și planul bazei mari.
- 8* Un con circular drept, realizat din lemn, este secționat cu un plan paralel cu baza și astfel rezultă două corpuri de arii laterale egale. Determină raportul dintre volumul trunchiului de con și volumul conului mic.
- 9* Dintr-un cilindru circular drept, din lemn, având raza bazei de 12 cm și înălțimea de 30 cm, se șlefuiesc două ornamente identice, în formă de trunchi de con circular drept, fiecare având înălțimea de câte 15 cm și oricare două generatoare ale unui trunchi se intersectează în centrul bazei mari a celuilalt trunchi (figura 7).
 - a) Calculează raza bazei mici a unui trunchi.
 - b) Calculează raportul dintre aria laterală a unui ornament și aria laterală a cilindrului inițial.
 - c) Calculează volumul de lemn eliminat la obținerea ornamentelor.
- 10* Un con circular drept cu generatoarea egală cu triplul razei bazei conului, având secțiunea axială triunghiul isoscel AVB de bază AB , se secționează cu un plan paralel cu baza dus prin punctul $C \in (VB)$, unde C este piciorul bisectoarei unghiului VAB (figura 8). Raza bazei mici a trunchiului de con obținut este egală cu 6 cm.
 - a) Calculează generatoarea trunchiului de con.
 - b) Determină sinusul unghiului dintre dreptele AC și VB .

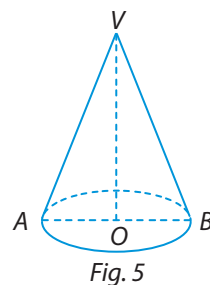


Fig. 5

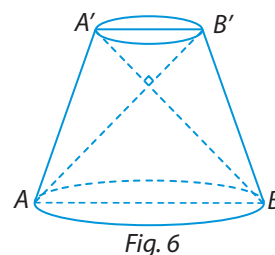


Fig. 6

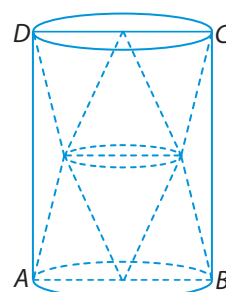


Fig. 7

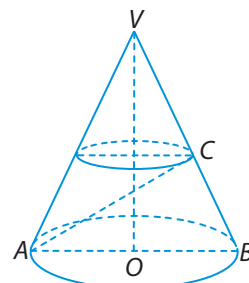


Fig. 8



Din oficiu: 1 punct

AUTOEVALUARE

Timp de lucru: 40 de minute

La problemele 1, 2 și 5, alege litera corespunzătoare răspunsului corect.

1 Un con circular drept se secționează cu un plan paralel cu baza, care intersectează înălțimea într-un punct situat la o treime de vârful conului. Raportul dintre volumul trunchiului de con obținut și volumul conului inițial este egal cu: 2 puncte

- a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{1}{9}$; c) $\frac{1}{27}$; d) $\frac{26}{27}$.

2 Aria laterală a unui con circular drept cu secțiunea axială un triunghi echilateral de perimetru 36 cm este egală cu: 2 puncte

- a) $36\pi \text{ cm}^2$; b) $72\pi \text{ cm}^2$; c) $108\pi \text{ cm}^2$; d) $144\pi \text{ cm}^2$.

3 Considerăm un trunchi de con circular drept cu raza bazei mici de 9 cm, raza bazei mari de 12 cm și generatoarea de 5 cm. Verifică dacă următoarele propoziții sunt adevărate sau false: 2 puncte

- a) $P_1: h = 4 \text{ cm}$; b) $P_2: \mathcal{A}_{\text{lat}} = 150 \text{ cm}^2$; c) $P_3: \mathcal{A}_{\text{tot}} = 330\pi \text{ cm}^2$; d) $P_4: \mathcal{V} = 444\pi \text{ cm}^3$.

4 Desfășurarea plană a suprafeței laterale a unui con circular drept este un semicerc cu raza de 24 cm.

- a) Calculează aria laterală a conului. 2 puncte
b) Calculează volumul conului.

5 Afirmația: „Secțiunea axială a unui trunchi de con circular drept poate fi trapez dreptunghic.” este:

- a) adevărată; b) falsă. 1 punct

LECȚIA 8 Sfera: arie și volum

🔍 Observăm și descoperim cunoștințe noi

În figura 1 este reprezentată sfera de centru O și rază R .

Sfera este un corp de rotație care se poate obține prin rotirea unui cerc în jurul unui diametru al său. Centrul sferei coincide cu centrul cercului, iar raza sferei este egală cu raza cercului.

Fie O un punct fixat și R un număr real pozitiv. **Sfera** este mulțimea tuturor punctelor M din spațiu aflate la distanța R de punctul O .

Notăție: $\mathcal{S}(O, R) = \{M \mid OM = R\}$.

Corpul sferic sau **bila** este mulțimea tuturor punctelor M , din spațiu, aflate la o distanță cel mult egală cu R de punctul O .

Notăție: $\mathcal{B}(O, R) = \{M \mid OM \leq R\}$.

Uneori, când nu există pericol de confuzie, numim bila tot sferă.

Aria sferei de rază R :

$$\mathcal{A} = 4\pi R^2$$

Volumul corpului sferic (bilei) de rază R :

$$\mathcal{V} = \frac{4\pi R^3}{3}$$

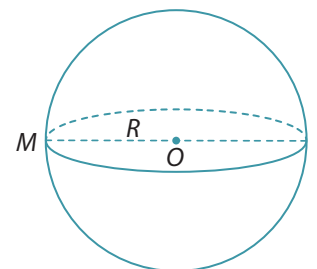


Fig. 1

📝 Aplicăm cunoștințele

1 Calculează raza și aria unei sfere al cărei volum este egal cu $288\pi \text{ cm}^3$.

Rezolvare:

$$\mathcal{V}_{\text{sferă}} = \frac{4\pi R^3}{3} \Rightarrow R^3 = \frac{3 \cdot 288}{4} = 216 \text{ cm}^3 = (6 \text{ cm})^3, \text{ de unde obținem } R = 6 \text{ cm}.$$

$$\mathcal{A}_{\text{sferă}} = 4\pi R^2 = 144\pi \text{ cm}^2.$$



2 Două plane paralele intersectează o sferă cu raza $R = 25$ cm, determinând două cercuri cu ariile 49π cm², respectiv 225π cm². Determină distanța dintre cele două plane.

Rezolvare: Distingem două cazuri:

Cazul I. Cele două secțiuni sunt în aceeași semisferă (figura 2); $\mathcal{A}_1 = 49\pi = \pi r_1^2 \Rightarrow r_1 = 7$ cm, $\mathcal{A}_2 = 225\pi = \pi r_2^2 \Rightarrow r_2 = 15$ cm. Aplicăm teorema lui Pitagora în $\triangle OO_1M$ ($\angle O_1 = 90^\circ$): $OO_1^2 = OM^2 - MO_1^2 = 25^2 - 7^2 = 625 - 49 = 576 \Rightarrow OO_1 = 24$ cm. Aplicăm teorema lui Pitagora în $\triangle OO_2N$ ($\angle O_2 = 90^\circ$): $OO_2^2 = ON^2 - NO_2^2 = 25^2 - 15^2 = 625 - 225 = 400 \Rightarrow OO_2 = 20$ cm. Astfel, distanța dintre cele două plane este $O_1O_2 = OO_1 - OO_2 = 24 - 20$ cm = 4 cm.

Cazul al II-lea. Cele două secțiuni sunt în semisfere diferite (figura 3). Procedând analog, obținem distanța dintre cele două plane paralele: $O_1O_2 = OO_1 + OO_2 = 24 + 20$ cm = 44 cm.

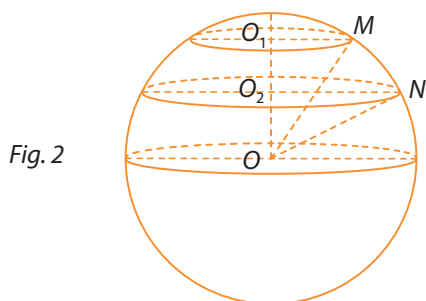


Fig. 2

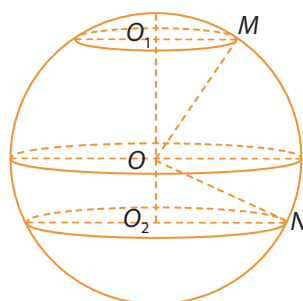


Fig. 3

Reține!

Într-o sferă cu raza R au loc relațiile: • $\mathcal{A} = 4\pi R^2$; • $\mathcal{V} = \frac{4\pi R^3}{3}$.



Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

- O sferă are raza egală cu 6 cm. Calculează aria și volumul sferei.
- Aria unei sfere este egală cu 64π cm². Calculează volumul sferei.
- Volumul unei sfere este egal cu $32\pi\sqrt{3}$ cm³. Determină aria sferei.
- Opt bile metalice identice în formă de sferă, fiecare dintre ele cu aria de 16π cm², sunt topite. Din tot metalul obținut se confecționează o singură bilă în formă de sferă. Care este raza ei?
- O sferă cu raza de 15 cm este secționată cu un plan după un cerc cu lungimea de 24π cm. Determină distanța de la centrul sferei la planul de secțiune.
- Se consideră sfera de centru O și raza egală cu 10 cm și trei puncte pe sferă, care determină triunghiul ABC ($\angle A = 90^\circ$) cu $AB = 6$ cm și $AC = 8$ cm. Determină măsura unghiului dintre OC și planul (ABC) .
- O minge în formă de sferă cu raza de 8 cm este ambalată într-o cutie de forma unui cub. Calculează suprafața minimă care este necesară pentru a confecționa cutia.
- Sfera de centru O și rază R are aria și volumul exprimate prin același număr real. Calculează raza sferei.
- Un ambalaj în formă de cilindru circular drept (figura 4) este conceput pentru a conține exact trei mingi, fiecare cu raza de 2 cm.
 - Care este aria unei mingi?
 - Dacă acest ambalaj ar fi golit și apoi umplut complet cu apă, arată că încap cel puțin 150 ml de apă ($\pi \approx 3,141$).
- Un întreprinzător produce cornete pentru înghețată. Fiecare cornet are forma unui con circular drept și este umplut cu înghețată până ce se formează o semisferă deasupra conului, ca în figura 5. Conul circular drept are raza bazei de 9 cm și generatoarea de 15 cm. Care este volumul de înghețată, în cm³, pe care îl folosește producătorul pentru fiecare cornet de înghețată?



Fig. 4

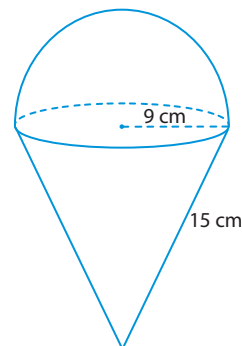


Fig. 5

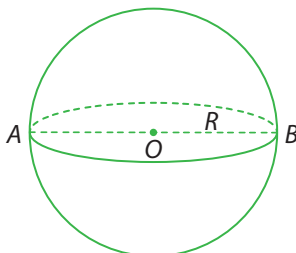
Din oficiu: 1 punct

AUTOEVALUARE

Timp de lucru: 40 de minute



În figura de mai jos este reprezentată sfera de centru O și rază $R = 6$ cm, iar AB este un diametru al unui cerc mare al sferei.



Pentru fiecare problemă, alege litera corespunzătoare răspunsului corect.

- 1 Lungimea lui AB este egală cu: 1 punct
 a) 12 cm; b) 6 cm; c) $6\sqrt{2}$ cm; d) 36 cm.
- 2 Aria sferei este egală cu: 2 puncte
 a) 120π cm²; b) 6π cm²; c) 36π cm²; d) 144π cm².
- 3 Volumul sferei este egal cu: 2 puncte
 a) 12π cm³; b) 288π cm³; c) 72π cm³; d) 848π cm³.
- 4 Latura pătratului înscris în cercul de centru O și rază R este egală cu: 2 puncte
 a) 6 cm; b) $12\sqrt{2}$ cm; c) $6\sqrt{2}$ cm; d) 12 cm.
- 5 Latura hexagonului regulat înscris în cercul de centru O și rază R este egală cu: 2 puncte
 a) 12 cm; b) $6\sqrt{3}$ cm; c) 6 cm; d) $12\sqrt{3}$ cm.



Portofoliu

Adaugă la portofoliul personal fișe cu fiecare corp, care să conțină desenul însoțit de notații, cu toate elementele corpului evidențiate, și formulele aferente pentru arii și volum.

FIȘĂ DE OBSERVARE SISTEMATICĂ A ACTIVITĂȚII ȘI A COMPORTAMENTULUI ELEVULUI

Autoevaluarea activității elevului în procesul de învățare este un instrument util atât cadrului didactic, cât și elevului, pentru a putea determina implicarea acestuia pe parcursul unui capitol.

Copiază pe o foaie de hârtie următorul tabel, completează-l, solicită observațiile profesorului și adaugă-l la portofoliul personal.

Răspunsuri	Autoevaluarea elevului Da/Nu/Parțial	Observațiile profesorului
Am participat activ la fiecare lecție.		
Am recapitulat înainte de fiecare lecție noțiunile învățate anterior.		
Am pus întrebări atunci când am avut nelămuriri.		
Am răspuns la întrebările profesorului sau ale colegilor.		
Am colaborat cu colegii la activitățile desfășurate.		
Am obținut la testul de recapitulare și evaluare nota		

1. PROBLEME RECAPITULATIVE

- 1** Suma lungimilor muchiilor cubului $ABCD A'B'C'D'$ (figura 1) este egală cu 48 cm.
 - a) Arată că lungimea diagonalei $BD' = 4\sqrt{3}$ cm.
 - b) Determină distanța de la vârful B la planul secțiunii diagonale a cubului, $(ACC'A')$.
- 2** Aria patrulaterului $ABC'D'$ din cubul $ABCD A'B'C'D'$ (figura 1) este de $36\sqrt{2}$ cm².
 - a) Arată că perimetrul triunghiului $AB'C$ este de $18\sqrt{2}$ cm.
 - b) Determină măsura unghiului dintre dreapta AB' și planul (BDD') .
- 3** Un vas în formă de cub $ABCD A'B'C'D'$ (figura 1) are latura $AB = 10$ cm.
 - a) Arată că în cub încap 500 ml de apă.
 - b) Calculează la ce înălțime se ridică apa în vas.
- 4** În paralelipipedul dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$ (figura 2), $AB = 6$ cm, $BC = 6\sqrt{2}$ cm și $AA' = 8$ cm.
 - a) Calculează volumul paralelipipedului dreptunghic.
 - b) Determină distanța de la punctul C la dreapta $B'A$.
- 5** Suma lungimilor muchiilor paralelipipedului dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$ (figura 2) este egală cu 92 cm, $AB = 12$ cm, $BC = 5$ cm.
 - a) Arată că aria totală a paralelipipedului este egală cu 324 cm².
 - b) Calculează tangenta unghiului dintre diagonala $A'C$ și planul bazei (ABC) .
- 6** Un cort are forma paralelipipedului dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$ (figura 2) cu $AB = 3$ m și $BC = 4$ m, iar înălțimea $AA' = 2$ m.
 - a) Calculează câți metri cubi de aer sunt în cort.
 - b) Ce suprafață are pânza care acoperă cortul, dacă ea nu acoperă și podeaua?
- 7** Prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ (figura 3) are baza triunghiul echilateral ABC , iar punctele M și M' sunt mijloacele muchiilor AB , respectiv $A'B'$. Înălțimea prisme $AA' = 8$ cm, iar aria laterală este egală cu 144 cm².
 - a) Calculează distanța de la vârful B la planul (CMM') .
 - b) Determină sinusul unghiului dintre AC' și planul (CMM') .
- 8** Prisma patrulateră regulată $ABCD A'B'C'D'$ (figura 4) cu baza pătratul $ABCD$ are $AB = 4$ cm și $AA' = 4\sqrt{3}$ cm.
 - a) Determină măsura unghiului format de planele $(A'BC)$ și (ABC) .
 - b) Calculează distanța de la vârful A la fața (CDD') .
- 9** Prisma hexagonală $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$ (figura 5) are baza hexagonul regulat $ABCDEF$ cu latura $AB = 4$ cm, iar fețele laterale sunt pătrate.
 - a) Arată că aria laterală a prisme este egală cu 96 cm².
 - b) Calculează măsura unghiului format de planele (BCE') și (ABC) .
- 10** Tetraedrul regulat $ABCD$ (figura 6) are aria totală egală cu $36\sqrt{3}$ cm². Punctele M și N sunt mijloacele muchiilor AB , respectiv BC , iar P este proiecția punctului N pe dreapta BD .
 - a) Calculează distanța de la punctul D la planul (MNP) .
 - b) Arată că măsura unghiului dintre dreapta DC și planul (MNP) este de 30°.
- 11** În piramida triunghiulară regulată $VABC$, având baza de centru O , unghiul unei fețe laterale cu planul bazei are măsura de 45°, iar apotema piramidei este egală cu $6\sqrt{2}$ cm.
 - a) Determină distanța de la punctul O la planul (VBC) .
 - b) Calculează tangenta unghiului determinat de muchia laterală și planul bazei.

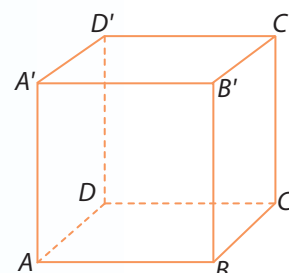


Fig. 1

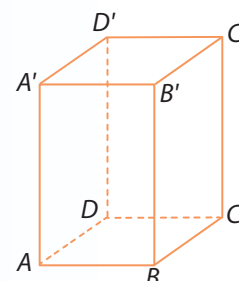


Fig. 2

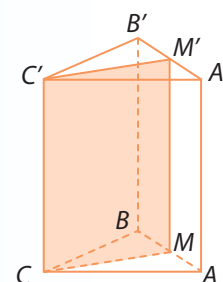


Fig. 3

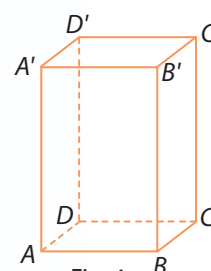


Fig. 4

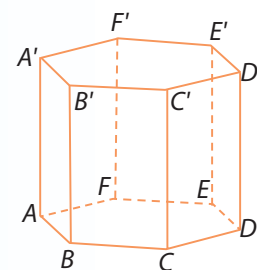


Fig. 5

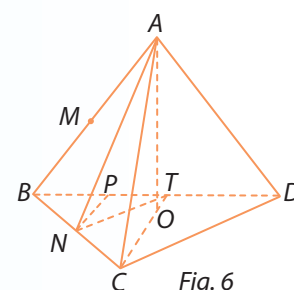


Fig. 6

12 Piramida patrulateră regulată $SABCD$, cu baza pătratul $ABCD$ de centru O (figura 7), are apotema de 16 cm, înălțimea $SO = 8\sqrt{3}$ cm, iar punctul P este piciorul perpendicularei din B pe SC .

- a) Arată că aria triunghiului PBD este mai mică decât 100 cm^2 .
- b) Calculează sinusul unghiului dintre două fețe alăturate ale piramidei.

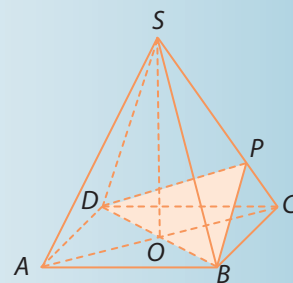


Fig. 7

13 În piramida hexagonală regulată $VABCDEF$, cu baza $ABCDEF$ de centru O , se cunosc $OA = 40$ cm și volumul de $24\sqrt{3} \text{ dm}^3$.

- a) Calculează distanța de la mijlocul înălțimii piramidei la dreapta AB .
- b) Determină sinusul unghiului format de planele (VAB) și (VDE) .

14 Raza cercului circumscris bazei unei piramide triunghiulare regulate este egală cu $8\sqrt{3}$ cm, iar apotema acestei piramide este egală cu 8 cm. Se secționează piramida cu un plan paralel cu baza, astfel încât trunchiul de piramidă rezultat să aibă volumul egal cu $168\sqrt{3} \text{ cm}^3$.

- a) Arată că planul de secțiune trece prin mijlocul înălțimii piramidei inițiale.
- b) Calculează aria totală a trunchiului de piramidă obținut.

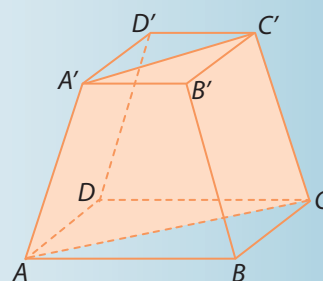


Fig. 8

15 Fie $ABCD A'B'C'D'$ un trunchi de piramidă patrulateră regulată (figura 8), având secțiunea axială trapezul isoscel $ACC'A'$ cu $AA' = 6\sqrt{2}$ cm, $AC = 9\sqrt{2}$ cm și $\angle A'AC = 60^\circ$.

- a) Calculează volumul trunchiului de piramidă.
- b) Determină sinusul unghiului format de dreapta $A'B$ și planul $(ACC'A')$.

16 Trunchiul de piramidă hexagonală regulată $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$, cu înălțimea de 5 cm, iar latura bazei mici de 10 cm, are aria laterală de șase ori mai mare decât aria secțiunii diagonale $ADD'A'$.

- a) Calculează volumul trunchiului.
- b) Determină sinusul unghiului dintre planele $(A'EC)$ și $(D'EC)$.

17 Volumul unui cilindru circular drept este egal cu $360\pi \text{ cm}^3$. Dacă dublăm raza bazei cilindrului și mărim cu 2 cm înălțimea acestuia, obținem un nou cilindru, având volumul cu $1368\pi \text{ cm}^3$ mai mare decât volumul cilindrului inițial.

- a) Calculează aria totală a cilindrului inițial.
- b) Determină sinusul unghiului dintre diagonale în secțiunea axială a cilindrului final.

18 Într-un con circular drept, generatoarele VA , VB și VC sunt perpendiculare două câte două (figura 9), iar aria triunghiului ABC este egală cu $50\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

- a) Calculează distanța de la A la planul (VBC) .
- b) Determină tangenta unghiului dintre planul (VBC) și planul bazei conului.

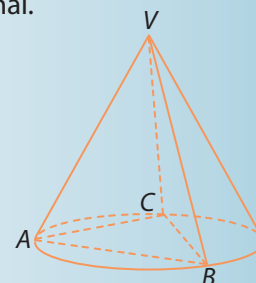


Fig. 9

19 Un trunchi de con circular drept are secțiunea axială trapezul $ABCD$ cu bazele $AB = 20\sqrt{2}$ cm și $CD = 12\sqrt{2}$ cm, iar unghiul format de laturile sale neparalele de măsură egală cu 90° .

- a) Arată că aria laterală a trunchiului este mai mică decât jumătate din aria sa totală.
- b) Calculează sinusul unghiului dintre o diagonală a secțiunii axiale și planul bazei mari.

20 O bilă metalică (figura 10) are raza $R = OA = 12$ cm. Se topește bila și din metalul obținut se confecționează 64 de bile mici sferice de rază r .

- a) Arată că aria sferei mari este egală cu $576\pi \text{ cm}^2$.
- b) Calculează raza r a unei bile mici.

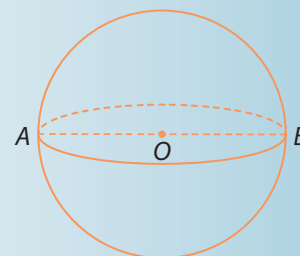


Fig. 10

2. TEST DE EVALUARE

Timp de lucru: 45 de minute.

I. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

30 de puncte

- (5p) 1. Într-un vas de sticlă, având forma unui cub cu muchia de 20 cm, se toarnă apă până la înălțimea de 15 cm. Numărul de litri de apă din vas este egal cu:
 A. 3,375; B. 4,5; C. 6; D. 8.
- (5p) 2. Aria laterală a unui tetraedru regulat de muchie 10 cm este egală cu:
 A. $25\sqrt{3}$ cm²; B. $75\sqrt{3}$ cm²; C. $100\sqrt{3}$ cm²; D. 300 cm².
- (5p) 3. Într-o cutie cilindrică înaltă de 20 cm se toarnă 1,2 l de lapte, până la înălțimea de 15 cm. Capacitatea acestei cutii este egală cu:
 A. 1,5 l; B. 1,6 l; C. 2 l; D. 2,4 l.
- (5p) 4. În prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ toate muchiile sunt egale cu 2 cm. Distanța de la punctul A' la dreapta BC este egală cu:
 A. 2 cm; B. $2\sqrt{2}$ cm; C. 5 cm; D. $\sqrt{7}$ cm.
- (5p) 5. Aria bazei unei piramide hexagonale regulate, având muchiile laterale egale cu 10 cm și înălțimea de 8 cm, este egală cu:
 A. $108\sqrt{3}$ cm²; B. $216\sqrt{3}$ cm²; C. $54\sqrt{3}$ cm²; D. $180\sqrt{3}$ cm².
- (5p) 6. Volumul unei sfere de rază 6 cm este egal cu:
 A. 144π cm³; B. 288π cm³; C. 640π cm³; D. 864π cm³.

II. Unește prin săgeți fiecare enunț aflat în coloana A cu rezultatul corespunzător din coloana B.
 Cubul $ABCD A'B'C'D'$ are aria totală egală cu 864 cm².

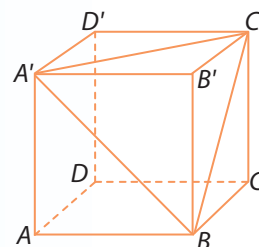
20 de puncte

A

B

- (5p) 1. Distanța de la punctul B' la planul $(BA'C')$ este egală cu ...
- (5p) 2. Distanța de la punctul C la dreapta $A'C'$ este egală cu ...
- (5p) 3. Distanța de la punctul A la dreapta BD' este egală cu ...
- (5p) 4. Distanța dintre centrele fețelor $BCC'B'$ și $A'B'C'D'$ este egală cu ...

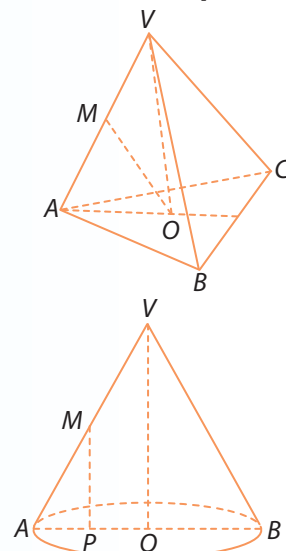
- a) $4\sqrt{6}$ cm;
 b) 6 cm;
 c) $4\sqrt{3}$ cm;
 d) $6\sqrt{2}$ cm;
 e) 12 cm.



III. Scrie rezolvările complete.

40 de puncte

- (10p) 1. Se consideră piramida triunghiulară regulată $VABC$ din figura alăturată, având muchia laterală de 12 cm și aria bazei ABC egală cu $9\sqrt{3}$ cm².
 a) Calculează sinusul unghiului dintre dreapta MO și planul (ABC) , unde M este mijlocul muchiei VA , iar O este centrul bazei ABC .
 b) Determină măsura unghiului dintre planele (AMO) și (VBC) .
- (10p) 2. Un cort are forma unui con circular drept, cu secțiunea axială triunghiul echilateral VAB de perimetru 36 cm, ca în figura alăturată. Punctul M este mijlocul generatoarei VA , iar P este proiecția sa pe planul bazei.
 a) Determină lungimea minimă a unui fermoar poziționat pe suprafața laterală a cortului, între punctele M și B .
 b) Calculează sinusul unghiului AVP .



Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota se obține împărțind punctajul final la 10.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	I.5	I.6	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1a	III.1b	III.2a	III.2b
Punctajul														
Nota														

1. PROBLEME RECAPITULATIVE

ALGEBRĂ

Pentru enunțurile 1-15 încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

- 1 Doi frați au împreună 27 de ani. Cei doi frați vor avea împreună 41 de ani peste:
 - a) 14 ani;
 - b) 7 ani;
 - c) 5 ani;
 - d) 4 ani.
- 2 Mulțimea soluțiilor ecuației $3x^2 - 7 = -1$ este:
 - a) $S = \{-\sqrt{7}, \sqrt{7}\}$;
 - b) $S = \{-1, 1\}$;
 - c) $S = \{-2, 2\}$;
 - d) $S = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.
- 3 Dacă $A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n : 2 \text{ și } n \leq 16\}$ și $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n : 4 \text{ și } 3 \leq n \leq 25\}$, atunci mulțimea $A \setminus B$ este egală cu:
 - a) $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$;
 - b) $\{4, 8, 12, 16\}$;
 - c) $\{2, 6, 10, 14\}$;
 - d) $\emptyset$.
- 4 Scrisă sub formă de interval, mulțimea $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| \leq 2\}$ este:
 - a) $(-2, 2)$;
 - b) $[-1, 3]$;
 - c) $[-2, 2]$;
 - d) $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$.
- 5 Numărul numerelor întregi din intervalul $[-5, 4)$ este:
 - a) 5;
 - b) 7;
 - c) 9;
 - d) 11.
- 6 Fie expresia $E(x) = (x - 4)(x + 4)$. Efectuând calculul, se obține:
 - a) $x^2 + 16$;
 - b) $x^2 - 8$;
 - c) $x^2 - 16$;
 - d) $x^2 - 4$.
- 7 Valoarea expresiei $(x + y - 1)^{2025}$ pentru $x = 1 - a$ și $y = 1 + a$, cu a număr real, este egală cu:
 - a) -1 ;
 - b) 2^{2025} ;
 - c) 1;
 - d) a^{2025} .
- 8 Forma cea mai simplă a expresiei algebrice $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$ este:
 - a) $x^3 - y^3$;
 - b) $x^3 + y^3$;
 - c) $x^2 - y^2$;
 - d) $(x - y)(x + y)^2$.
- 9 Considerând expresia $E(x) = x^2 - 1$, cu x număr real, valoarea numărului $n = E(-5) \cdot E(-4) \cdot \dots \cdot E(2)$ este:
 - a) -24 ;
 - b) 0;
 - c) 30;
 - d) 150.
- 10 Suma soluțiilor ecuației $x^2 + 7x + 10 = 0$ este:
 - a) -7 ;
 - b) 7;
 - c) -10 ;
 - d) 10.
- 11 În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(1, 0)$ și $B(4, 4)$. Lungimea segmentului AB este egală cu:
 - a) 3 u;
 - b) 5 u;
 - c) 8 u;
 - d) 9 u.
- 12 Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 5$. Valoarea funcției pentru $x = 3$ este:
 - a) 11;
 - b) 8;
 - c) 6;
 - d) 0.
- 13 Fie funcția $f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 1$. Imaginea funcției f este:
 - a) $\{0, 2, 4\}$;
 - b) $\{-3, -1, 1, 3, 5\}$;
 - c) $\{-3, -1, 3, 5\}$;
 - d) $\{-3, 3, 5\}$.
- 14 Punctul care aparține graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 5$ și care are abscisa egală cu dublul ordonatei este:
 - a) $A\left(\frac{5}{4}, \frac{10}{4}\right)$;
 - b) $B(1, 2)$;
 - c) $C(2, 1)$;
 - d) $D(4, 2)$.
- 15 Valoarea numărului real a pentru care $A(-1, 5) \in G_f$, unde $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2ax + 2 - a$, este:
 - a) -1 ;
 - b) 0;
 - c) 1;
 - d) 3.

Pentru enunțurile 16-30 scrie rezolvările complete.

- 16 Fie mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 19, 20\}$.
 - a) Câte submulțimi cu 19 elemente are mulțimea A ?
 - b) Câte submulțimi cu cel mult două elemente are mulțimea A ?
- 17 Numerele naturale a și b sunt direct proporționale cu 6 și, respectiv, cu 3, iar numerele b și c sunt invers proporționale cu numerele $0, (3)$ și, respectiv, cu $0, 1(6)$.
 - a) Arată că $c = 2b$.
 - b) Determină numerele a, b și c , știind că $a^2 + b^2 + c^2 = 81$.
- 18 Fie numerele $a = \sqrt{7} - \sqrt{2}$ și $b = \sqrt{7} + \sqrt{2}$.
 - a) Arată că numărul $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \in \left(\frac{3}{5}, \frac{7}{5}\right)$.
 - b) Calculează $(a - b + 2\sqrt{2})^{1000}$.
- 19 Se consideră mulțimea $M = \{2^n + 2^{n+1} - 3 \cdot 2^{n+2} + 5 \cdot 2^{n+3} \mid n \in \mathbb{N}\}$.
 - a) Determină cel mai mic element al mulțimii M .
 - b) Determină câte elemente ale mulțimii M sunt cel mult egale cu 3000.

20 La un concurs de matematică, un elev are de rezolvat 100 de probleme într-un anumit interval de timp. Pentru fiecare răspuns corect se acordă 5 puncte, iar pentru fiecare răspuns greșit sau lipsă se scad 2 puncte. În vederea obținerii unui premiu, punctajul total al elevului trebuie să fie cel puțin egal cu 300 de puncte.

a) Arată că un elev care a răspuns corect la 50 de întrebări nu poate obține premiu.

b) Determină numărul minim de răspunsuri corecte care asigură obținerea unui premiu.

21 Fie expresia $E(x) = \frac{7x-3x^2}{1-9x^2} - \frac{3x}{1-2x-3x^2} \cdot \left(1 + \frac{3x+x^2}{x+3}\right)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-3, -1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}$.

a) Arată că $1-2x-3x^2 = (1-3x)(x+1)$.

b) Arată că $E(x) = \frac{4x}{1+3x}$.

22 Fie expresia $E(x) = \left(\frac{x}{x-4} + \frac{x-4}{x} - 1\right) : \frac{x^2-4x+16}{2x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$.

a) Arată că $E(x) = \frac{2}{x-4}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$.

b) Determină valorile naturale ale numărului a pentru care $E(a) \in \mathbb{Z}$.

23 Fie expresia $E(x) = \frac{x+1}{x^2+1} : \left(\frac{x+3}{4x-4} - \frac{1}{x-1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)$, cu $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

a) Arată că $E(x) = \frac{4x}{x^2+1}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

b) Determină valorile reale ale lui x pentru care $E(x) \cdot (x^2+1) \leq 1$.

24 Fie expresia $E(x) = \left(\frac{4}{x-1} + \frac{13-5x}{1-x^2} - \frac{2x+6}{x^2+4x+3}\right) : \frac{1}{x+1}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 1\}$.

a) Arată că $E(x) = 7$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 1\}$.

b) Determină numerele întregi $a \in \mathbb{Z} \setminus \{-3, -1\}$ astfel încât $\frac{2a+6}{a^2+4a+3} \in \mathbb{Z}$.

25 Fie expresia $E(x) = (2x-1)^2 - (x-5)^2 + (x-3)(x+3) - 3x^2 + 45$, unde $x \in \mathbb{R}$.

a) Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $E(x) = 7$.

b) Determină cea mai mică valoare posibilă a lui $E(x)$, pentru $x \in \mathbb{R}$.

26 Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{3} - 2$, reprezentată în reperul cartezian alăturat.

a) Determină numărul real m , știind că punctul $A(m, 2)$ aparține graficului funcției f .

b) Arată că $2f\left(\frac{a-b}{2}\right) + f(b) - f(a)$ este număr întreg pentru orice valori reale ale numerelor a și b .

27 Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 4$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -2x + 8$.

a) Determină coordonatele punctului de intersecție dintre graficele celor două funcții.

b) Determină sinusul unghiului dintre graficele celor două funcții.

28 Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{2} \cdot x - 3\sqrt{2}$.

a) Determină punctele de pe graficul funcției f care au coordonatele de module egale.

b) Calculează distanța de la punctul $P(0, 4\sqrt{2})$ la reprezentarea grafică a funcției f .

29 În figura alăturată este reprezentată grafic funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$.

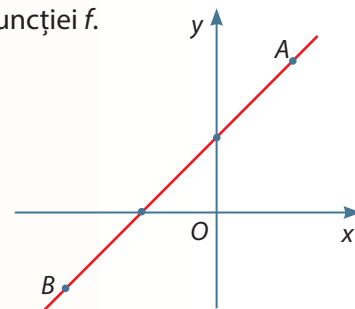
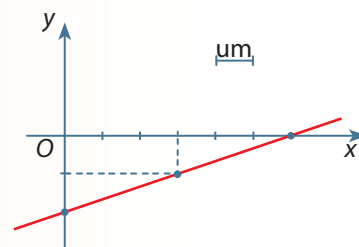
a) Calculează $f(0) + f(-1)$.

b) Fiind date punctele $A(1, 2)$ și $B(-2, -1)$, determină coordonatele punctului M situat pe axa Oy , astfel încât $AM + MB$ să aibă valoare minimă.

30 Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x + 3$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{5}{4}x + \frac{15}{2}$.

a) Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $|2f(x) + 4g(x)| \leq g(0)$.

b) Calculează aria patrulaterului $ABCO$, unde $\{A\} = G_f \cap Oy$, $\{B\} = G_f \cap G_g$, $\{C\} = G_g \cap Ox$, iar O este originea sistemului de axe ortogonale xOy .



GEOMETRIE

Pentru enunțurile 1-15 încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

- 1 Un cub are muchia de 2 cm. Diagonala cubului are lungimea egală cu:
 a) $2\sqrt{2}$ cm; b) 2 cm; c) $2\sqrt{3}$ cm; d) 4 cm.
- 2 Diagonala unui cub are lungimea $4\sqrt{3}$ cm. Aria laterală a cubului este egală cu:
 a) 16 cm^2 ; b) 64 cm^2 ; c) $16\sqrt{3}\text{ cm}^2$; d) $64\sqrt{2}\text{ cm}^2$.
- 3 În figura 1 este reprezentat paralelipipedul dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$ cu $AC = 10$ cm. Lungimea segmentului $B'O'$, cu $\{O\} = A'C' \cap B'D'$, este egală cu:
 a) 10 cm; b) 3 cm; c) 8 cm; d) 5 cm.
- 4 Aria totală a unui paralelipiped dreptunghic care are dimensiunile 6 cm, 4 cm, 5 cm este egală cu:
 a) 48 cm^2 ; b) 76 cm^2 ; c) 148 cm^2 ; d) 120 cm^2 .
- 5 O prismă dreaptă cu baza un triunghi echilateral cu latura de 10 cm are aria laterală egală cu 240 cm^2 . Înălțimea prisme este egală cu:
 a) 12 cm; b) 6 cm; c) 24 cm; d) 8 cm.
- 6 În figura 2 este reprezentată o prismă hexagonală regulată $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$ cu $AA' = 10$ cm și $AB = 6$ cm. Distanța de la punctul A' la dreapta CD este egală cu:
 a) $2\sqrt{34}$ cm; b) $2\sqrt{61}$ cm; c) $4\sqrt{13}$ cm; d) 16 cm.
- 7 Un ornament în formă de tetraedru regulat are aria totală de $36\sqrt{3}\text{ cm}^2$. Muchia ornamentului are lungimea egală cu:
 a) 4 cm; b) 6 cm; c) $2\sqrt{3}$ cm; d) $4\sqrt{3}$ cm.
- 8 Piramida patrulateră regulată $VABCD$ din figura 3 are toate muchiile egale. Măsura unghiului AVC este egală cu:
 a) 30° ; b) 45° ; c) 60° ; d) 90° .
- 9 Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are muchia bazei mici de 6 cm, muchia bazei mari de 12 cm și apotema de $2\sqrt{3}$ cm. Înălțimea acestui trunchi este egală cu:
 a) 3 cm; b) $2\sqrt{3}$ cm; c) $3\sqrt{2}$ cm; d) 4 cm.
- 10 Un vas în formă de trunchi de piramidă patrulateră regulată se umple cu apă. Apotema bazei mici este de 10 cm, apotema bazei mari este de 15 cm, iar înălțimea vasului este egală cu 60 cm. Numărul de litri de apă din acest vas este egal cu:
 a) 9,5; b) 38; c) 38000; d) 9500.
- 11 Volumul unui cilindru circular drept care are raza de 6 cm și înălțimea de 8 cm este egal cu:
 a) $288\pi\text{ cm}^3$; b) $48\pi\text{ cm}^3$; c) $96\pi\text{ cm}^3$; d) $144\pi\text{ cm}^3$.
- 12 Un con circular drept are volumul de $128\pi\text{ cm}^3$ și diametrul bazei egal cu 16 cm. Aria laterală a acestui con este egală cu:
 a) $80\pi\text{ cm}^2$; b) $128\pi\text{ cm}^2$; c) $144\pi\text{ cm}^2$; d) $196\pi\text{ cm}^2$.
- 13 Un trunchi de con circular drept are bazele de arii egale cu $100\pi\text{ cm}^2$, respectiv cu $256\pi\text{ cm}^2$, iar secțiunea sa axială $ABB'A'$ are diagonalele perpendiculare (figura 4). Aria secțiunii axiale $ABB'A'$ este egală cu:
 a) 356 cm^2 ; b) 400 cm^2 ; c) 576 cm^2 ; d) 676 cm^2 .
- 14 Raza unei sfere este de 9 cm. Volumul sferei este egal cu:
 a) $729\pi\text{ cm}^3$; b) $36\pi\text{ cm}^3$; c) $324\pi\text{ cm}^3$; d) $972\pi\text{ cm}^3$.
- 15 O sferă are diametrul de 8 cm. Aria sferei este egală cu:
 a) $32\pi\text{ cm}^2$; b) $256\pi\text{ cm}^2$; c) $128\pi\text{ cm}^2$; d) $64\pi\text{ cm}^2$.

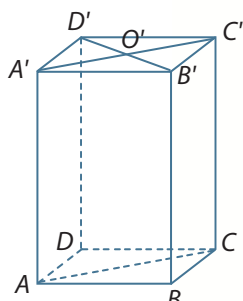


Fig. 1

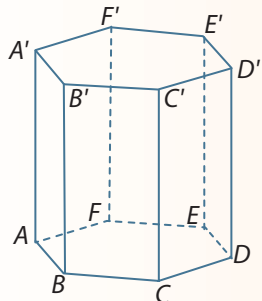


Fig. 2

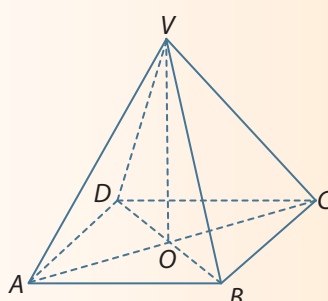


Fig. 3

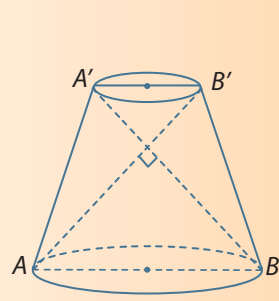


Fig. 4

Pentru enunțurile 16-25 scrie rezolvările complete.

16 Cubul $ABCD A'B'C'D'$ (figura 5) cu muchia de 30 cm este o cutie.

a) Arată că nu se poate împacheta cutia cu o coală de hârtie dreptunghiulară cu lungimea de 100 cm și lățimea de 50 cm.

b) Determină măsura unghiului dintre dreptele AO și DC' , unde O este centrul feței $(BCC'B')$.

17 Fie un cub $ABCD A'B'C'D'$ cu muchia de 6 cm (figura 5).

a) Calculează sinusul unghiului dintre diagonala $A'C$ și planul bazei (ABC) .

b) Determină distanța de la vârful B' la planul (ABC) .

18 Fie $ABCD A'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic (figura 6) cu $AB = 6$ cm, $BC = 3$ cm și $AA' = 3\sqrt{2}$ cm. Punctul M este mijlocul muchiei BC .

a) Arată că aria triunghiului ADM este 9 cm².

b) Determină distanța de la vârful D' la dreapta AM .

19 Paralelipipedul $ABCD A'B'C'D'$ din figura 6 are $AB = 12\sqrt{2}$ cm, $BC = 12$ cm și $AA' = 12$ cm.

a) Arată că măsura unghiului $D'CA'$ este de 30° .

b) Determină distanța de la vârful A la planul (BCD) .

20 Prisma triunghiulară $ABCA'B'C'$ (figura 7) are baza triunghiul echilateral ABC cu $AB = 10$ cm și $AA' = 10\sqrt{3}$ cm, iar M este mijlocul lui CC' .

a) Arată că volumul prisme este egal cu 750 cm³.

b) Fie $\{N\} = A'M \cap AC$. Calculează măsura unghiului dintre $B'N$ și planul (ABC) .

21 Tetraedrul regulat $ABCD$ din figura 8 are volumul egal cu $18\sqrt{2}$ cm³.

a) Determină distanța dintre mijloacele a două muchii ale tetraedrului care nu au niciun punct comun.

b) Determină măsura unghiului dintre dreapta BC și planul (BMN) , unde M este mijlocul lui AB și N este mijlocul lui CD .

22 Un vas în formă de piramidă patrulateră regulată $DULCE$ (figura 9), având vârful D și baza pătratul $ULCE$ cu aria 256 cm², este plin cu ciocolată lichidă, în total $2,048$ ℓ.

a) Arată că suprafața de sticlă folosită pentru realizarea vasului (fără capac) depășește $0,08$ m².

b) Calculează sinusul unghiului dintre două fețe ale vasului care nu au nicio muchie comună.

23 În figura 10 este reprezentat trunchiul de piramidă patrulateră regulată $ABCD A'B'C'D'$ cu $AB = 12$ cm, $A'B' = 8$ cm și înălțimea $OO' = 10$ cm.

a) Determină distanța de la punctul A' la muchia BC .

b) Calculează sinusul unghiului dintre planele $(A'BD)$ și $(C'BD)$.

24 Desfășurarea plană a suprafeței laterale a unui cilindru circular drept este un pătrat cu latura de 12π cm.

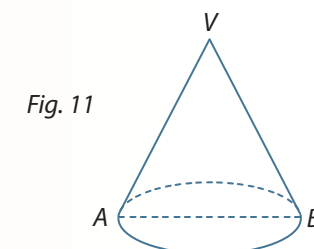
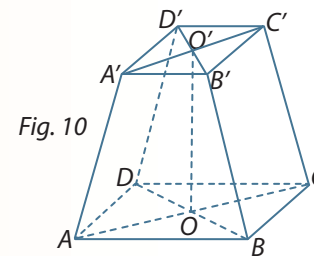
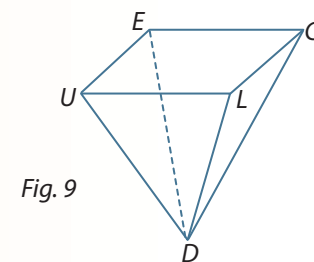
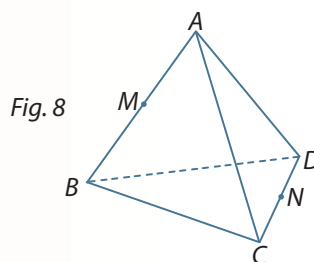
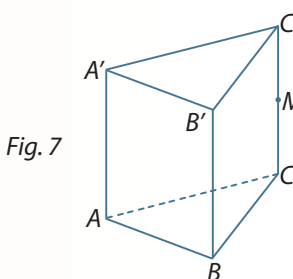
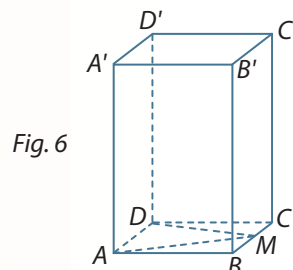
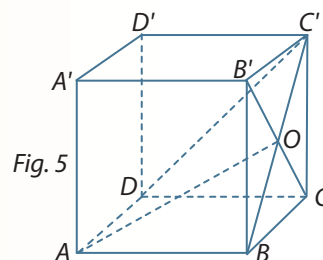
a) Calculează aria totală a cilindrului.

b) Determină tangenta unghiului dintre o diagonală a secțiunii axiale și planul bazei cilindrului.

25 Desfășurarea plană a suprafeței laterale a unui con circular drept este un sector de cerc cu raza de 30 cm și unghiul la centru de 240° .

a) Calculează înălțimea conului.

b) Dacă triunghiul VAB este secțiunea axială a conului (figura 11), arată că distanța de la A la VB este mai mică de 30 cm.



2. TESTE FINALE TIP EVALUARE NAȚIONALĂ

Testul 1

- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de două ore.

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

(30 de puncte)

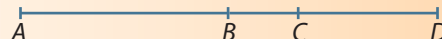
- (5p) 1. Rezultatul calculului $4 : (-1) + 5$ este:
 a) 4; b) 5; c) 1; d) -1.
- (5p) 2. O carte costă 50 de lei. După o scumpire cu 10%, cartea va costa:
 a) 55 de lei; b) 45 de lei; c) 60 de lei; d) 51 de lei.
- (5p) 3. Valorile reale ale numărului x din proporția $\frac{x}{4} = \frac{9}{x}$ sunt:
 a) $\{-2, 2\}$; b) $\{-3, 3\}$; c) $\{-4, 4\}$; d) $\{-6, 6\}$.
- (5p) 4. $\sqrt{12} + \sqrt{27}$ este egal cu:
 a) $2\sqrt{3}$; b) $5\sqrt{3}$; c) $3\sqrt{5}$; d) $4\sqrt{2}$.
- (5p) 5. Mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 1\}$ este egală cu:
 a) $\{0, 1\}$; b) $\{-1, 1\}$; c) $[-1, 1]$; d) $(-1, 1)$.
- (5p) 6. $1 \text{ ha} = 10000 \text{ m}^2$ este o propoziție:
 a) adevărată; b) falsă.

SUBIECTUL al II-lea

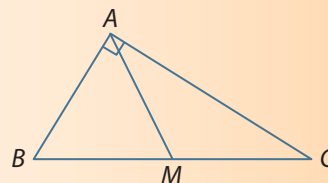
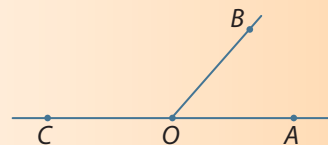
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

(30 de puncte)

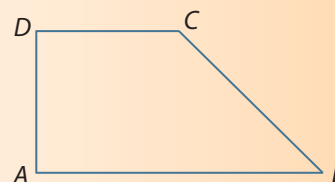
- (5p) 1. În figura alăturată, punctul B este mijlocul segmentului AD . Dacă $AD = 6 \text{ cm}$ și $BC = 1 \text{ cm}$, atunci raportul $\frac{BC}{BD}$ este egal cu:



- a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{3}{6}$;
 c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{1}{3}$.
- (5p) 2. În figura alăturată, unghiurile AOB și BOC sunt adiacente suplementare. Dacă $\angle BOC = 2 \cdot \angle AOB$, atunci măsura unghiului AOB este egală cu:
 a) 90° ;
 b) 60° ;
 c) 120° ;
 d) 80° .
- (5p) 3. În figura alăturată este reprezentat triunghiul dreptunghic ABC cu ipotenuza $BC = 10 \text{ cm}$. Lungimea medianei AM este egală cu:
 a) 10 cm ;
 b) 6 cm ;
 c) 5 cm ;
 d) 2 cm .



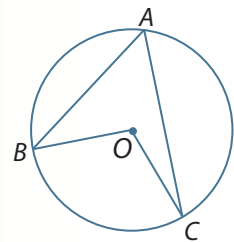
- (5p) 4. În figura alăturată este reprezentat trapezul dreptunghic $ABCD$ cu $AD = CD = 4 \text{ cm}$ și $BC = 4\sqrt{2} \text{ cm}$. Lungimea bazei mari AB este egală cu:
 a) 6 cm ;
 b) 10 cm ;
 c) 8 cm ;
 d) $(4 + 4\sqrt{2}) \text{ cm}$.



(5p)

5. În figura alăturată este reprezentat cercul de centru O . Punctele A, B, C aparțin cercului astfel încât $\angle BOC = 110^\circ$. Măsura unghiului BAC este egală cu:

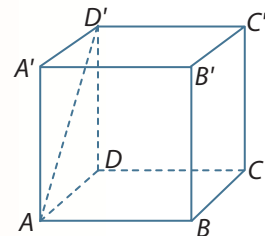
- a) 55° ;
- b) 60° ;
- c) 90° ;
- d) 110° .



(5p)

6. În figura alăturată este reprezentat cubul $ABCD A' B' C' D'$. Măsura unghiului dintre dreptele AD' și CD este egală cu:

- a) 90° ;
- b) 60° ;
- c) 45° ;
- d) 30° .



SUBIECTUL al III-lea

Scrie rezolvările complete.

(30 de puncte)

1. Într-un bloc sunt 24 de apartamente cu două sau cu trei camere, în total 66 de camere.

(2p)

- a) Pot fi 12 apartamente cu trei camere? Justifică răspunsul.

(3p)

- b) Determină numărul apartamentelor cu două camere din bloc.

2. Fie expresia $E(x) = \left(\frac{x^2 + 2}{x^2 + 4x + 4} - \frac{x}{x + 2} \right) : \left(\frac{1}{x - 2} - \frac{3}{x^2 - 4} \right)$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 2\}$.

(2p)

- a) Arată că $E(x) = \frac{-2(x - 2)}{x + 2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 2\}$.

(3p)

- b) Determină valorile întregi ale numărului a pentru care $E(a)$ este număr întreg.

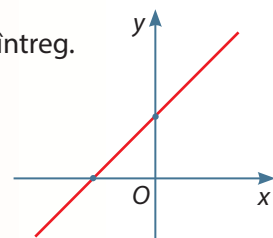
3. În sistemul cartezian xOy din figura alăturată este reprezentată grafic funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 4$.

(2p)

- a) Calculează $f(0) \cdot f(-1)$.

(3p)

- b) Determină distanța de la O , originea sistemului cartezian, la graficul funcției f .



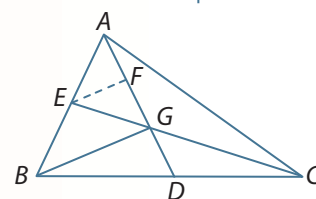
4. În triunghiul ABC din figura alăturată, punctul D este mijlocul lui BC , punctul E este mijlocul lui AB , iar $\{G\} = CE \cap AD$. Paralela prin E la BG intersectează AD în F , $AD = 12$ cm, iar $BG = 8$ cm.

(2p)

- a) Arată că triunghiul AFE este isoscel.

(3p)

- b) Demonstrează că CE este perpendiculară pe AB .



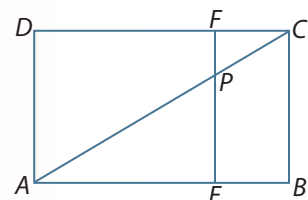
5. Dreptunghiul $ABCD$ din figura alăturată are $AB = 8$ cm și $BC = 6$ cm. Punctele E și F se găsesc pe laturile AB , respectiv CD astfel încât $EF \parallel AD$, iar $3AE = 5BE$.

(2p)

- a) Calculează lungimea segmentului AE .

(3p)

- b) Dacă $\{P\} = AC \cap EF$, determină aria patrulaterului $BEDP$.



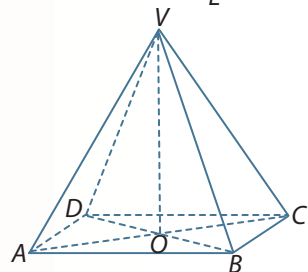
6. În figura alăturată este reprezentată piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu $\{O\} = AC \cap BD$, $AB = 12$ cm și $\angle VAC = 45^\circ$.

(2p)

- a) Arată că volumul piramidei $VABCD$ este egal cu $288\sqrt{2}$ cm³.

(3p)

- b) Determină distanța de la vârful A la planul (VBC) .



Testul 2

- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de două ore.

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

(30 de puncte)

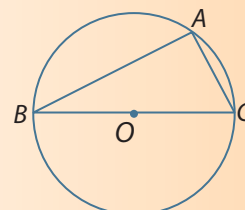
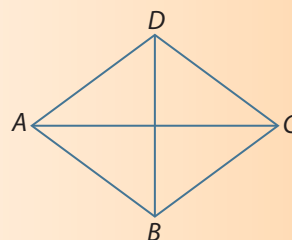
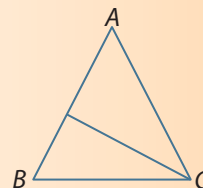
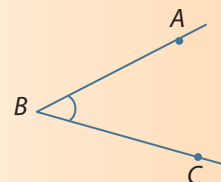
- (5p) 1. Rezultatul calculului $36 : (-6) + 6 - 5$ este:
 a) -5; b) 0; c) 5; d) 7.
- (5p) 2. După o reducere de 10%, prețul unui obiect a devenit 180 de lei. Prețul inițial al obiectului a fost de:
 a) 190 de lei; b) 200 de lei; c) 220 de lei; d) 300 de lei.
- (5p) 3. Media aritmetică a numerelor $3 + \sqrt{2}$ și $3 - \sqrt{2}$ este:
 a) $\sqrt{5}$; b) 5; c) 3; d) 6.
- (5p) 4. Numărul pătratelor perfecte din intervalul $[\sqrt{14}, 12)$ este egal cu:
 a) 1; b) 2; c) 3; d) 4.
- (5p) 5. Soluția reală negativă a ecuației $|x - 2| = 3$ este:
 a) -3; b) -2; c) -1; d) 5.
- (5p) 6. Afirmația: „Inversul numărului rațional $-\frac{2}{3}$ este $\frac{3}{2}$.” este:
 a) adevărată; b) falsă.

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

(30 de puncte)

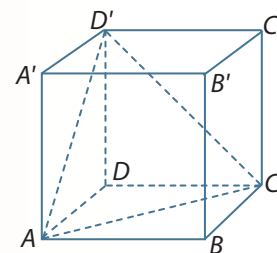
- (5p) 1. În figura alăturată sunt reprezentate punctele A, B, C și D astfel încât $AB = BC = CD$. Simetricul punctului B față de C este:
 a) A ; b) B ;
 c) C ; d) D .
- (5p) 2. Complementul unghiului ABC din figura alăturată, cu $\angle ABC = 43^\circ$, are măsura egală cu:
 a) 43° ; b) 47° ;
 c) 90° ; d) 137° .
- (5p) 3. În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC cu $AB = AC = 25$ cm și $BC = 30$ cm. Distanța de la punctul C la dreapta AB este egală cu:
 a) 20 cm;
 b) 24 cm;
 c) 25 cm;
 d) 30 cm.
- (5p) 4. Podeaua unui magazin are forma unui romb $ABCD$ cu diagonalele de 12 m, respectiv 16 m, ca în figura alăturată. Podeaua se pavează cu plăci de marmură la prețul de 75 euro/m². Costul total al marmurei necesare (se neglijează pierderile) este:
 a) 5700 euro;
 b) 6000 euro;
 c) 7200 euro;
 d) 8000 euro.
- (5p) 5. În figura alăturată, triunghiul ABC este înscris în cercul de centru O și rază 5 cm, iar BC este diametru. Dacă $AB = 5\sqrt{3}$ cm, atunci măsura arcului mic AC este egală cu:
 a) 30° ;
 b) 45° ;
 c) 60° ;
 d) 90° .



(5p)

6. În figura alăturată este reprezentat cubul $ABCD A'B'C'D'$. Dacă perimetrul triunghiului $D'AC$ este egal cu $21\sqrt{2}$ cm, atunci aria totală a cubului este egală cu:

- a) 144 cm^2 ;
- b) 196 cm^2 ;
- c) 294 cm^2 ;
- d) 343 cm^2 .



SUBIECTUL al III-lea

Scrie rezolvările complete.

(30 de puncte)

1. Vârsta bunicului este un număr natural de două cifre, fiecare cifră reprezentând vârsta unuia dintre cei doi nepoți. Suma vârstelor celor trei este egală cu 76 de ani.

(2p)

- a) Este posibil ca bunicul să aibă 72 de ani? Justifică răspunsul dat.

(3p)

- b) Determină vârstele celor doi nepoți.

2. Fie expresia $E(x) = \left(\frac{x}{x-3} + \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x^2-5x+6} \right) : \frac{x+2}{x^2-4x+3}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 2, 3\}$.

(2p)

- a) Arată că $E(x) = x - 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 2, 3\}$.

(3p)

- b) Calculează suma $E(5) + E(6) + E(7) + \dots + E(29)$.

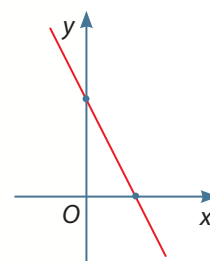
3. În sistemul cartezian xOy din figura alăturată este reprezentată grafic funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 4$.

(2p)

- a) Calculează $f(-3) \cdot f(3)$.

(3p)

- b) Calculează aria triunghiului determinat de graficul funcției f și de axele de coordonate.



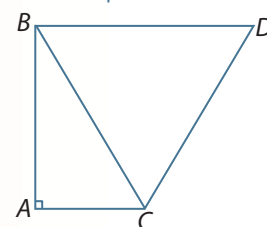
4. În figura alăturată este reprezentat triunghiul dreptunghic ABC cu $\angle BAC = 90^\circ$ și $AC = 6$ cm. În exteriorul său este construit triunghiul echilateral BCD astfel încât $DC = 12$ cm.

(2p)

- a) Arată că $AC \parallel BD$.

(3p)

- b) Demonstrează că distanța de la punctul A la punctul D este mai mică decât 16 cm.



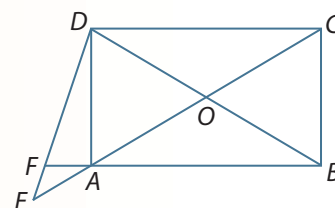
5. Dreptunghiul $ABCD$ din figura alăturată are lungimea $AB = 10\sqrt{3}$ cm și lățimea $BC = 10$ cm. Pe dreapta AC se consideră punctul E astfel încât $A \in (EC)$ și $AE = 5$ cm, iar $\{F\} = DE \cap AB$.

(2p)

- a) Arată că $AF = 2\sqrt{3}$ cm.

(3p)

- b) Calculează perimetrul triunghiului DEO , unde $\{O\} = AC \cap BD$.



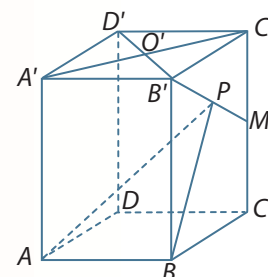
6. Prisma patrulateră dreaptă $ABCD A'B'C'D'$ din figura alăturată are baza pătratul $ABCD$ de arie egală cu 108 cm^2 și muchia laterală $AA' = 12$ cm. Punctul M este mijlocul muchiei CC' , P este mijlocul lui $B'M$, iar O' este centrul feței $A'B'C'D'$.

(2p)

- a) Arată că dreapta PO' este paralelă cu planul (ABA') .

(3p)

- b) Demonstrează că dreapta MB' este perpendiculară pe planul (PAB) .



Testul 3

- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de două ore.

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

(30 de puncte)

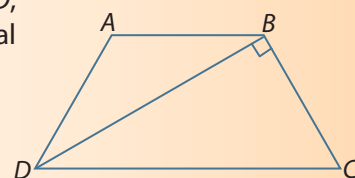
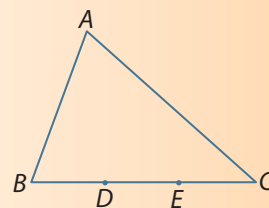
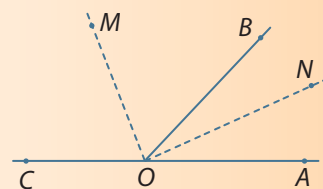
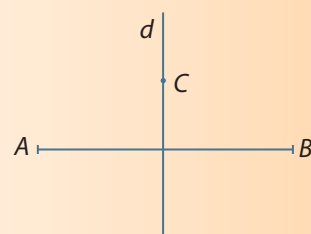
- (5p) 1. Rezultatul calculului $3^2 - 2 \cdot 3 + (-3)^0$ este:
 a) 1; b) 3; c) 4; d) 10.
- (5p) 2. Dacă $\frac{x}{y} = \frac{3}{5}$, atunci valoarea raportului $\frac{y-x}{x+y}$ este:
 a) 0,2; b) 0,25; c) 0,3; d) 0,5.
- (5p) 3. Media geometrică a numerelor $3\sqrt{2} + 4$ și $3\sqrt{2} - 4$ este:
 a) $\sqrt{2}$; b) 2; c) $3\sqrt{2}$; d) $6\sqrt{2}$.
- (5p) 4. Intersecția intervalelor $[-1, 5]$ și $(2, 7]$ este intervalul:
 a) $[-1, 7]$; b) $(2, 5]$; c) $[2, 5]$; d) $(-1, 7)$.
- (5p) 5. Cea mai mică soluție a ecuației $x^2 - 8x + 15 = 0$ este:
 a) -5; b) -3; c) 3; d) 5.
- (5p) 6. Afirmația: „Numărul divizorilor întregi ai numărului 8 este 8.” este:
 a) adevărată; b) falsă.

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

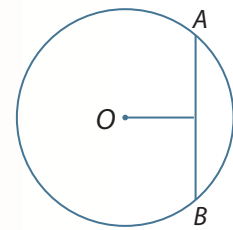
(30 de puncte)

- (5p) 1. În figura alăturată, dreapta d este mediatoarea segmentului AB , iar C este un punct al dreptei d astfel încât $BC = 3$ cm. Distanța dintre punctele A și C este egală cu:
 a) 3 cm;
 b) 5 cm;
 c) 6 cm;
 d) $3\sqrt{2}$ cm.
- (5p) 2. În figura alăturată, punctele C, O, A sunt coliniare, iar B este un punct exterior dreptei AC . Dacă OM și ON sunt bisectoarele unghiurilor COB , respectiv BOA , atunci măsura unghiului MON este egală cu:
 a) 60° ;
 b) 90° ;
 c) 120° ;
 d) 180° .
- (5p) 3. În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC de arie 132 cm^2 . Pe latura BC se consideră punctele D și E astfel încât $BD = DE = EC$. Aria triunghiului DAC este egală cu:
 a) 44 cm^2 ;
 b) 88 cm^2 ;
 c) 124 cm^2 ;
 d) 132 cm^2 .
- (5p) 4. În figura alăturată este reprezentat trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $DB \perp BC$, $\angle BDC = 30^\circ$ și $DC = 20$ cm. Perimetrul trapezului este egal cu:
 a) 50 cm;
 b) 70 cm;
 c) 80 cm;
 d) $75\sqrt{3}$ cm.



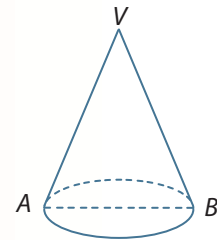
(5p)

5. Cercul din figura alăturată are raza 20 cm și distanța de la punctul O , centrul cercului, la coarda AB egală cu 12 cm. Lungimea coardei AB este egală cu:
- 16 cm;
 - 32 cm;
 - 40 cm;
 - 52 cm.



(5p)

6. Secțiunea axială a conului circular drept din figura alăturată este triunghiul echilateral VAB cu $VA = 12$ cm. Volumul conului este egal cu:
- $72\pi\sqrt{3}$ cm³;
 - $144\pi\sqrt{3}$ cm³;
 - $216\pi\sqrt{3}$ cm³;
 - 300π cm³.



SUBIECTUL al III-lea

Scrie rezolvările complete.

(30 de puncte)

1. La un club sportiv sunt de două ori mai multe fete decât băieți. După o lună, pleacă 30 de fete și vin 14 băieți și astfel numărul fetelor este egal cu cel al băieților.

(2p)

a) Ar fi putut fi inițial 100 de elevi la clubul sportiv? Justifică răspunsul dat.

(3p)

b) Calculează câți băieți au fost inițial.

2. Se consideră expresia $E(x) = (3x + 2)^2 - (2x - 1)^2 - x(5x + 14) - 8$, unde $x \in \mathbb{R}$.

(2p)

a) Calculează $E(5)$.

(3p)

b) Determină numerele întregi x pentru care fracția $\frac{2x+3}{E(x)}$ este număr întreg.

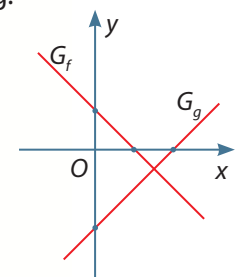
3. Fie funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x + 2$, $g(x) = x - 4$.

(2p)

a) Verifică dacă punctul $A(3, -1)$ se află la intersecția graficelor celor două funcții.

(3p)

b) Arată că dreptele care reprezintă graficele celor două funcții sunt perpendiculare.



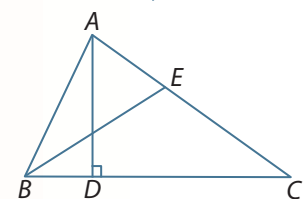
4. În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC de perimetru $36 + 12\sqrt{3}$ cm, cu BE – bisectoarea unghiului ABC , $E \in AC$, și AD – înălțime, $D \in BC$. Se cunosc $AB = 12$ cm și $DC = 18$ cm, iar măsura unghiului ABD este de 60° .

(2p)

a) Arată că $BC = 24$ cm.

(3p)

b) Verifică dacă lungimea segmentului CE este mai mică decât 14 cm.



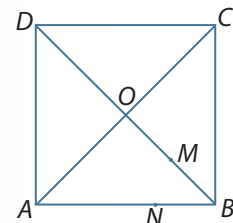
5. Pătratul $ABCD$ din figura alăturată are latura de 24 cm și centrul O . Punctul M este mijlocul segmentului OB , iar $N \in (AB)$ astfel încât $NB = \frac{AB}{3}$.

(2p)

a) Arată că $CM = 6\sqrt{10}$ cm.

(3p)

b) Demonstrează că punctele C, M și N sunt coliniare.



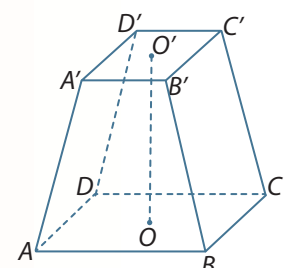
6. Figura alăturată ilustrează un vas decorativ în formă de trunchi de piramidă patrulateră regulată $ABCD A' B' C' D'$, având ariile bazelor 16 cm², respectiv 64 cm². Înălțimea trunchiului este $OO' = 2\sqrt{2}$ cm, unde O și O' sunt centrele bazelor.

(2p)

a) Calculează apotema trunchiului.

(3p)

b) Determină sinusul unghiului dintre BB' și AD' .



SOLUȚII

RECAPITULARE ȘI EVALUARE ÎNȚĂLĂ

1. Probleme recapitulative

1. a) 17; b) -1; c) 72; d) $\frac{11}{6}$; e) 20; f) -8. 2. $A \cap \mathbb{N} = \{10\}$;

$$A \cap \mathbb{Z} = \{-5, -\sqrt{64}, 10\}; A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \{-\sqrt{72}, \sqrt{7}\}.$$

3. a) $\sqrt{180}$; b) $-\sqrt{63}$; c) $\sqrt{18}$; d) $-\sqrt{12}$; e) $\sqrt{2x^2}$.

4. a) $2\sqrt{2}$; b) $5\sqrt{10}$; c) $-6\sqrt{3}$; d) $-14\sqrt{2}$; e) $-2a$.

5. 2,8. 6. 3. 7. a) $x < y$; b) $x < y$; c) $x > y$; d) $x > y$.

8. a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$; b) $-5\sqrt{2}$; c) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$; d) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; e) $\frac{\sqrt{5}}{5}$. 9. $E(\sqrt{8}) -$

$-2E(\sqrt{2}) = 1$. 10. a) 1; b) -4. 11. a) $5\sqrt{7}$; b) $2\sqrt{2} - 2$;

c) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$; d) $6 + \sqrt{6}$. 12. a) 2; b) 4; c) 2; d) 1. 13. $a =$

$4\sqrt{5}$; $b = 20$. 14. a) -2; b) $\frac{2}{3}$. 15. $a = 4$; $b = \frac{5}{3}$.

16. a) $x = 2$; b) $x = 150$. 17. a) $m_a = 11$; $m_g = 6\sqrt{2}$; b) $m_a =$

$4\sqrt{3}$; $m_g = 6$; c) $m_a = 3$; $m_g = 2$. 18. $\frac{26}{7}$. 19. a) $x =$

3 ; b) $x = 7$; c) $x = -6$; d) $x \in \{\pm\sqrt{7}\}$; e) $x \in \{-3; 7\}$;

f) $x = 4\sqrt{2}$. 20. $m = -6$. 21. $a = 1$. 22. a) $x = 3$; $y = 1$;

b) $x = 2$; $y = 1$; c) $x = 2\sqrt{2}$; $y = \sqrt{3}$. 23. $a = 2$; $b = 3$.

24. 11. 25. a) Nu, am obține 19 camere provenind de

la 10 apartamente cu două camere; b) 11 apartamen-

te cu două camere. 26. $AB = 5$. 27. $AB = AC + BC$.

28. a) 15 cm; b) $\sin B = \frac{15}{17} < \frac{9}{10}$. 29. a) $\angle BND = 135^\circ$;

b) $BM = NC$, $BN \perp MC$, $MN \parallel BC$. 30. a) $\mathcal{A}_{\Delta MAD} = 9 \text{ cm}^2$;

b) $\Delta MAP \sim \Delta DCP$, de unde $AP = 2\sqrt{2} \text{ cm}$. 31. a) $BM =$

$\frac{AB}{2} = 6 \text{ cm}$; b) $\mathcal{A}_{ABCD} = 72 \text{ cm}^2$; c) $BMDN$ - drept-

unghi. 32. a) 12 cm; b) 24 cm^2 ; c) $\Delta MDC \sim \Delta MAB$; $MD =$

3 cm . 33. a) $BC = BM$ și $\angle CBM = 60^\circ$; b) $AD \parallel CN$ și

$AD = CN$, deci $ACND$ este un paralelogram. 34. a) $\frac{4}{7}$;

b) $\Delta AOM \sim \Delta ACB$; c) 56,25%. 35. a) $\angle C \equiv \angle C$ și $\angle M \equiv \angle B$;

b) 20 cm. 36. a) $24\pi \text{ cm}$; b) 90° ; c) $108\sqrt{3} \text{ cm}^2$. 37. a) 3 cm;

b) $\frac{1}{2}$.

2. Teste de evaluare inițială

Test de evaluare inițială - algebră

I. 1. -2. 2. 3. 3. 5. 4. 8. II. 1) $\rightarrow$ c); 2) $\rightarrow$ d); 3) $\rightarrow$ e);

4) $\rightarrow$ a). III. 1. D. 2. A. 3. B. 4. C. IV. b) 2; c) 5. V. a) Nu;

b) 49; c) 525 lei.

Test de evaluare inițială - geometrie

I. 1. $12\pi \text{ cm}$. 2. 120° . 3. 8 cm. 4. 2. II. 1) $\rightarrow$ d); 2) $\rightarrow$ a);

3) $\rightarrow$ b); 4) $\rightarrow$ c). III. 1. B. 2. C. 3. D. 4. B. IV. b) $4\sqrt{2} \text{ cm}$;

c) $\frac{\sqrt{6}}{3}$. V. b) $\angle M \equiv \angle M$ și $\angle MDB \equiv \angle MAC$; c) 10 cm.

Unitatea de învățare 1. INTERVALE DE NUMERE REALE.

INECUAȚII ÎN $\mathbb{R}$

Leția 1. Mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor lor

1. $\{x \mid x \text{ județ din România și prima literă a lui } x \text{ este „C”}\}$, intrus: Dolj. 2. $A = \{\text{Fotbal, Scrimă, Înot}\}$; $B =$

$\{\text{Fotbal, Baschet, Înot}\}$. 3. $A = \{r, n, t, c\}$; $B = \{0, 3, 6, 9,$

$12, 15, 18, 21\}$; $C = \{13, 17, 19, 23, 29, 31, 37\}$; $D = \{1, 2,$

$3\}$. 4. a) $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$; b) $\{n^2 \mid n \in \mathbb{N} \text{ și } n^2 < 1000\}$; c) $\{x \in$

$\mathbb{R} \mid x < |x|\}$; d) $\{7n + 5 \mid n \in \mathbb{N}\}$. 5. P_1 : A; P_2 : F; P_3 : A;

P_4 : F. 6. a) $\rightarrow 3$; b) $\rightarrow 1$; c) $\rightarrow 2$; d) $\rightarrow 4$. 7. $F =$

$= \left\{2, 1, \frac{2}{3}, 4, \frac{4}{3}, 6, 3\right\}$, $\text{card } F = 7$. 8. $\text{card } A = 101$; $\text{card } B =$

$= 21$; $\text{card } C = 16$; $\text{card } D = 3$. 9. $A = \left\{0; \frac{9}{3}\right\}$, $B =$

$= \left\{-2, (3); -\sqrt{1, (7)}; 0; \frac{9}{3}; \frac{12}{14}\right\}$, $C = \left\{-\sqrt{5}; \pi - 4; \frac{\sqrt{75}}{3}; 1 - \sqrt{3}\right\}$;

$D = \left\{-2, (3); -\sqrt{5}; -\sqrt{1, (7)}; \pi - 4; 1 - \sqrt{3}\right\}$. 10. a) 2, 5, 8;

b) $100 \notin M$, $251 \in M$, $330 \notin M$; c) 998. 11. $A = \{2, 8\}$, $B =$

$= \{(2, 0); (5, 0); (8, 0); (0, 5); (3, 5); (6, 5); (9, 5)\}$, $C = \emptyset$.

12. $A = \{1, 2, 3, 6\}$; $B = \{-5, -2, -1, 0\}$; $C = \{0, 1, 2\}$; $D =$

$= \{-6, -4, -3, -1, 0, 2\}$.

Autoevaluare

1. $A = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid 6 : x\}$, $B = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \text{ și } 1 < n \leq 20\right\}$, $C =$

$= \{3^n \mid n \in \mathbb{N} \text{ și } n \leq 4\}$. 2. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; $B =$

$= \{-6, 6, -7, 7, -8, 8, -9, 9, -10, 10\}$; $C = \{1, 2, 3, 5, 6, 7,$

$9\}$; $D = \{1, 3, 5, 7\}$. 3. b). 4. a). 5. a) adevărată. Justifica-

re: Nu există pătrate perfecte cu ultima cifră 3 sau 8.

Leția 2. Intervale numerice și reprezentarea lor pe axa

numelor; intersecția și reuniunea intervalelor

1. a) $[7;30]$; $[8;30]$; b) $[9;00]$; $[13;00]$. 2. $[12,5; 80]$. 3. $[24^\circ;$

$31^\circ]$. 4. $A = [-3; 5]$; $B = (10; 12)$; $C = (-1; 0]$; $D = [2; 4)$;

$E = [-2; +\infty)$; $F = (-\infty, -5]$; $G = (-\infty; 99)$; $H = (-21; +\infty)$;

$I = [-\sqrt{2}; 1 + \sqrt{3})$; $J = \left(-\frac{13}{7}; -\frac{1}{3}\right]$; $K = (0,25, +\infty)$; $L =$

$= (-\infty; \pi]$. 7. a) A; b) A; c) F; d) A; e) F; f) A; g) F; h) A.

8. a) F; b) A; c) A; d) F; e) A; f) A. 9. a) $\rightarrow 5$; b) $\rightarrow 1$;

c) $\rightarrow 2$; d) $\rightarrow 6$; e) $\rightarrow 3$; f) $\rightarrow 4$. 10. a) 2; b) 4; c) -3;

d) 1; e) 4; f) nu există niciun număr întreg în intervalul

precizat. 11. a) -4; b) -1; c) -1; d) -4; e) -2. 12. a) -2;

b) -2. 13. $a = 1 - \frac{1}{38} = \frac{37}{38} > \frac{19}{38} = \frac{1}{2}$; b) $b = 4\sqrt{5} =$

$= \sqrt{80} \in [\sqrt{64}; \sqrt{81}] = [8; 9]$. 14. $a \in \{-1; 0\}$. 15. a) $A =$

$= \{-1; 1\}$; b) $B = \{-5; 1\}$; c) $C = \{-1; 0\}$; d) $D = [-2; 2]$; e) $E =$

$= (-1; 5)$; f) $F = \left(-\frac{4}{3}; 2\right)$. 16. a) $I = (0; 2)$; $J = (1; 3)$; $I \cup J =$

$= (0; 3)$; $I \cap J = (1; 2)$; b) $I = [1; 3]$; $J = (-2; 1)$; $I \cup J = (-2; 3)$;

$I \cap J = \emptyset$; c) $I = [-5; 2]$; $J = (0; +\infty)$; $I \cup J = [-5; +\infty)$; $I \cap J =$

$= (0; 2]$; d) $I = (-\infty; 2]$; $J = (-1; 1)$; $I \cup J = (-\infty, 2] = I$; $I \cap J =$

$= (-1; 1) = J$. **17.** a) $(-3; 3)$; b) $[-2; 5]$; c) $(-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$; d) $(-\infty; 3)$; e) $[-1; +\infty)$; f) $(-\infty; +\infty) = \mathbb{R}$. **18.** a) $(-2; 2)$; b) $[0; 2]$; c) $\emptyset$; d) $(-1; 1)$; e) $[0; 3]$; f) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$. **19.** a) $(2; 10]$; b) $\{0; 1; 2\}$; c) $\{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$; d) $\{-1; 1; 2; 3\}$; e) $[-\sqrt{2}; \sqrt{3}]$; f) $\{0; 1\}$. **20.** a) $n = -1$; b) $n = 2$. **21.** a) $A = [-7; 2]$, $B = [-2; 4]$; b) $A \cup B = [-7; 4]$, $A \cap B = [-2; 2]$; c) $-7 \leq \frac{4+\sqrt{2}}{3} \leq 2 \mid \cdot 3 > 0 \Leftrightarrow -21 \leq 4 + \sqrt{2} \leq 6 \mid -4 \Leftrightarrow \Leftrightarrow -25 \leq \sqrt{2} \leq 2$ (A). **22.** a) $A = [0; 1]$; $B = \{0; 1; 2; 3; 4\}$; b) $A \cup B = [0; 1] \cup \{2; 3; 4\}$; $A \cap B = \{0; 1\}$; c) Suma elementelor lui B este 10, iar produsul 0. **23.** $A = \{0; 1\}$; $B = (-1; 1)$; $A \cap B = \{0\}$. **24.** $A = [-1; 3]$; $B = \{-1; 0; 1; 3\}$; $A \cap B = B$. **25.** $A = [-1; 7]$; $B = \{2; 4; 8\}$; $A \cap B = \{2; 4\}$ deci $\text{card}(A \cap B) = 2$. **26.** a) $y \in [1; 2] \Rightarrow 2y \in [2; 4] \Rightarrow 2y - 3 \in [-1; 1]$; $x \in [-2; 3] \Rightarrow 3x \in [-6; 9] \Rightarrow 3x - 8 \in [-14; 1] \Rightarrow \Rightarrow \frac{3x-8}{2} \in \left[-7; \frac{1}{2}\right]$; b) $x + y \in [-1; 5] \Rightarrow x + y - 2 \in [-3; 3] \Leftrightarrow |x + y - 2| \leq 3$. **27.** b) $x^2 \in [1; 9]$ și $5y \in [15; 25] \Rightarrow x^2 + 5y \in [16; 34] \Rightarrow 4 \leq \sqrt{x^2 + 5y} \leq \sqrt{34} < \sqrt{36} = 6$. **28.** $-1 \leq x \leq 2 \Rightarrow x + 1 \geq 0$ și $x - 2 \leq 0$, deci $E = x + 1 + 2 - x = 3$.

Autoevaluare

1. b). **2.** b). **3.** b). **4.** a) $\rightarrow 4$; b) $\rightarrow 1$; c) $\rightarrow 5$; d) $\rightarrow 3$. **5.** $A = \left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$, $B = (-2; 4)$; $A \cup B = (-2; 4)$; $A \cap B = \left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$.

Leția 3. Inecuații de forma $ax + b \geq 0$ ($\leq, <, >$), unde $a, b \in \mathbb{R}$

2. a) $-5, 0, \sqrt{7}$; b) $0, \sqrt{7}$; c) $\sqrt{7}$; d) -5 . **3.** a) $x \in \{0, 1, 2, 3\}$; b) $x \in \{0, 1, 2, 3\}$; c) $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; d) $x \in \{0, 1, 2, 3\}$. **4.** a) $x \in \{3, 4, 5, 6, \dots\}$; b) $x \in \{3, 4, 5, 6, \dots\}$; c) $x \in \{1, 0, -1, -2, -3, \dots\}$; d) $x \in \{-2, -3, -4, -5, \dots\}$. **5.** a) $x \in (-\infty, 3)$; b) $x \in [3, \infty)$; c) $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right)$; d) $x \in (\sqrt{3}, \infty)$; e) $x \in [-2, \infty)$; f) $x \in (-\infty, 2]$. **6.** a) $x \in [7, +\infty)$; b) $x \in (-\infty, 2)$; c) $x \in (-\infty, 6]$; d) $x \in (-4, -\infty)$; e) $x \in (-\infty, -2)$; f) $x \in (3\sqrt{2}, \infty)$. **7.** a) $x \in \left[\frac{2}{5}, \infty\right)$; b) $x \in \left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$; c) $x \in \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$; d) $x \in \left(-\infty, \frac{-1}{11}\right]$; e) $x \in (11, \infty)$; f) $x \in [-2, \infty)$. **8.** a) $x \in (1, \infty)$; b) $x \in (-\infty, 4]$; c) $x \in [-5, \infty)$; d) $x \in (-\infty, 6)$; e) $x \in [2, \infty)$; f) $x \in (-\sqrt{3}, \infty)$. **9.** a) $x \in [-4, 4]$; b) $x \in (-5, 1)$; c) $x \in [-4, 3]$; d) $x \in \left(-\frac{2}{3}, 2\right)$; e) $x \in [-1, 1]$; f) $x \in [-4, -1]$. **10.** a) $\mathbb{N}^*$; b) $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$; c) $x \in \{-2, -1\}$; d) $x \in [-2, \infty)$. **11.** a) adevărată. **12.** a) $x \in [0, 1)$; b) $x \in [3, 4)$; c) $x \in \left[-4, -\frac{7}{2}\right)$; d) $x \in (-2, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, 2)$. **13.** a) $x \in \left[\frac{2}{5}, \infty\right)$; b) $x \in \left(\frac{6}{5}, \infty\right)$; c) $x \in \left(-\infty, \frac{2}{5}\right)$; d) $x \in \left(-\infty, -\frac{2}{5}\right]$. **14.** $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; $B = \{-1, 0,$

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; $C = \{-1, 0, 1\}$; $D = (-\infty, 2] \setminus \{-5\}$. **15.** $(-\infty; -1)$. **16.** a) $x \in [3, \infty)$; b) $x \in (-\infty, 2]$; c) $x \in (3, \infty)$; d) $x \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$; e) $x \in (-\infty, 2)$; f) $x = 1$.

Autoevaluare

1. $x \in [-8, \infty)$. **2.** $x \in \left(-\infty, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **3.** $x \in [2, 5]$. **4.** **0.** **5.** a) $x \in \{0, 1\}$; b) $x \in (2, \infty)$.

Leția 4. Probleme care se rezolvă cu ajutorul inecuațiilor

1. 75000 puieți. **2.** Folosim formula $\frac{m_1 \cdot c_1 + m_2 \cdot c_2}{m_1 + m_2} \geq 13,2$. Sunt 20 g. **3.** $m = -2$. **4.** $c > b > d > a$. **5.** 40, 41, 42, 43, 44. **6.** c) 17. **7.** $B < C < A$. **8.** a) $a \in (0, \infty)$; b) $a \in (0, \infty)$; c) $a \in (-\infty, 0)$; d) $a \in (5, \infty)$; e) $a \in \mathbb{R}$; f) $a \in (4, \infty)$. **9.** 28 de elevi. **10.** 30 goluri. **11.** 8000 lei.

Autoevaluare

1. D. **2.** Nu. **3.** Matei poate mânca cel mult încă 3 biscuiți. **4.** Un exemplu: Matei poate mânca zilnic o banană, o piersică, o salată de fructe și un biscuit. **5.** Un exemplu: două banane și o piersică depășesc cantitatea de zahăr permisă.

RECAPITULARE ȘI EVALUARE

1. Probleme recapitulative

1. $A = (-\sqrt{2}, \sqrt{3}]$; $B = \{-1, 0, 1\}$; $C = \{1\}$. **2.** $A = \{0, 1\}$; $B = [2, 4]$, deci $A \cap B = \emptyset$ și mulțimile sunt disjuncte. **3.** $-\frac{1}{2}$. **4.** $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{4} < \frac{x+1}{12} < \frac{1}{3}\right\} = (-4; 3)$ și cum $3 = \sqrt{9}$, intersecția mulțimilor este $\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \dots, \sqrt{8}\}$ și cardinalul acesteia este egal cu 8. **5.** a) $(-\sqrt{5}, -\sqrt{2})$; b) $(3\sqrt{5}, 4\sqrt{7}]$. **6.** $a = 2$; $b = 1$. **7.** c). **8.** c). **9.** $x(\sqrt{3} - 2) \geq -3(2 - \sqrt{3}) \mid : (\sqrt{3} - 2) < 0 \Leftrightarrow x \leq 3 \Rightarrow A = (-\infty, 3] \Rightarrow \Rightarrow \text{card}(A \cap \mathbb{N}) = 4$. **10.** d). **11.** $c < d < b < a$. **12.** a) $A = \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$; b) $B = \{8, 9, 10, 11, \dots\}$; c) $C = \{1, 2\}$; $D = \{-1, 1, 2, 3, 4\}$; e) $E = \mathbb{N}^*$; f) $F = \left(\frac{-\sqrt{2}-1}{2}, \frac{\sqrt{2}-1}{2}\right) \setminus \{0\}$. **13.** $|1 + y| = 0$ implică $y = -1$. Înlocuind obținem $|x + 1| \leq 2$ cu $x \in \mathbb{Z}$, deci $x \in \{-3, -2, -1, 0, 1\}$. Astfel $(x, y) \in \{(-3, -1), (-2, -1), (-1, -1), (0, -1), (1, -1)\}$. **14.** a) $A = \left(-2, \frac{3}{2}\right)$, A este mulțime infinită; b) $B = \{-1, 0, 1\}$, $\text{card } B = 3$. **15.** a) $x = -1$; b) $x = 2$; c) $x = -1$; d) $x = 1$. **16.** $m \in [-1, 11]$. **17.** $n = 6$. **18.** După 5 luni, înălțimea copacului este $5 \cdot \left(\frac{104}{100}\right)^5 = 5 \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^5 > 6$. **19.** 18 g sare.

2. Test de evaluare

I. 1. A. **2.** C. **3.** D. **4.** C. **5.** C. **6.** C. **II. 1.** a) $[-7, -6) \cup (2, 3]$; b) $-7 + 3 = -4$. **2.** a) Da, deoarece pentru $y = 600$, $3x \leq y$ și $y + x \geq 400$; b) 300 de broaște.

Unitatea de învățare 2. CALCUL ALGEBRIC ÎN $\mathbb{R}$

Lección 1. Operații cu numere reale reprezentate prin litere

2. b și d. 3. a) $2x^2$; b) $\frac{5a}{3}$; c) 0; d) $-0,1a^3$; e) $-\frac{x}{6}$; f) $\sqrt{3}x^3$;
 g) $-ab$; h) $-x^2y$. 4. a) $1 - 2x$; b) $6a + 3b$; c) $4x^2 - 3x + 1$;
 d) $-2a + 3b - 3c$; e) $6x - 2y$; f) $x - y$; g) -1 ; h) $-x^3 - x^2$.
 5. a) $-4x + 15$; b) $5a^2 - 5a - 3$. 6. $a < b < c$; $b - a + c = -4x^2 + 10x + 20$. 7. a) 6; b) $E(1-\sqrt{2}) = 15 - E(\sqrt{2}) = 9 - 3\sqrt{2}$. 8. a) x^8 ; b) $12x^3$; c) $-10x^5$; d) $2x^2y$. 9. a) $-6x^3y^3z$;
 b) $-\sqrt{6}x^2y$; c) $10x^6$; d) $-24x^3y^3z^4$. 10. a) $5x + 5$; b) $x^2 - 6x$;
 c) $-a^2 - 3ab$; d) $6x^3 - 15x^2$; e) $6x^3y^3 - 4x^2y^2$; f) $2\sqrt{3}a^2b - 4ab^2$. 11. a) $x^2 + 4x + 3$; b) $-2x^2 + 9x + 5$; c) $x^3 + 8$;
 d) $2x^2 + xy - 6y^2$; e) $a^2 - b^2 - a + b$; f) $x^2 + y^2 - 2xy - z^2$.
 12. a) x^2 ; b) $-4a^3$; c) $\frac{2}{3}xy$; d) $-2x + 3y$. 13. a) $x - 7$;
 b) $-x + 14$; c) $-2x$; d) $4x - 1$. 14. a) $25x^4$; b) $4x^4$;
 c) $-\frac{1}{8}a^6b^3$; d) $\frac{1}{4}x^{12}y^8z^4$. 15. b) $n \in \{0, 1\}$. 16. b) $n \in \{-2, 2\}$. 17. a) $3 + 2x$; b) $12 + 3nx$.

Autoevaluare

1. a) F; b) A; c) A. 2. a) $\rightarrow 3$; b) $\rightarrow 4$; c) $\rightarrow 2$; d) $\rightarrow 1$.
 3. $k = 1$.

Lección 2. Formule de calcul prescurtat

1. a) $x^2 - 9$; b) $25 - x^2$; c) $4x^2 - 49$; d) $x^2 - \frac{1}{16}$; e) $2x^2 - y^2$;
 f) $x^2y^4 - z^2$. 2. a) $x^2 + 4x + 4$; b) $x^2 + 6x + 9$; c) $49x^2 + 14x + 1$;
 d) $x^4 + 10x^3 + 25x^2$; e) $x^6 + x^3 + \frac{1}{4}$; f) $5x^2 + 6\sqrt{5}xy + 9y^2$.
 3. a) $x^2 - 6x + 9$; b) $25 - 10x + x^2$; c) $9x^2 - 24x + 16$;
 d) $x^4 - 2x^3 + x^2$; e) $x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}$; f) $16x^2 - 4xy + 0,25y^2$.
 4. a) 16; b) $x^2 + 4$; c) $x - 3$. 5. a) $x^2 + 1$; b) 9; c) x^4 . 6. a) da;
 b) da; c) da; d) da; e) nu; f) da. 7. a) 9991; b) 10; c) 40401.
 8. a) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$; b) $\sqrt{7} - \sqrt{5}$; c) $\sqrt{11} + \sqrt{10}$; d) $\sqrt{7} + \sqrt{5}$;
 e) $3 + 2\sqrt{2}$; f) $\sqrt{7} + 2$. 9. a) -4 ; b) $\sqrt{5}$; c) 1; d) 1. 10. a) 0;
 b) $\frac{4 - \sqrt{5}}{2}$. 11. $3\sqrt{2}$. 12. $x \cdot y = 2$; $x - y = 1$. 13. $x = 2$.
 14. A. 15. 1. 16. b) 225; 625; 5625; 9025. 17. $A = B$.
 18. $11x^2 + 6 \geq 6$.

Autoevaluare

1. a) A; b) F; c) A. 2. a) $\rightarrow 2$; b) $\rightarrow 5$; c) $\rightarrow 3$; d) $\rightarrow 4$.
 3. Se obține $b^2 + c^2 = a^2$, deci triunghiul este dreptunghic.

Lección 3. Descompuneri în factori utilizând reguli de calcul în $\mathbb{R}$

1. a) $x^3(x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7})$; b) $6x(2y + 3x)$; c) $(x + 2)(a + x + 2)$. 2. a) $x(a + 10)$; b) $x(5x + 6)$; c) $3x(3y - z)$; d) $a(x - y + z)$;
 e) $2x(2y - 3z + 5x)$; f) $6xy(2x + 3y)$. 3. a) $(y + z)(x + 3)$; b) $(x - 2)(x - 5)$; c) $(x + 10)^2$; d) $(x - 5)(x - y + 1)$;
 e) $x(x + 1)^2$; f) $(a + 1)(2x + 1)$. 4. a) $(a - b)(x - 3)$; b) $(x - 7)(x - 9)$;
 c) $(x - 3)(x^2 + 5)$. 5. $x = -5$, $a = -8$. 6. 1. 7. a) $(x - 11)(x + 11)$;
 b) $(x - 5)(x + 5)$; c) $(2 - x)(2 + x)$; d) $(7 - x)(7 + x)$; e) $(x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7})$; f) $(x\sqrt{5} - 1)(x\sqrt{5} + 1)$.
 8. a) $(x - a)(x + a)$; b) $(2x - 3y)(2x + 3y)$; c) $(5xy - z)(5xy + z)$;

- d) $(a + b - c)(a + b + c)$; e) $(a - 1)(a + 5)$; f) $(a - 1)(a + 1) \cdot (a^2 + 1)$. 9. a). 10. a și c. 11. 1. 12. $(x, y) \in \{(2, 1); (2, -1); (-2, 1); (-2, -1)\}$. 13. a) $(x + 1)^2$; b) $(x + \sqrt{7})^2$; c) $(x - 2\sqrt{3})^2$;
 d) $(x - 3)^2$; e) $(7x + 1)^2$; f) $(x - 4y)^2$. 14. a) 25; b) $22x$; c) x^2 ;
 d) $14x$; e) $\frac{1}{4}$; f) $4x^4$ sau $4x$. 15. a) $(x + y + 1)^2$; b) $(x + 3)^2$;
 c) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$; d) $(x + 1)^2$; e) 4; f) 1. 16. $A = (7a + 2b - 3)^2 \geq 0$.
 17. $x = 0$, $y = 4$. 18. $A = \sqrt{5}$. 19. b) $(\sqrt{6} + 1)^2$; c) $(\sqrt{2} - 1)^2$.
 20. b) $3 + \sqrt{2}$; c) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$. 21. a) $(x^2 + a) \cdot (x + 1)$; b) $(x + 1)(mx^2 + a)$; c) $(x^2 + 7)(x + 1)$; d) $(x + 1) \cdot (x - 3)(x + 3)$;
 e) $(x - 1)^2(x + 1)$; f) $(x^2 + 1)(2x - 1)$. 22. a) $(x + 7)(x + 2)$; b) $(x - 5)(x - 3)$; c) $(x + 1)(x + 6)$;
 d) $(x - 5)(x + 3)$; e) $(x - 1)(x + 2)$; f) $(x^2 + 1)(x - 2)(x + 2)$. 23. a) $(x + 1)(x + 4)$;
 b) $(x + 2)(x + 5)$; c) $(x - 2)(x - 4)$; d) $(x - 2)(x + 5)$; e) $(x - 4)(x + 3)$;
 f) $(x^2 + 9)(x - 1)(x + 1)$. 24. a) $x + 3$; b) $x - a$; c) $x + 2 - y$; d) $x - y + 2$. 25. $6 \in \mathbb{N}$.
 26. $a = b$. 27. 4. 28. $(x - 2)(x + 6) = 0 \Rightarrow x_1 = 2$ și $x_2 = -6$. 29. $n \in \{-8, 0\}$.
 30. $a = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$.

Autoevaluare

1. a) F; b) A; c) A. 2. i) c; ii) b; iii) b. 3. $n = 2$.

Lección 4. Frații algebrice

1. a) $x = 7$; b) $x = \frac{-5}{2}$; c) $x \in \{-3, 3\}$; d) $x \in \{-1, 0\}$. 2. $x \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$;
 b) $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$; c) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$; d) $x \in \mathbb{R}$. 3. a) $m = 3$; b) $m = 1$. 4. a) 3; b) -1 ; c) $1 + \sqrt{2}$. 5. $a = 5$.
 6. a) $\frac{3x - 3}{3x + 6}$; b) $\frac{x^3 - x^2}{x^3 + 2x^2}$; c) $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}$; d) $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$.
 7. a) $\frac{2x}{5x}$; $\frac{5}{5x}$; b) $\frac{x^2 + x}{x^2}$; $\frac{3}{x^2}$; c) $\frac{3x - 6}{6x}$; $\frac{2x + 2}{6x}$;
 d) $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2(x + 1)^2}$; $\frac{3x^2 - 5x}{x^2(x + 1)^2}$; e) $\frac{x - 3}{(x + 2)^2}$; $\frac{2x^2 + 11x + 14}{(x + 2)^2}$;
 f) $\frac{x + 3}{x^2 - 9}$; $\frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 9}$. 8. a) $\frac{(x + 1)(x - 3)}{(x + 2)(x + 3)(x - 3)}$ și
 $\frac{(2x - 1)(x + 2)}{(x + 2)(x + 3)(x - 3)}$; b) $\frac{2x + 2}{2(x + 1)(x - 1)^2}$, $\frac{2(x - 1)(x + 3)}{2(x + 1)(x - 1)^2}$
 și $\frac{(x - 2)(x - 1)^2}{2(x + 1)(x - 1)^2}$. 9. a) $\frac{3x + 5}{x}$; b) $\frac{2}{x}$; c) $\frac{x}{x + 1}$; d) $\frac{x + 3}{x + 4}$.
 10. a) $\frac{3}{x + 5}$; b) $\frac{x + 1}{x - 1}$; c) $\frac{x}{x - 2}$; d) $\frac{x + 2}{x - 4}$; e) $\frac{x + 1}{5}$;
 f) $\frac{x + 2}{x + 1}$. 11. a) $\frac{x}{x + 1}$ și $\frac{2x}{x + 1}$; b) $\frac{x}{x + 3}$, $\frac{x^2 - 1}{x + 3}$ și $\frac{x + 2}{x + 3}$.
 12. $F(a) = a - 2 \in \mathbb{Z}$. 13. $a \in \{-2, 0, 2\}$. 14. $F(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$;
 valoarea maximă este 1.

Autoevaluare

1. a) F; b) A; c) A. 2. i) b; ii) b; iii) c. 3. $a \in \{-2, 0, 1\}$.

Lección 5. Operații cu fracții algebrice

1. a) $\frac{x + 3}{x + 1}$; b) $\frac{x + 4}{x + 2}$; c) $\frac{2x + 7}{x - 3}$; d) $\frac{3}{x}$; e) $\frac{x + 9}{x^2 - 5x}$;

- f) -1 . **2.** a) $\frac{-x}{4}$; b) $\frac{x-2}{3x}$; c) $\frac{5x-3}{2x+2}$; d) $\frac{1}{x+1}$; e) $\frac{x}{x-1}$;
f) $\frac{2}{x^2-4}$. **3.** a) $\frac{x+4}{x^2-3x}$; b) $\frac{x-5}{(x+1)(x+3)}$. **4.** a) $\frac{3}{x}$; b) $\frac{x}{3x-6}$;
c) $\frac{x^2-x}{x+5}$; d) $\frac{x}{x+2}$; e) $\frac{5x}{2x+4}$; f) $\frac{x+1}{x}$. **5.** a) $\frac{1}{x+2}$;
b) $\frac{3}{x-4}$; c) $\frac{2x^3}{5(x+3)^2}$; d) $\frac{x-1}{x-2}$. **6.** a) $3x-3$; b) $2x-3$;
c) $\frac{2x}{x+1}$; d) $\frac{x}{3x+1}$. **7.** a) 1 ; b) $\frac{x-1}{3}$; c) $\frac{x}{x+3}$. **8.** a) 2 ;
b) $a \in \{-3; -2; 0\}$. **9.** b) $\frac{3}{4}$. **10.** a) $\frac{4}{x}$; b) $16 = 4^2$. **11.** b) $n \in \{0; 1; 3; 4\}$. **12.** a) $E(t) = 2t$; b) 2 . **13.** a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 0, 2\}$; b) $E(x) = 1$. **14.** a) $S(x) = \frac{2x^2+3}{2(x-1)}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$;
b) $D(x) = \frac{2x^2-3}{2(x-1)}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$; c) $P(x) = \frac{3x^2}{2(x-1)^2}$; $x \in \{0, 1\}$; d) $C(x) = \frac{2x^2}{3}$; $C_{\min} = \frac{2}{3}$, pentru $n = -1$.

Autoevaluare

- 1.** a) F; b) F; c) A. **2.** a) $\rightarrow 4$; b) $\rightarrow 3$; c) $\rightarrow 2$; d) $\rightarrow 5$.
3. $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Lecția 6. Ecuații de forma $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$

- 2.** a) $x \in \{0; 6\}$; b) $x \in \{-2; 0\}$; c) $x \in \left\{0; \frac{1}{3}\right\}$; d) $x \in \{-7;$
 $7\}$; e) $x \in \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$; f) $x \in \emptyset$. **3.** b) $S = \{-2; 8\}$; c) $S = \{-3;$
 $-1\}$. **4.** a) $x \in \{-6; -1\}$; b) $x \in \{2; 4\}$; c) $x \in \{-1; 3\}$; d) $x \in \left\{\frac{1}{2}; 3\right\}$;
e) $x \in \left\{-3; -\frac{1}{3}\right\}$; f) $x \in \left\{-1; \frac{1}{6}\right\}$. **5.** a) $x \in \{1; 2\}$;
b) $x = \frac{1}{2}$; c) $x \notin \mathbb{R}$; d) $x \in \left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$; e) $x \in \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$;
f) $x \in \{\sqrt{3}-\sqrt{2}; \sqrt{3}+\sqrt{2}\}$. **6.** a) $S = \{-2; 1\}$; b) $S = \{-2; 3\}$;
c) $S = \{-3; 5\}$; d) $S = \left\{-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right\}$; e) $S = \left\{\frac{2}{3}; 1\right\}$; f) $\{1; 3\}$. **7.** a) $x \in \{-3; 1\}$; b) $x \in \{-6; 4\}$;
c) $\left\{\frac{1}{2}; 1\right\}$; d) $x \in \{-2; 2\}$; e) $x \in \{-1; 7\}$; f) $x = -3$. **8.** $x \in \mathbb{R} \setminus \{-6; 1\}$.
9. a) $(x+2)(x+6)$; b) $(x-10)(x+1)$; c) $(x-4)(x+3)$; d) $(x+1)(9x-4)$; e) $(x-2)(2x-1)$;
f) $\left(x + \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$. **10.** $m = -14$; b) $m = 1$.
11. $a = 1$; $b = -6$. **12.** $m = -1$; $n = -5$. **13.** $m \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
14. $\Delta = 1 > 0$. **15.** F. **16.** 5 și -4 . **17.** 1 și -2 . **18.** 10. **19.** $\mathcal{P} = 24$ cm. **20.** 24 cm. **21.** $BC = 8$ cm.

Autoevaluare

- 1.** a) A; b) F; c) A. **2.** a) $\rightarrow 4$; b) $\rightarrow 5$; c) $\rightarrow 3$; d) $\rightarrow 2$.
3. $n = 7$.

RECAPITULARE ȘI EVALUARE

1. Probleme recapitulative

- 1.** a) $5x - 7y + 7$; b) $x^2 - x + 9$; c) 1; d) -3 . **2.** a) $x \in [2, \infty)$;
b) $x \in \{-2, 0\}$. **3.** 7. **4.** $E(x) = x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 \geq 1 = E(-1)$, deci $E_{\min} = 1$. **5.** a) 6; b) $7 - 4\sqrt{2}$; c) $\frac{1}{2}$. **6.** $a = 1$;
 $b = -3$. **7.** a) $xy(z - 2x)$; b) $(x - 7)(x + 7)$; c) $(x + 1)(x + 4)$;
d) $(x - 1)(2x - 5)$; e) $(x - 1)^2(x + 1)^2$; f) $(x + 1)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$.
8. A. **9.** $E(x) = (x + 1)(x + 3)$; $E(2k + 1) = 4(k + 1)(k + 2) : 8$, deoarece unul dintre numerele $k + 1$ și $k + 2$ este par.
10. $A = 4 \cdot \overline{ab} \cdot (\overline{ab} + 1) + 1 = (2 \cdot \overline{ab} + 1)^2$. **11.** a) $\frac{x}{x-y}$;
b) $\frac{x+2}{x-2}$; c) $\frac{x-5}{x+4}$; d) $\frac{x+1}{3x+1}$. **12.** a) 3; b) $\frac{x+3}{x-3}$; c) $\frac{x+2}{x-2}$;
d) $\frac{x}{2}$; e) $\frac{2x+2}{x-1}$. **13.** a) $S = \left\{-\frac{2}{3}; 2\right\}$; b) $S = \{2\}$; c) $S = \{1\}$.
14. $x = 4$. **15.** $E(x) = \frac{x-1}{x+3}$; $E(\sqrt{5}) \cdot E(-\sqrt{5}) = -1$.

2. Test de evaluare

- I.** 1. 3. **2.** $\sqrt{2}$. **3.** $\frac{x}{x+1}$. **4.** 0. **II.** 1) $\rightarrow$ d); 2) $\rightarrow$ c); 3) $\rightarrow$ e);
4) $\rightarrow$ a). **III.** 1. C. **2.** B. **3.** C. **4.** B. **IV.** b) 110; c) $a = 2$.
V. a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1; 2\}$; c) $x \in \emptyset$.

Unitatea de învățare 3. FUNCȚII

Lecția 1. Funcții. Funcții definite pe mulțimi finite.

Funcții numerice

- 1.** a) Da; b) Nu; c) Da; d) Nu. **2.** Cele trei mulțimi cerute, în ordinea din enunț, sunt: a) $\{\triangle, \square, \diamond\}$, $\{\triangle, \square, \diamond\}$, $\{\triangle, \square, \diamond\}$; b) $\{a, b, c\}$, $\{d, e\}$, $\{e\}$; c) $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{5, 6, 7\}$, $\{5, 6\}$.
3. a) Domeniul este $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$, iar codomeniul o mulțime care include $\{0, 1, 2\}$; b) Domeniul este $\{0, 1, 2, 3\}$, iar codomeniul o mulțime care include $\{-1, 1\}$.
4. a) $f(x) = |x|$; b) $f(x) = (-1)^{x+1}$. **5.** a) $B = \{0, 1, 4\}$; b) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. **6.** a) $\mathbb{R} \setminus \{2\}$; b) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$; c) $(-\infty, 1]$.
7. a) -8 ; b) $\{-2, 0, 2, 4, 6\}$. **8.** a) $f(\sqrt{3}-1) = 3\sqrt{3} - 5$, iar $f\left(\sqrt{3} + \frac{7}{3}\right) = 3\sqrt{3} + 5$; atunci $m_a = 3\sqrt{3}$, iar $m_g = \sqrt{2}$;
b) $S = 3(1 + 2 + \dots + 10) - 10 \cdot 2 = 145$; c) $f\left(\frac{2}{3}\right) = 0$, deci $P = 0$. **9.** Din $-2 \leq 5x - 3 < 2$ obținem $x \in \left[\frac{1}{5}, 1\right)$.
10. a) $f(-2) = -3$, $f(0) = -1$, $f(1) = 2$, $f(\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}-2$, $f(\sqrt{2}+1) = \sqrt{2}+2$; b) Dacă $x < 1$, atunci $f(x) \in (-\infty, 0)$, iar dacă $x \geq 1$, atunci $f(x) \in [2, \infty)$, așadar $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
11. a) $f(x) = 3x - 4$; b) $f(x) = \frac{2}{3}x + 3$. **12.** $f: [0, 120] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = 2t$, unde $f(t)$ reprezintă abscisa punctului în care se află furnica la momentul t .

Autoevaluare

- 1.** a) F; b) A; c) F. **2.** a) $\rightarrow 4$; b) $\rightarrow 2$; c) $\rightarrow 1$. **3.** $\mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$.

Lecția 2. Graficul unei funcții. Reprezentarea geometrică a graficului unei funcții numerice

1. a) $G_f = \{(-1, -2); (0, 0); (1, 2)\}$; b) $G_f = \{(0, 1); (1, -1); (2, 1)\}$;
c) $G_f = \{(0, 0); (2, 0); (4, 8)\}$; d) $G_f = \left\{(1, 0); \left(3, \frac{1}{2}\right); \left(5, \frac{2}{3}\right)\right\}$.

3. $G_f = \{(1, 1); (2, 3); (3, 4); (4, 7); (5, 6)\}$. 4. a) Domeniul de definiție este $\{-2, -1, 0, 1\}$, iar mulțimea valorilor este $\{0, 1, 2, 3\}$. 5. Nu; elementului -1 îi corespund două valori. 6. Aparțin G_f punctele A, C și D . 7. Aparțin G_f punctele B și F . 8. a) $f(1) = 2 \Rightarrow a = 3$; b) $f(a) = a + 1 \Rightarrow a \in \{-1, 2\}$. 9. a) $f(-1) = -2$ și $f(2) = 4$, de unde $a - b = 3$ și $2a + b = 0$; obținem $a = 1, b = -2$. 10. a) $x = \{-4, -3, 1, 5\}$; b) $x = \{-2, 2, 3, 4\}$; c) $x = \{-5, -1, 0\}$. 11. $A \in Oy \Leftrightarrow A(0, a), a \in \mathbb{R}$; $A \in G_f \Leftrightarrow f(0) = a$; $f(0) = 1 \Rightarrow A(0, 1)$;
b) $f(0) = 6 \Rightarrow A(0, 6)$. 12. $B \in Ox \Leftrightarrow B(b, 0), b \in \mathbb{R}$; $B \in G_f \Leftrightarrow f(b) = 0$; a) $b = -1 \Rightarrow B(-1, 0)$; b) $b \in \{2, 3\}$, deci găsim două puncte: $B_1(2, 0)$ și $B_2(3, 0)$. 13. a) $A(1, 1)$; b) $A(2, 4)$; c) $A(-2, -8)$; d) $|x_A| = |y_A| \Leftrightarrow y_A = \pm x_A \Leftrightarrow f(x_A) = \pm x_A$; obținem $x_A = \left\{1, \frac{1}{2}\right\}$, deci $A(1, 1)$ sau $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

14. Căutăm $A(x_A, y_A)$, astfel încât $f(x_A) = y_A$ și $g(x_A) = y_A$. Din $f(x_A) = g(x_A)$ obținem unica soluție $x_A = 1$, așadar $A(1, 1)$ este unicul punct care aparține atât G_f , cât și G_g .

15. $A \in G_f \Leftrightarrow f(x_A) = y_A \Leftrightarrow x_A \sqrt{2} + 2 - 2\sqrt{2} = y_A \Leftrightarrow (x_A - 2)\sqrt{2} = y_A - 2$. Cum $x_A - 2, y_A - 2 \in \mathbb{Q}$ și $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, deducem că $x_A - 2 = y_A - 2 = 0$, așadar $A(2, 2)$.

Autoevaluare

1. a) F; b) F; c) A. 2. a) $\rightarrow 3$; b) $\rightarrow 1$; c) $\rightarrow 5$; d) $\rightarrow 2$.
3. $\{a, b\} = \{-2, 2\}$; putem considera că $A(-2, 4)$ și $B(2, 4)$.
Atunci $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = 4$.

Lecția 3. Funcții de forma $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$ și $\mathcal{D}$ este o mulțime finită de numere reale sau un interval nedegenerat

5. a) $f(x) = x + 1$; b) $f(x) = -x - 2$; c) $f(x) = 2x + 5$; d) $f(x) = -\frac{x}{3} + 1$. 6. a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 2$; b) $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$,

$f(x) = -\frac{3}{2}x + 3$; c) $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x$. 7. a) Deoarece

G_f este dreapta AB , rezultă că există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$. Din $f(1) = 1$ și $f(-1) = -5$ rezultă că $f(x) = 3x - 2$; b) Întrucât $f(4) = 10$, rezultă că $C \in G_f$, deci punctele A, B și C sunt coliniare. 8. a) Cele trei puncte se află pe graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$, deci sunt coliniare; b) Punctele A și B aparțin graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2x + 5$, dar $C \notin G_f$, deci A, B, C nu sunt coliniare. 9. a) $G_f = AB$, pentru $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x + 5$. Impunem condiția $C \in G_f$ și obținem $m = 2$; b) $G_f = AB$, pentru $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{2}x + 1$. Din condiția $C \in G_f$ deducem că $m = 2$.

10. a) $A(4, 0), B(0, -2), \mathcal{A}_{OAB} = 6 + 2\sqrt{5}$ și $\mathcal{A}_{\Delta OAB} = 4$.

11. Avem $G_f \cap Ox = \{A(2, 0)\}, G_f \cap Oy = \{B(0, 1)\}$. Atunci $d(O, G_f) = d(O, AB) = \frac{OA \cdot OB}{AB} = \frac{2}{\sqrt{5}}$. 12. Avem $G_f \cap Ox =$

$\{A(-4, 0)\}, G_f \cap Oy = \{B(0, 4)\}$. Dacă $CM \perp AB, M \in AB$, atunci $d(C, AB) = CM$. Exprimând $\mathcal{A}_{\Delta ABC}$ în două moduri sau din $\Delta BCM \sim \Delta BAO$, deducem că $CM = \sqrt{2}$. 13. Avem

$G_f \cap Ox = \{A(\sqrt{3}, 0)\}, G_f \cap Oy = \{B(0, 3)\}, M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$;

ΔOAM este echilateral. 14. a) $a = 4, b = -3$, deci $A'(0, 4)$ și $B'(-3, 0)$; b) $G_f \cap Oy = \{M(0, 5)\}, G_f \cap Ox = \{N(-5, 0)\}$;

$\mathcal{A}_{OA'BB'} = \mathcal{A}_{\Delta OMN} - \mathcal{A}_{\Delta MAA'} - \mathcal{A}_{\Delta NBB'} = \frac{5 \cdot 5}{2} - \frac{1 \cdot 1}{2} - \frac{2 \cdot 2}{2} = 10$.

15. a) $G_f \cap Ox = \{A(2, 0)\}, G_g \cap Ox = \left\{B\left(-\frac{1}{2}, 0\right)\right\}$; b) $G_f \cap$

$G_g = \{P(x_P, y_P)\}$. Din condițiile $f(x_P) = y_P$ și $g(x_P) = y_P$, obținem $P(-3, -5)$. Atunci $\mathcal{A}_{\Delta PAB} = \frac{AB \cdot d(P, AB)}{2} = \frac{25}{4}$.

16. a) Presupunem prin absurd că există $P(x_P, y_P) \in G_f \cap G_g$. Obținem $2x_P + 2 = 5 + 2x_P$, care nu are soluție, deci nu există puncte comune celor două grafice; b) Graficele celor două funcții sunt drepte paralele.

17. a) $A(3, 0), B(0, 3), C(1, 0), D(0, -1)$ și $P(2, 1)$; b) Fiecare dintre triunghiurile AOB, DOC și PAC este dreptunghic isoscel; c) Dreptele AB și CD sunt perpendiculare.

18. a) $f(x) = 20(x - 9), g(x) = \begin{cases} 100, & x \in [9, 10] \\ 350 - 25x, & x \in [10, 14] \end{cases}$;

c) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = 11, (7)$. Ora aproximativă a întâlnirii este 11:47.

Autoevaluare

1. a) A; b) F; c) F. 2. i) $\rightarrow$ c); ii) $\rightarrow$ b) iii) $\rightarrow$ a). 3. Fie $M(x, x + 1) \in G_f$. Atunci $OM = 5$ implică $x^2 + x - 12 = 0$. Punctele sunt $M_1(3, 4)$ și $M_2(-4, -3)$.

Lecția 4. Elemente de statistică: indicatorii tendinței centrale a unei serii de date statistice

1. a) Media este 10,4, mediana este 10, iar modul este 10; b) Media este 5, mediana este 5,5, iar modul este 7.

2. b) 12,5°C; c) Ambele sunt 12°C, deci sunt egale.

3. b) Media este 12,5 (ani), mediana este 13 (ani), iar modul este 14 (ani). 4. $x = 8$, deci mediana este 6,5, iar modul este 8.

5. Da; dacă ia nota 10, media seriei devine 8,50, care se rotunjește în catalog la 9. 6. Da; eliminăm o valoare 7. 7. a) Trebuie adăugată valoarea 111; b) Mediana și modul seriei inițiale, ambele egale cu 7, nu se modifică. 8. a) $x = 8, y = 11$ sau invers; b) $(x, y) \in \{(7, 15); (15, 7); (6, 16); (16, 6)\}$. 9. a) Media = 43, mediana = 40, modul = 30. 10. Clasa a VIII-a A: media = 7,76, mediana = 8, serie bimodală cu valori dominante 8 și 9; Clasa a VIII-a B: media = 7,88, mediana = 8, modul = 9; Clasa a VIII-a C: media = 7,93, mediana = 8, modul = 8.

Autoevaluare

1. a) F; b) A; c) A. 2. a) $\rightarrow 2$; b) $\rightarrow 4$; c) $\rightarrow 1$. 3. $x = 2$.

RECAPITULARE ȘI EVALUARE

1. Probleme recapitulative

1. $f(1) = 3$; sunt 4 funcții. 2. Domeniul = $\{-3, -2, -1, 0, 5\}$; mulțimea valorilor = $\{1, 2, 4\}$. 3. a) De exemplu, $f(\sqrt{2}) = 2$; b) $f(a), f(a + 1)$ și $f(a + 2)$ sunt fracții subunitare, deci $f(a) + f(a + 1) + f(a + 2) < 3$. 4. Deoarece $f(0) = g(0)$,

rezultă că $m = 1$. În acest caz, $f(x) = g(x)$, pentru orice $x \in \{-1, 0, 1\}$, iar afirmația este adevărată. **5.** a) $x \in [4, \infty)$; b) $a = 3 + \sqrt{5}$, $b = 3 - \sqrt{5}$ și media geometrică este egală cu 2. **6.** a) $G_f \cap Ox = \{A(2, 0)\}$ și $G_f \cap Oy = \{B(0, 4)\}$, $\mathcal{A}_{\triangle AOB} = \frac{OA \cdot OB}{2} = 4$; b) $d(O, G_f) = \frac{OA \cdot OB}{AB} = \frac{4}{\sqrt{5}}$, deci $OM \geq \frac{4}{\sqrt{5}}$ pentru orice punct $M \in G_f$. **7.** a) $G_f \cap Oy = \{A(0, 1)\}$, $G_f \cap Ox = \left\{B\left(-\frac{1}{2}, 0\right)\right\}$. Se verifică $MB^2 = MA^2 + AB^2$, așadar distanța cerută este $MA = \sqrt{5}$; b) $\sqrt{f(0) + f(1) + \dots + f(10)} = \sqrt{1 + 3 + \dots + 21} = 11$. **8.** a) $f(-1) = y_P$, deci $P(-1, -2)$; b) $f(x_P) = 0$, deci $P(2, 0)$; c) $f(x_P) = y_P$, deci $P(-4, -4)$. **9.** Din $f(x - 1) \leq x$ deducem că $f(x) \leq x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Totodată $f(x) \geq 1 + x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, astfel că $f(x) = 1 + x$. **10.** a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{2} - 5$; b) $f: [-4, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{2} + 1$. **11.** a) Se obține $f(x) = -x + 3$ și $g(x) = x + 1$ și verificarea este imediată; b) Dacă $G_f \cap Ox = \{B(3, 0)\}$, iar $G_g \cap Ox = \{C(-1, 0)\}$, atunci $\mathcal{A}_{\triangle ABC} = 4$. **12.** a) Pentru $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{x}{2} + 1$, punctele M, N și P se află pe G_f , deci sunt coliniare; b) A, B, C nu sunt puncte coliniare. **13.** Media = 9, mediana = 9, amplitudinea = 6. **14.** a) 128 de lei; b) $p(n) = 40 + 8n$; c) $140 < 40 + 8n < 150$, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n = 13$.

2. Test de evaluare

I. 1. $\{0, 2\}$. **2.** 0. **3.** 4. **4.** C. **II.** 1) $\rightarrow$ e); 2) $\rightarrow$ c); 3) $\rightarrow$ a); 4) $\rightarrow$ d). **III.** 1. C. 2. B. 3. A. 4. C. **IV.** a) $\frac{f(u) - f(v)}{u - v} = 3$; b) $G_f \cap Ox = \{A(2, 0)\}$ și $G_f \cap Oy = \{B(0, -6)\}$, deci $\mathcal{A}_{\triangle AOB} = 6$; c) Simetricul este $Q(m, -3)$ și din $f(m) = -3$ obținem $m = 1$. **V.** a) $f(0) = 3$ și $f(\sqrt{3}) = 0$, deci $n = 3$ și $m = -\sqrt{3}$; b) În $\triangle AOB$, $AB = 2\sqrt{3}$, deci $\angle BAO = 30^\circ$; c) $f(a) = b\sqrt{12} - a$, deci $\sqrt{3}(2b + a) - (a + 3) = 0$ și cum $a, b \in \mathbb{Q}$, deducem că $a = -3$ și $b = \frac{3}{2}$.

Unitatea de învățare 4. ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAȚIU

Leția 1. Puncte, drepte, plane: convenții de notare, reprezentări, determinarea dreptei, determinarea planului, relații între puncte, drepte și plane

1. a) $AC = 5$ cm, $AD = 13$ cm, $BD = 3\sqrt{17}$ cm; b) $BC^2 + CD^2 = BD^2 \Rightarrow \angle BCD = 90^\circ$. **2.** a) BM ; b) BD . **3.** a) Dreapta AB are două puncte diferite comune cu planul α , deci $AB \subset \alpha$. Deoarece $C \notin \alpha$, dreapta AC nu este inclusă în planul α ; b) Dacă A, B, C ar fi coliniare, atunci $C \in AB \subset \alpha$, deci $C \in \alpha$, fals. **4.** Din $A \in a \subset (a, b)$ și $B \in b \subset (a, b)$, rezultă că dreapta AB are două puncte diferite comune cu planul (a, b) . **5.** a) $A \in a \subset (a, b)$ și $B \in b \subset (a, b) \Rightarrow AB \subset (a, b)$; b) PO ; c) AB . **6.** Propoziția este falsă, căci patru puncte, dintre care trei sunt coliniare, sunt întotdeauna coplanare. **7.** a) $F \in OE \subset (ACE)$;

b) Cum $AO = OC$, $EO = OF$ și punctele A, F, C, E sunt coplanare, rezultă că $AFCE$ este paralelogram, deci $AF \parallel CE$; c) $(ABC) \cap (CEF) = (ABCD) \cap (AFCE) = AC$.

Autoevaluare

1. c). **2. a)** (alegând punctele B, C, D coliniare). **3. b).** **4. b).** **5.** Dreapta comună este AG , unde G este intersecția medianelor triunghiului BCD .

Leția 2. Corpuri geometrice: piramida, piramida regulată, tetraedrul regulat; reprezentare, elemente caracteristice, desfășurări

1. Piramida triunghiulară: $v = 4$, $f = 4$, $m = 6$; piramida patrulateră: $v = 5$, $f = 5$, $m = 8$; piramida pentagonală: $v = 6$, $f = 6$, $m = 10$; piramida hexagonală: $v = 7$, $f = 7$, $m = 12$. Pentru orice piramidă, avem $v + f - m = 2$.

2. 45 cm. **3.** 180° . **4.** $12\sqrt{3}$ cm; $12\sqrt{3}$ cm². **5.** Pătrat.

6. a) $ABCD$ este pătrat, deci $BD = AB\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ cm; din $VB^2 + VD^2 = BD^2$ rezultă $VB \perp VD$; b) $(ABD) \cap (VBC) = (ABCD) \cap (VBC) = BC$. **7.** $\sqrt{3}$ cm². **8.** Cum OM este linie mijlocie în triunghiul VBD , avem $OM \parallel VD$, deci punctele V, D, O, M sunt coplanare. **9.** a) $216\sqrt{3}$ cm²; b) 48 cm². **10.** a) Cum $BC = 1$ cm, $CD = \sqrt{2}$ cm și $BD = \sqrt{3}$ cm, rezultă că $BC^2 + CD^2 = BD^2$, deci $\angle BCD = 90^\circ$;

b) $\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ cm², $\mathcal{A}_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}$ cm², $\mathcal{A}_{\triangle ABD} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ cm²,

$\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ cm², iar suma ariilor fețelor tetraedrului $ABCD$ este $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$ cm². **11.** Avem $AB = AC = AD =$

10 cm, $AM = \sqrt{AC^2 - MC^2} = 6$ cm, $BC = 10\sqrt{2}$ cm, $BM = \sqrt{BC^2 - CM^2} = \sqrt{136}$ cm, deci $AB^2 + AM^2 = 136 = BM^2$, de unde rezultă că $AB \perp AM$. **12.** Triunghiurile MBC, NDE și PAF sunt echilaterale, deci $MB = MC = ND = NE = PA = PF = 6$ cm, de unde rezultă că $MN = NP = PM = 18$ cm, adică triunghiul MNP este echilateral. Fie $VT \perp AB$, $T \in AB$. Cum $VA = VB$, rezultă că $TA = TB = 3$ cm și $VT = \sqrt{VA^2 - TA^2} = \sqrt{91}$ cm, apoi $VP = \sqrt{VT^2 + TP^2} = 2\sqrt{43}$ cm. Analog, $VM = VN = 2\sqrt{43}$ cm. Așadar, $VMNP$ este piramidă regulată având suma muchiilor egală cu $6(9 + \sqrt{43})$ cm. **13.** Desfășurăm suprafața laterală a piramidei pe un plan. Triunghiul $V_1B_1C_1$ are $\angle B_1V_1C_1 = 60^\circ$ și $V_1B_1 = V_1C_1$, deci este echilateral. Fie $\{M_1\} = V_1A_1 \cap B_1C_1$. Avem $\min(BM + MC) = B_1M_1 + M_1C_1 = B_1C_1 = 8$ cm. **14.** Din $\triangle VPA \equiv \triangle VPC$ (LUL) rezultă că $AP = PC$, deci $AP + PC = 2AP$; valoarea minimă se obține când $AP \perp VB$. Atunci $AP = VM \cdot AB : VB = 9,6$ cm (M este mijlocul lui AB). Prin urmare, $\min(AP + PC) = 19,2$ cm.

Autoevaluare

1. b). **2. c).** **3. c).** **4.** Suprafața necesară pentru construcția tetraedrului este de minimum $8^2\sqrt{3}$ dm² = $64\sqrt{3}$ dm². Deoarece $64\sqrt{3}$ dm² > 100 dm² (suprafața colii), rezultă că nu se poate construi tetraedrul. **5.** $4\sqrt{2}$ cm (desfășurăm suprafața laterală a piramidei pe un plan).

Lecția 3. Corpuri geometrice: prisma dreaptă, paralelipipedul dreptunghic, cubul; reprezentare, elemente caracteristice, desfășurări

1. $AB = 2$ cm, $\mathcal{A}_{ABB'A'} = 4$ cm², $\mathcal{A}_{ABC} = \sqrt{3}$ cm². 2. 200 cutii.

3. Deoarece $A'B = BC = CA' = 4\sqrt{2}$ cm, rezultă că triunghiul $A'BC$ este echilateral, deci $\angle BA'C = 60^\circ$. 4. Cu teorema lui Pitagora în triunghiurile BCC' ($\angle C = 90^\circ$), $MB'C'$ ($\angle M = 90^\circ$) și $BB'M$ ($\angle B' = 90^\circ$), găsim $C'B = 10$ cm, $C'M = 3\sqrt{3}$ cm, respectiv $BM = \sqrt{73}$ cm. Cum $C'B^2 = C'M^2 + BM^2$, rezultă că $\angle BMC' = 90^\circ$. 5. a) 32 cm; b) 16 cm²; c) 32 cm². 6. 108 cm, $54\sqrt{3}$ cm². 7. a) 36 cm; b) 72 cm; c) 52 cm². 8. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiurile $A'BB'$ ($\angle A'B'B = 90^\circ$) și $C'B'B$ ($\angle C'B'B = 90^\circ$), obținem $A'B' = B'C' = 4$ cm. Cum $ABCD A'B'C'D'$ este paralelipiped dreptunghic și $A'B' = B'C' = AA' = 4$ cm, rezultă că paralelipipedul este cub. 9. a) $AB = 12$ cm, $BC = 16$ cm, $\mathcal{A}_{ABCD} = 192$ cm²; b) Fie M mijlocul lui $A'D$ și N mijlocul lui $D'C$; MN este linie mijlocie în triunghiul $AD'C$, deci $MN = AC : 2 = 10$ cm. 10. Fie $BC = a$ cm, $AB = c$ cm, $AC = b$ cm și $AA' = h$ cm. Avem $\mathcal{A}_{ABB'A'}^2 + \mathcal{A}_{ACC'A'}^2 = h^2 c^2 + h^2 b^2 = h^2 (c^2 + b^2) = h^2 a^2 = \mathcal{A}_{BCC'B'}^2$. 11. Se vopsesc trei fețe ale cubului și fețele laterale ale piramelor. Aria suprafeței vopsite este $(3 \cdot 4^2 + 8 \cdot 4^2 \sqrt{3} : 4) \text{ m}^2 = (48 + 32\sqrt{3}) \text{ m}^2 \approx 103,36 \text{ m}^2$. Sunt necesare 15504 g de vopsea, adică 15,504 kg vopsea. 12. Desfășurăm suprafața laterală a paralelipipedului pe un plan; $\min(AM + MN + NP + PA') = \sqrt{25^2 + (20 + 10 + 20 + 10)^2} \text{ m} = 65 \text{ m}$. 13. a) $CM = D'N = 3\sqrt{5}$ cm; b) În planul (ABC) , avem $AP = BC$ și $AP \parallel BC$, deci $APBC$ este paralelogram, ceea ce înseamnă că diagonalele AB și PC au același mijloc M . Așadar, punctele P, M, C sunt coliniare; c) Analog, se arată că punctele P, N, D' sunt coliniare. Punctele C, M, N, D' sunt coplanare, deoarece se află pe drepte concurente PC și PD' ; d) MN este linie mijlocie a triunghiului PCD' , deci $MN \parallel CD'$ și $MN = \frac{CD'}{2} < CD$. Cum avem și $CM = D'N$, rezultă că patrulaterul $CMND'$ este trapez isoscel; $\mathcal{A}_{CMND'} = 40,5$ cm². 14. a) Fie $AB = a$ cm și $AA' = b$ cm. Avem $AM^2 = C'M^2 = A'N^2 = BN^2$, deci triunghiurile AMC' și $A'NB$ sunt isoscele; b) Fie $\{P\} = A'B \cap AM$ și $\{Q\} = AC' \cap A'N$. Observăm că $\frac{AP}{PM} = \frac{AA'}{MB} = 2$ și $\frac{AQ}{QC'} = \frac{AA'}{NC'} = 2$, deci $\frac{AP}{PM} = \frac{AQ}{QC'} \Rightarrow PQ \parallel C'M$. Avem $(AMC') \cap (A'NB) = PQ$ și $PQ \parallel C'M$.

Autoevaluare

1. b). 2. $P_1: F; P_2: F; P_3: A; P_4: F$. 3. c). 4. $8\sqrt{3}$ cm². 5. a) $108\sqrt{2}$ cm²; b) $A'M^2 + MB^2 = (3\sqrt{6})^2 + (3\sqrt{6})^2 = (6\sqrt{3})^2 = A'B^2$, deci $A'M \perp BM$.

Lecția 4. Corpuri geometrice: cilindrul circular drept, conul circular drept; reprezentare, elemente caracteristice, desfășurări

1. 16π cm², 8π cm. 2. 12 țevi. 3. $R : G = R : 2\pi R = 1 : 2\pi < 1 : 6$ (căci $\pi > 3$). 4. $\mathcal{P} = 2 \cdot (2\pi R + G) = 20$ cm. 5. $G =$

$= 6$ cm, $2\pi R = 6$ cm, deci $R = \frac{3}{\pi}$ cm și $\mathcal{A}_{bazei} = \pi R^2 = \frac{9}{\pi}$ cm². 6. $VO = 15$ cm, $\mathcal{A}_{\Delta VAB} = VO \cdot AB : 2 = 15 \cdot 40 : 2 = 300$ cm², $\mathcal{A}_{bazei} = \pi R^2 = 400\pi$ cm². 7. a) Triunghiul VMN este isoscel cu $VM = VN = G = 13$ cm și $MN = 10$ cm, deci $\mathcal{A}_{\Delta VMN} = 10 \cdot 12 : 2 = 60$ cm²; b) $R = OM = ON = 5\sqrt{2}$ cm. 8. a) $AB = BC = CA = 6\sqrt{2}$ cm; b) $AB = R\sqrt{3}$, deci $R = 2\sqrt{6}$ cm și $\mathcal{A}_{bazei} = 24\pi$ cm². 9. Dacă $\frac{2\pi R}{G} = \pi\sqrt{2}$, rezultă că $G = R\sqrt{2}$, deci $VA^2 + VB^2 = 2G^2 = 4R^2 = AB^2$, ceea ce implică $\angle AVB = 90^\circ$. 10. a) Avem $G = 2R$ și $\frac{G^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$, deci $G = 6$ cm și $R = 3$ cm, $\mathcal{A}_{bazei} = \pi R^2 = 9\pi$ cm²; b) 180° .

Autoevaluare

1. a), b) și d). 2. 2) $\rightarrow$ c); 3) $\rightarrow$ e); 4) $\rightarrow$ a); 5) $\rightarrow$ b). 3. 9π cm², dacă generatoarea cilindrului este 8π cm sau 16π cm², dacă generatoarea este 6π cm. 4. Avem $VO \perp AB$, $VA = 6$ cm, $AO = 3\sqrt{3}$ cm, $\cos(\angle VAO) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\angle VAO = 30^\circ$. 5. a) Cum $VA = VB = VC = G = 6$ cm și $AB = BC = CA = 6$ cm, rezultă că $VABC$ este tetraedru regulat; b) $\mathcal{A}_{\Delta VAB} = 9\sqrt{3}$ cm².

Lecția 5. Paralelism: drepte paralele, unghiul a două drepte

1. a) Deoarece $ABB'A'$ și $BCC'B'$ sunt pătrate, rezultă că $AA' \parallel BB'$, respectiv $BB' \parallel CC'$, deci $AA' \parallel CC'$; b) Din relațiile $AA' \parallel CC'$ și $AA' = CC'$ deducem că $ACCA'$ este paralelogram, deci $AC \parallel A'C'$ și $\angle(AC, B'D) = \angle(A'C', B'D) = 90^\circ$. 2. a) $AD \parallel A'D'$, $A'D' \parallel B'C' \Rightarrow AD \parallel B'C' \Rightarrow \angle(AD, B'C') = 0^\circ$; b) $AA' \parallel BB' \Rightarrow \angle(AA', BC) = \angle(BB', BC) = 90^\circ$; c) $BC \parallel AD \Rightarrow \angle(AD, BC) = \angle(AD', AD) = 45^\circ$. 3. a) $AD \parallel BC \Rightarrow \angle(AD, CB') = \angle(BC, CB') = \angle BCB' = 45^\circ$; b) $AA' \parallel DD' \Rightarrow \angle(AA', DC) = \angle(DD', DC) = \angle D'DC = 90^\circ$; c) $AB \parallel D'C$, $AB = D'C \Rightarrow ABC'D'$ este paralelogram $\Rightarrow AD' \parallel BC' \Rightarrow \angle(AD', B'C) = \angle(BC', B'C) = 90^\circ$. 4. a) $BC \parallel AD \Rightarrow \angle(VA, BC) = \angle(VA, AD) = \angle VAD = 60^\circ$; b) $AB \parallel DC \Rightarrow \angle(AB, DC) = 0^\circ$; c) $VB^2 + VD^2 = AD^2 + AB^2 = BD^2 \Rightarrow \angle(VB, VD) = 90^\circ$. 5. a) $B'C' \parallel BC \Rightarrow \angle(AB, B'C') = \angle(AB, BC) = \angle ABC = 60^\circ$; b) $A'C' \parallel AC \Rightarrow \angle(AM, A'C') = \angle(AM, AC) = 30^\circ$; c) $AA' \parallel BB' \Rightarrow \angle(AA', BC) = \angle(BB', BC) = 90^\circ$; d) $B'C' \parallel BC \Rightarrow \angle(AM, B'C') = \angle(AM, BC) = 90^\circ$. 6. Cum $SA^2 + SB^2 = AB^2$, rezultă că triunghiul SAB este dreptunghic isoscel cu $\angle ASB = 90^\circ$; a) $\angle(SA, SB) = \angle ASB = 90^\circ$; b) $\angle(SA, MN) = \angle(SA, AC) = 45^\circ$; c) $\angle(MN, AC) = 0^\circ$; d) $\angle(SM, AC) = \angle(SM, MN) = \angle SMN = 60^\circ$. 7. a) Din relațiile $VA = VC$ și $AO = OC$ rezultă că $VO \perp AC$. Avem $VO = \sqrt{VA^2 - AO^2} = 2$ cm, $OM = \frac{VA}{2} = 2$ cm și $VM = \frac{VC}{2} = 2$ cm, deci ΔOMV este echilateral; b) $\angle(AO, OM) = \angle MOC = 30^\circ$. 8. Cum $BC \parallel A'D'$ și $BC = A'D'$, rezultă că $BCDA'$ este paralelogram, deci $A'B \parallel D'C$. Avem $\angle(A'B, AD) = \angle(D'C, AD) = \angle AD'C = 60^\circ$, deoarece triunghiul $AD'C$ este echilateral ($AC = CD' = AD' = AB\sqrt{2}$). 9. $MN \parallel AB$, $PQ \parallel B'D' \Rightarrow \angle(MN, PQ) = \angle(AB', B'D') = 60^\circ$.

($\triangle AB'D'$ este echilateral, pentru că $AB' = B'D' = D'A = AB\sqrt{2}$). **10.** a) $CD \parallel AB$, $AB \parallel MN \Rightarrow CD \parallel MN \Rightarrow$ punctele C, D, N și M sunt coplanare; b) $\sphericalangle(BC, AN) = \sphericalangle(BC, BM) = 60^\circ$, deoarece $\sphericalangle MBC = 120^\circ$ ($BM = BC$ și $\sphericalangle CMB = 30^\circ$); $\sphericalangle(AM, CD) = \sphericalangle(AM, AB) = 45^\circ$; $\sphericalangle(DN, BC) = \sphericalangle(CM, BC) = 30^\circ$. **11.** a) Deoarece AM și DM sunt mediane în triunghiurile echilaterale ABC și DBC , rezultă că $AM = DM = 3\sqrt{3}$ cm. Din relațiile $AM = MD$ și $AP = PD$ deducem că $MP \perp AD$; b) $MN = \frac{AB}{2} = 3$ cm, $NP = \frac{CD}{2} = 3$ cm,

$MP = \sqrt{AM^2 - AP^2} = 3\sqrt{2}$ cm; c) Triunghiul MNP este dreptunghic isoscel cu $\sphericalangle N = 90^\circ$, deci $\sphericalangle(AB, MP) = \sphericalangle(MN, MP) = 45^\circ$ și $\sphericalangle(AB, CD) = \sphericalangle(MN, NP) = 90^\circ$. **12.** a) $S = 3 \cdot \sphericalangle_{ABB'A'} = 3 \cdot 6 \cdot 8 \text{ cm}^2 = 144 \text{ cm}^2$; b) $AA' \parallel CC' \Rightarrow \text{tg}(\sphericalangle(AA', C'M)) = \text{tg}(\sphericalangle(CC', C'M)) = \text{tg}(\sphericalangle CC'M) = \frac{3}{8}$;

c) $AM = 3\sqrt{3}$ cm, $C'M = \sqrt{73}$ cm, $C'A = 10$ cm $\Rightarrow AM^2 + C'M^2 = C'A^2 \Rightarrow AM \perp C'M$. **13.** a) $\sphericalangle(E'C', AB) = \sphericalangle(F'B', A'B) = \sphericalangle A'B'F' = 30^\circ$; b) $\sphericalangle(BC, F'E) = \sphericalangle(FE, F'E) = 45^\circ$; c) $\sphericalangle(B'D', BE) = \sphericalangle(BD, BE) = \sphericalangle EBD = 30^\circ$. **14.** a) Din relațiile $MB = MD = \frac{AB\sqrt{3}}{2}$ și $BO = OD$ rezultă că $MO \perp BD$; b) $\sphericalangle(VA, BD) = \sphericalangle(OM, BD) = 90^\circ$, $\sphericalangle(VB, OM) = \sphericalangle(VB, VA) = 60^\circ$; c) $\cos(\sphericalangle(VA, MB)) = \cos(\sphericalangle(OM, MB)) = \cos(\sphericalangle OMB) = \frac{OM}{MB} = \frac{AB:2}{AB\sqrt{3}:2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Autoevaluare

1. c). **2.** a) $P_1: A; P_2: A; P_3: F; P_4: A$. **3.** a) 90° ; b) 60° ; c) 90° ; d) 60° . **4.** a) Cum MN și PQ sunt linii mijlocii în triunghiurile ABC , respectiv ADC , rezultă că $MN \parallel AC$, $MN = \frac{AC}{2}$ și $PQ \parallel AC$, $PQ = \frac{AC}{2}$, deci $MN \parallel PQ$, $MN = PQ$, ceea ce înseamnă că $MNPQ$ este paralelogram; b) Din relațiile $MN \parallel AC$, $NP \parallel BD$ și $AC \perp BD$ rezultă că $MN \perp NP$, de unde, având în vedere că $MNPQ$ este paralelogram, rezultă că $MNPQ$ este dreptunghi. **5.** a) $\sphericalangle(MP, A'C') = \sphericalangle(CC', A'C') = \sphericalangle A'C'C = 90^\circ$; b) Din $A'C' \parallel NP$, $MP \perp A'C'$ rezultă că $MP \perp NP$, deci $MN = \sqrt{NP^2 + PM^2} = 10$ cm.

Lecția 6. Dreaptă paralelă cu un plan

1. În triunghiul PAB avem $\frac{PC}{PA} = \frac{PD}{PB}$, deci $CD \parallel AB$. Din relațiile $CD \parallel AB$, $AB \subset \alpha$, $CD \not\subset \alpha$ rezultă că $CD \parallel \alpha$. **2.** Deoarece, în triunghiul PAB , avem $\frac{PC}{CA} \neq \frac{PD}{DB}$, rezultă că $CD \cap AB = \{O\}$ și atunci $O \in CD$ și $O \in AB \subset \alpha$, ceea ce înseamnă că dreapta CD și planul α sunt secante (O este singurul lor punct comun). **3.** a) $MN \parallel AC$ și $QP \parallel AC$ (linii mijlocii în triunghiurile ABC , respectiv ACD) $\Rightarrow MN \parallel QP \Rightarrow$ punctele M, N, P, Q sunt coplanare; b) $AC \parallel MN$, $MN \subset \alpha$, $AC \not\subset \alpha \Rightarrow AC \parallel \alpha$; $BD \parallel MQ$, $MQ \subset \alpha$, $BD \not\subset \alpha \Rightarrow BD \parallel \alpha$. **4.** a) Fie M și N mijloacele laturilor AB , respectiv BC . Cum $\frac{DG}{DM} = \frac{DE}{DN} = \frac{2}{3}$, rezultă că $GE \parallel MN$. Din $GE \parallel MN$, $MN \subset (ABC)$, $GE \not\subset (ABC) \Rightarrow$

$\Rightarrow GE \parallel (ABC)$; b) Din $GE \parallel MN$ deducem că $\triangle DGE \sim \triangle DMN$, deci $\frac{GE}{MN} = \frac{DG}{DM} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{GE}{AB} = \frac{1}{3}$. **5.** $P_1: A; P_2: A;$

$P_3: F; P_4: A$. **6.** Fie $\{O\} = AC \cap BD$. Cum NO este linie mijlocie în triunghiul MBD , rezultă că $MB \parallel NO$. Din relațiile $MB \parallel NO$, $NO \subset (NAC)$, $MB \not\subset (NAC)$ rezultă că $MB \parallel (NAC)$. **7.** a) $BB' \parallel AA'$, $AA' \subset (A'AD)$, $BB' \not\subset (A'AD) \Rightarrow BB' \parallel (A'AD)$; b) $AD' \parallel BC'$ etc.; c) $C'O \parallel AQ$ (unde Q este centrul pătratului $A'B'C'D'$) etc. **8.** a) $AA' \parallel BB'$, $BB' \subset (BCC')$, $AA' \not\subset (BCC') \Rightarrow AA' \parallel (BCC')$; b) Nu este adevărat, pentru că $\sphericalangle(AA', BC') = \sphericalangle(BB', BC') \neq 0^\circ$. **9.** a) $BD \parallel AE$, $AE \subset (A'AE)$ etc.; b) $A'B \parallel E'D$, $E'D \subset (EDD')$ etc.; c) $AF \cap BD \neq \emptyset$, $BD \subset (BDD') \Rightarrow AF \cap (BDD') \neq \emptyset$. **10.** a) $CD \parallel MN$, $MN \subset (AMN)$, $CD \not\subset (AMN) \Rightarrow CD \parallel (AMN)$; b) $DCMN$ este paralelogram $\Rightarrow DN \parallel MC$. Din $DN \parallel MC$, $MC \subset (AMC)$, $DN \not\subset (AMC) \Rightarrow DN \parallel (AMC)$; c) $EF \parallel DN$ (linie mijlocie în $\triangle BND$), $DN \subset (AND)$, $EF \not\subset (AND) \Rightarrow EF \parallel (AND)$. **11.** Din relațiile $MN \parallel PQ$, $MN \subset (ABC)$, $PQ \subset (ACD)$, $(ABC) \cap (ACD) = AC$ rezultă, conform problemei rezolvate 3 (Teorema Acoperișului), că $AC \parallel MN$. Cum $AC \parallel MN$, $MN \subset \alpha$, $AC \not\subset \alpha$, deducem că $AC \parallel \alpha$. Analog, se arată că $BD \parallel \alpha$. **12.** Fie $AE \cap BC = \{M\}$, $AF \cap BD = \{N\}$. În $\triangle ABM$, BE este bisectoare și înălțime, deci E este mijlocul lui AM . Analog, arătăm că F este mijlocul lui AN . Așadar, EF este linie mijlocie în triunghiul AMN , deci $EF \parallel MN$. Din $EF \parallel MN$, $MN \subset (BCD)$, $EF \not\subset (BCD)$ rezultă că $EF \parallel (BCD)$. **13.** a) Din relațiile $AC = CE$ și $BC = CH$ rezultă că $ABEH$ este paralelogram, deci $AB \parallel EH$. Analog, demonstrăm că $AB \parallel FG$, așadar $EH \parallel FG$, ceea ce înseamnă că punctele E, F, G și H sunt coplanare; b) Din $AB \parallel EH$, $EH \subset (EFGH)$, $AB \not\subset (EFGH)$ rezultă că $AB \parallel (EFGH)$. Cum CD este linie mijlocie în triunghiul AEH , avem $CD \parallel EF$ și din $CD \parallel EF$, $EF \subset (EFGH) \Rightarrow CD \parallel (EFGH)$. **14.** Fie $\{Q\} = BG \cap FC$. Cum PQ este linie mijlocie în triunghiul ABG , rezultă că $PQ \parallel AG$. Din relațiile $AG \parallel PQ$, $PQ \subset (CFP)$ și $AG \not\subset (CFP)$ obținem $AG \parallel (CFP)$. **15.** a) Din relațiile $AD \parallel BC$, $AD \subset (VAD)$, $BC \subset (VBC)$, $(VAD) \cap (VBC) = a$ rezultă, conform problemei rezolvate 3 (Teorema Acoperișului), că $a \parallel BC$; b) Analog, arătăm că $AB \parallel b$, deci $\sphericalangle(a, b) = \sphericalangle(BC, AB) = \sphericalangle ABC = 90^\circ$.

Autoevaluare

1. b). **2.** a) $\rightarrow 3$; b) $\rightarrow 4$; c) $\rightarrow 1$; d) $\rightarrow 2$. **3.** b). **4.** a) paralelă; b) paralelă; c) secantă; d) inclusă. **5.** a) $BC' = 15$ cm; b) Fie $\{M\} = C'O \cap A'B'$. Cum $\frac{C'O}{C'M} = \frac{2}{3} = \frac{C'D}{C'B'}$, rezultă că $OD \parallel BM$. Din relațiile $OD \parallel BM$, $BM \subset (ABB')$ și $OD \not\subset (ABB')$ rezultă că $OD \parallel (ABB')$.

Lecția 7. Plane paralele

1. a) $(ABC) \parallel (A'B'C')$; b) $(ADD') \parallel (BCC')$; c) $(ABB') \parallel (DD'C')$; d) $(A'AC) \cap (BB'C') = CC'$. **2.** $P_1: A; P_2: F; P_3: A; P_4: F$. **3.** $NP \parallel VD$, $MN \parallel AD$, $MN \cap NP = \{N\} \Rightarrow (MNP) \parallel (VAD)$. **4.** a) Punctele B, M, N, C aparțin planului $(A'BC)$, deci sunt coplanare; b) Cum $BCC'B'$ este dreptunghi, rezultă că $BC \parallel B'C'$, deci $BC \parallel (A'B'C')$ (căci $B'C' \subset (A'B'C')$ și $BC \not\subset (A'B'C')$). Avem $MN \parallel BC$, $BC \parallel B'C'$, deci $MN \parallel B'C'$, de unde rezultă că $MN \parallel (A'B'C')$. Deoarece $A' \in (A'B'C')$ și

$A' \in (BMNC)$, rezultă că planele $(BMNC)$ și $(A'B'C')$ nu sunt paralele. Deși $MN \parallel (A'B'C')$ și $BC \parallel (A'B'C')$, cum MN și BC **nu sunt concurente**, nu se poate aplica teorema 1, deci nu putem spune că planele $(BMNC)$ și $(A'B'C')$ ar fi paralele. **5.** $PN \parallel AA'$, $MQ \parallel CC' \parallel AA' \Rightarrow PN \parallel MQ \Rightarrow M, N, P, Q$ sunt coplanare; $PN \parallel AA'$, $MN \parallel AB$, $PN \cap MN = \{N\} \Rightarrow (MNP) \parallel (A'AB) \Rightarrow (MNPQ) \parallel (A'AB)$. **6.** $AC \parallel A'C'$, $AB' \parallel DC'$, $AC \cap AB' = \{A\} \Rightarrow (ACB') \parallel (A'C'D)$. **7.** $\frac{OD}{OA} =$

$$= \frac{OE}{OB} = \frac{OF}{OC} = \frac{1}{3} \Rightarrow DE \parallel AB \text{ și } DF \parallel AC \text{ și cum } DE \cap DF = \{D\} \Rightarrow (DEF) \parallel (ABC).$$

8. a) Fie M, N, P mijloacele laturilor AB, BC , respectiv CA . Avem $\frac{DE}{DM} = \frac{DF}{DN} = \frac{DG}{DP}$, deci

$EF \parallel MN$, $EG \parallel MP$, de unde, având în vedere că $EF \cap EG = \{E\}$, rezultă că $(EFG) \parallel (ABC)$; **b)** $\triangle EFG \sim \triangle CAB$, $\mathcal{P}_{\triangle EFG} : \mathcal{P}_{\triangle ABC} = 1 : 3$; $\mathcal{A}_{\triangle EFG} : \mathcal{A}_{\triangle ABC} = 1 : 9$. **9. a)** $BE \parallel AF$, $BC \parallel AD$, $BE \cap BC = \{B\} \Rightarrow (BEC) \parallel (AFD)$; $EM \subset (BEC)$, $(BEC) \parallel (AFD) \Rightarrow EM \parallel (AFD)$. **10. a)** $NP \parallel BB'$, $MQ \parallel BB' \Rightarrow NP \parallel MQ \Rightarrow M, N, P, Q$ sunt coplanare $\Rightarrow Q \in (MNP)$; **b)** $MN \parallel AC$, $PN \parallel CC'$, $MN \cap PN = \{N\} \Rightarrow (MNP) \parallel (A'AC)$; **c)** $QN \subset (MNP)$, $(MNP) \parallel (A'AC) \Rightarrow QN \parallel (A'AC)$. **11. a)** $MN \parallel BC$, $PN \parallel VC$, $MN \cap PN = \{N\} \Rightarrow (MNP) \parallel (VBC)$; **b)** $(MNP) \parallel (VBC)$, $(VAB) \cap (MNP) = MQ$, $(VAB) \cap (VBC) = VB \Rightarrow MQ \parallel VB$ (Propoziția 2, Teorema Tortului); **c)** $MNPQ$ trapez isoscel cu baza mare $MN = 4$ cm și $NP = PQ = QM = 2$ cm; $\mathcal{A}_{MNPQ} = 3\sqrt{3}$ cm²; **d)** $\angle(MP, AD) = \angle(MP, MN) = \angle PMN = 30^\circ$. **12. a)** Fie R mijlocul lui AB . Avem $AP \parallel B'R$, $B'R \parallel C'N$, deci $AP \parallel C'N$. De asemenea, avem $PQ \parallel B'D'$, $B'D' \parallel BD$, $BD \parallel MN$, deci $PQ \parallel MN$. Din relațiile $AP \parallel C'N$, $PQ \parallel MN$ și $AP \cap PQ = \{P\}$ rezultă că $(APQ) \parallel (C'MN)$; **b)** $(APQ) \parallel (C'MN)$, $(ACC') \cap (APQ) = AX$, $(ACC') \cap (C'MN) = C'Y \Rightarrow AX \parallel C'Y$ (Propoziția 2, Teorema Tortului).

Autoevaluare

1. b). **2. a).** **3.** $(ABC) \parallel (A'B'C')$, $(ABB') \parallel (DEE')$, $(BCC') \parallel (FEE')$, $(CDD') \parallel (AFF')$. **4.** $\frac{VM}{VA} = \frac{VN}{VB} = \frac{VP}{VC} \Rightarrow MN \parallel AB$ și $MP \parallel AC \Rightarrow (MNP) \parallel (ABC)$. **5. a)** $NO \parallel VB$, $OM \parallel AB$, $NO \cap OM = \{O\} \Rightarrow (MON) \parallel (VAB)$; **b)** $(MON) \parallel (VAB)$, $MN \subset (MON) \Rightarrow MN \parallel (VAB)$.

Lección 8. Aplicații: secțiuni paralele cu baza în corpurile geometrice studiate; trunchiul de piramidă și trunchiul de con circular drept (descriere și reprezentare)

1. a) $\triangle VA'B' \sim \triangle VAB \Rightarrow \frac{VA'}{VA'+5} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{1}{4} \Rightarrow VA' = \frac{5}{3}$ m și $VA = \frac{20}{3}$ m; **b)** $B'C' \parallel BC \Rightarrow \angle(AB, B'C') = \angle(AB, BC) = 60^\circ$.

2. a) $(MNP) \parallel (ABC) \Rightarrow MN \parallel AB \Rightarrow \frac{VM}{VA} = \frac{MN}{AB} \Rightarrow MN = 4$ cm $\Rightarrow \mathcal{A}_{MNP} = 4\sqrt{3}$ cm²; **b)** $S = 3(12 + 10 + 4)$ cm = 78 cm. **3. a)** $S = 4(24 + 6 + 15)$ cm = 180 cm; **b)** Fie V vârful piramidei din care provine trunchiul; $\frac{VA'}{VA'+AA'} = \frac{A'B'}{AB} \Rightarrow VA' = 5$ cm, $VA = 20$ cm; $\mathcal{A}_{VAB} = 24 \cdot 16 : 2$ cm² =

= 192 cm²; **c)** $\angle(A'C', BC) = \angle(A'C', B'C') = 45^\circ$. **4. a)** $\mathcal{A}_{ABB'A'} = 20$ cm² $\Rightarrow h_{ABB'A'} = 4$ cm $\Rightarrow AA' = 5$ cm; **b)** $S = 3(8 + 2 + 5)$ cm = 45 cm; **c)** $\frac{VA'}{VA} = \frac{A'B'}{AB} \Rightarrow VA' = \frac{5}{3}$ cm, $VA = \frac{20}{3}$ cm. **5.** $\frac{VA'}{VA} = \frac{1}{3} = \frac{A'B'}{AB} \Rightarrow A'B' = 4$ cm, $VA' = 10$ cm, $AA' = 20$ cm $\Rightarrow S = 6(12 + 4 + 20)$ cm = 216 cm. **6.** $\frac{VA'}{VA} = \frac{O'A'}{OA} = \frac{1}{3} \Rightarrow O'A' = 2$ dm. **7.** 36 cm.

Autoevaluare

1. d). **2. d).** **3.** 36 cm². **4.** 60 cm. **5. a).**

Lección 9. Perpendicularitate: drepte perpendiculare, dreaptă perpendiculară pe un plan

1. a) $\angle ABD = 180^\circ - \angle BAD - \angle BDA = 90^\circ$, $\angle ABC = 180^\circ - \angle BAC - \angle BCA = 90^\circ$. Din relațiile $AB \perp BD$, $AB \perp BC$, $BD \cap BC = \{B\}$ rezultă că $AB \perp (BCD)$. **2.** Din $PA = PC$ și $AO = OC$ rezultă că $PO \perp AC$. Analog, $PO \perp BD$ și cum $AC \cap BD = \{O\}$, rezultă că $PO \perp (ABC)$. **3.** Din $VA = VB$ și $AM = MB$ rezultă că $AB \perp VM$, iar din $CA = CB$ și $AM = MB$ rezultă că $AB \perp MC$. Deoarece $AB \perp VM$, $AB \perp MC$, $VM \cap MC = \{M\}$, avem $AB \perp (VMC)$; **b)** $AB \perp (VMC)$, $VC \subset (VMC) \Rightarrow AB \perp VC \Rightarrow \angle(AB, VC) = 90^\circ$. **4. a)** $AB^2 + BC^2 = AC^2 \Rightarrow AB \perp BC$; $AB^2 + BD^2 = AD^2 \Rightarrow AB \perp BD$; $AB \perp BC$, $AB \perp BD$, $BC \cap BD = \{B\} \Rightarrow AB \perp (BCD)$; **b)** $AB \perp (BCD)$, $CD \subset (BCD) \Rightarrow AB \perp CD$. **5.** $DA \perp (ABC) \Rightarrow \angle DAB = \angle DAC = \angle DAM = 90^\circ \Rightarrow DB = DC = 10$ cm, $DM = \sqrt{91}$ cm. **6.** $EA \perp \perp (ABC) \Rightarrow EA \perp AD \Rightarrow ED^2 = EA^2 + AD^2 = 5^2 + 12^2 \Rightarrow ED = 13$ m. **7. a)** $EB^2 = EA^2 + AB^2 = 481 \Rightarrow EB = \sqrt{481}$ cm; $EC^2 = EA^2 + AC^2 = 625 \Rightarrow EC = 25$ cm; **b)** $EA \perp (ABC) \Rightarrow EA \perp BD \Rightarrow \angle(EA, BD) = 90^\circ$. **8.** Cum O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC , rezultă că $OA = OB = OC$, iar $DO \perp (ABC)$ implică $\angle DOA = \angle DOB = \angle DOC = 90^\circ$. Deci, $\triangle DOA \equiv \triangle DOB \equiv \triangle DOC$ (CC), de unde rezultă că $DA = DB = DC$. **9. a)** $ABB'A'$ și $BCC'B'$ sunt dreptunghiuri, deci $BB' \perp A'B'$ și $BB' \perp B'C'$, de unde rezultă că $BB' \perp (A'B'C')$ (căci $A'B'$ și $B'C'$ sunt concurente în punctul B'); **b)** $BB' \perp (A'B'C') \Rightarrow BB' \perp A'M$; $A'M \perp BB'$, $A'M \perp B'C'$, $BB' \cap B'C' = \{B'\} \Rightarrow A'M \perp (BCC')$. **10.** $CC' \perp (ABC) \Rightarrow CC' \perp AC \Rightarrow AC^2 = AC^2 + CC'^2 = 64 \cdot 3 \Rightarrow AC' = 8\sqrt{3}$ cm. **11.** 13 cm. **12. a)** $VA = VC$, $VP = VP$, $\angle AVP = \angle CVP \Rightarrow \triangle VPA \equiv \triangle VPC$; **b)** $\triangle VPA \equiv \triangle VPC \Rightarrow \angle VPA = \angle VPC = 90^\circ$; $VB \perp PA$, $VB \perp PC$, $PA \cap PC = \{P\} \Rightarrow VB \perp (APC)$; **c)** $VB \perp (APC)$, $AC \subset (APC) \Rightarrow VB \perp AC$. **13.** $AB = AC = 3$ cm, $MN = 5$ cm. **14.** Din relațiile $\triangle MBN \equiv \triangle NCP \equiv \triangle PDQ \equiv \triangle QAM$ (LUL) rezultă că $NM = NP = PQ = QM$, deci $MP \perp NO$ și $MP \perp OQ$, de unde rezultă că $MP \perp (NOQ)$. **15. a)** $BD \perp AA'$, $BD \perp AC$, $AA' \cap AC = \{A\} \Rightarrow BD \perp (A'AC) \Rightarrow BD \perp A'C$; **b)** $A'C \perp BD$, $A'C \perp BC'$ (analog a)), $BD \cap BC' = \{B\} \Rightarrow A'C \perp (C'BD)$; **c)** $A'C \perp \perp (C'BD)$, $A'C \perp (AB'D')$ (analog b)) $\Rightarrow (C'BD) \parallel (AB'D')$.

Autoevaluare

1. $P_1: A$; $P_2: F$; $P_3: F$; $P_4: A$. **2.** $P_1: F$; $P_2: A$; $P_3: A$; $P_4: A$. **3. a).** **4. a)** $CD \perp AM$, $CD \perp BM$, $AM \cap BM = \{M\} \Rightarrow CD \perp (ABM)$; **b)** $CD \perp (ABM)$, $AB \subset (ABM) \Rightarrow CD \perp AB \Rightarrow \angle(CD, AB) = 90^\circ$; **c)** $3\sqrt{2}$ cm. **5.** $VA \perp VB$, $VA \perp VC$, $VB \cap VC = \{V\} \Rightarrow VA \perp (VBC) \Rightarrow VA \perp BC$; $VH \perp (ABC) \Rightarrow VH \perp BC$;

$BC \perp VA$, $BC \perp VH$, $VA \cap VH = \{V\} \Rightarrow BC \perp (VAH) \Rightarrow BC \perp AH$. Analog demonstrăm că $AC \perp BH$, deci punctul H este ortocentrul triunghiului ABC .

Lección 10. Aplicații: înălțimea unei piramide, înălțimea unui con circular drept

1. $2\sqrt{6}$ cm. 2. 11 cm. 3. 8 cm. 4. 25 m. 5. 65 cm^2 . 6. 1 m. 7. 3 cm.

Autoevaluare

1. b). 2. d). 3. c). 4. 6 cm. 5. $AB = 12$ cm, $VM = 10$ cm, $VO = 8$ cm.

Lección 11. Distanța dintre două plane paralele, înălțimea prisme drepte, a paralelipipedului dreptunghic, a cilindrii circular drept, a trunchiului de piramidă și a trunchiului de con circular drept

1. 120 m. 2. 4 cm. 3. 48 dm^2 . 4. 6 cm. 5. Înălțimea cilindrii este egală cu 6 cm, iar raza bazei sale este egală cu 3 cm. 6. a) Fie O , O' centrele bazelor ABC ,

respectiv $A'B'C'$. Avem $AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ cm, $A'O' =$

$= \sqrt{3}$ cm, $OO'^2 = AA'^2 - (AO - A'O')^2 = 9$, deci $OO' = 3$ cm; b) Fie V vârful piramidei din care provine trunchiul.

Avem $\frac{VO'}{VO} = \frac{A'O'}{AO} \Rightarrow \frac{VO'}{VO'+3} = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} \Rightarrow VO' = 1$ cm $\Rightarrow$

$\Rightarrow VO = 4$ cm. 7. a) $AO = 6\sqrt{2}$ cm, $A'O' = 3\sqrt{2}$ cm, $AA'^2 = OO'^2 + (AO - A'O')^2 = 34$, deci $AA' = \sqrt{34}$ cm;

b) $\mathcal{A}_{ABB'A'} = 45 \text{ cm}^2$, suma ariilor fețelor laterale ale trunchiului de piramidă este egală cu 180 cm^2 . 8. 4 cm.

9. a) $OO' = 8$ cm; b) $\frac{A'O'}{AO} = \frac{VO'}{VO} \Rightarrow VO = 16$ cm, unde V

este vârful conului. 10. a) $MN = NP = PM = 3\sqrt{2}$ cm, $BM = BN = BP = 3$ cm, deci $BMNP$ este o piramidă triunghiulară regulată cu vârful B ; b) $MN \parallel AC$, $MP \parallel AB'$, $MN \cap MP = \{M\} \Rightarrow (MNP) \parallel (ACB')$; c) Fie $BQ \perp (MNP)$, $Q \in (MNP)$. Cum $(MNP) \parallel (ACB')$, rezultă că $BQ \perp (ACB')$. Dacă $BQ \cap (ACB') = \{O\}$, atunci $d((MNP), (ACB')) = OQ = = BO - BQ = (6\sqrt{3} - \sqrt{3}) \text{ cm} = 5\sqrt{3}$ cm.

Autoevaluare

1. c). 2. a). 3. 4 cm. 4. 1 cm. 5. a) $MN \parallel BD$, $MP \parallel VB$, $MN \cap MP = \{M\} \Rightarrow (MNP) \parallel (VBD)$; b) Fie $\{O\} = AC \cap BD$, $\{Q\} = AC \cap MN$. Cum $AC \perp (VBD)$, avem $d((MNP), (VBD)) = = OQ = 3\sqrt{2}$ cm; c) Cum $(MNP) \parallel (VBD)$, $d(V, (MNP)) = = d((MNP), (VBD)) = 3\sqrt{2}$ cm.

Lección 12. Plane perpendiculare, aplicații: secțiuni diagonale, secțiuni axiale în corpurile studiate

1. $16\sqrt{2} \text{ m}^2$. 2. $3\sqrt{3}$ cm. 3. $24\sqrt{2} \text{ cm}^2$. 4. $9\pi \text{ dm}^2$. 5. a) $64\pi \text{ cm}^2$; b) 6 cm. 6. 5 cm. 7. Deoarece $VB = VC$ și $BM = MC$, avem $BC \perp VM$. Triunghiul ABC este echilateral, deci $BC \perp AM$. Din relațiile $BC \perp VM$, $BC \perp AM$ și $VM \cap AM = \{M\}$ rezultă că $BC \perp (VAM)$. Cum $BC \perp (VAM)$ și $BC \subset (VBC)$, $BC \subset (ABC)$, rezultă că $(VAM) \perp (VBC)$ și $(VAM) \perp (ABC)$. 8. a) Din $AC \perp BD$, $AC \perp VO$ (căci $VO \perp (ABC)$), $BD \cap VO = \{O\}$ deducem că $AC \perp (VBD)$. Cum $AC \perp (VBD)$, $AC \subset (VAC)$, rezultă că $(VAC) \perp$

(VBD) ; b) Din $BC \perp OM$, $BC \perp VM$, $OM \cap VM = \{M\}$ deducem că $BC \perp (VOM)$. Deoarece $BC \perp (VOM)$ și $BC \subset (VBC)$, rezultă că $(VBC) \perp (VOM)$. 9. a) Din $AM \perp BC$, $AM \perp BB'$ (căci $BB' \perp (ABC)$), $BC \cap BB' = \{B\}$ obținem $AM \perp (BCC')$, deci $(AMC') \perp (BCC')$; b) Cum $AM \perp (BCC')$ și $MC' \subset (BCC')$, rezultă că $AM \perp MC'$, deci $\mathcal{A}_{AMC'} = AM \cdot MC' : 2 = 30\sqrt{3} \text{ cm}^2$. 10. a) Triunghiul ABD este echilateral, deci $AO = CO = 6\sqrt{3}$ cm. Cum $\angle EAO = \angle FCO = = 90^\circ$, avem $EO = 18$ cm și $OF = 9\sqrt{2}$ cm. Din trapezul $EACF$ deducem că $EF = 9\sqrt{6}$ cm. Deoarece $EF^2 = EO^2 + + FO^2$, rezultă că $\angle EOF = 90^\circ$; b) Triunghiul FBD este isoscel cu baza BD și $DO = OB$, deci $FO \perp BD$. Din $FO \perp OE$, $FO \perp BD$ și $OE \cap BD = \{O\}$ rezultă că $FO \perp (BED)$, deci $(BFD) \perp (BED)$.

Autoevaluare

1. b). 2. a). 3. 12 cm. 4. $9\pi \text{ cm}^2$, 10 cm. 5. Deoarece $VA^2 + VB^2 = AB^2$, rezultă că $\angle AVB = 90^\circ$. Din relațiile $\angle AVB = \angle CVB = 90^\circ$ rezultă că $VB \perp (VAC)$, deci $(VAB) \perp \perp (VAC)$ (căci $VB \subset (VAB)$).

Lección 13. Proiecții de puncte, de segmente și de drepte pe un plan; unghiul dintre o dreaptă și un plan, aplicație: lungimea proiecției unui segment pe un plan

1. a) B ; b) A ; c) A' ; d) O , unde $\{O\} = AC \cap BD$. 2. a) O ; b) O ; c) D ; d) O . 3. a) BB' ; b) AA' ; c) DD' ; d) A . 4. a) AC ; b) $A'C'$; c) BC ; d) AD' . 5. $A'B' = 8$ cm. 6. $A'B' = 6$ cm. 7. a) 45° ; b) 90° ; c) 0° ; d) 0° . 8. a) 45° ; b) 0° ; c) 90° ; d) 60° . 9. $VA = 12$ m, $OA = 6\sqrt{3}$ m, $\mathcal{P}_{\Delta VAB} = 12(2 + \sqrt{3}) \text{ m}$, $\mathcal{A}_{\Delta VAB} = 36\sqrt{3} \text{ m}^2$.

10. Planele bazelor sunt paralele. Unghiul format de o generatoare a trunchiului cu fiecare dintre aceste plane este egal cu 45° . 11. a) Cum $\angle(VA, (ABC)) = \angle VAO =$

$= 60^\circ$, rezultă că $\sin 60^\circ = \frac{VO}{VA}$, de unde obținem $VO =$

$= 6$ cm; b) Avem $AO^2 = VA^2 - VO^2 = 12$, deci $AO =$

$= 2\sqrt{3}$ cm. Cum $AO = \frac{AB\sqrt{3}}{3}$, rezultă că $AB = 6$ cm și

$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$. 12. a) Avem $\angle(VA, (ABC)) = \angle VAO =$

$= 30^\circ$, deci $VO = AO \cdot \tan 30^\circ = \sqrt{6}$ cm; b) Cum $\text{pr}_{(VAC)} AB =$

$= AO$, rezultă că $\angle(AB, (VAC)) = \angle(AB, AO) = \angle BAO = 45^\circ$.

13. a) Avem $AA' \parallel (BCC')$, deci $\angle(AA', (BCC')) = 0^\circ$ și $AA' \perp \perp (ABC)$, deci $\angle(AA', (ABC)) = 90^\circ$; b) Cum $\angle(AC', (ABC)) =$

$= \angle C'AC$, iar $\sin(\angle C'AC) = \frac{CC'}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, rezultă că

$\sin(\angle(AC', (ABC))) = \frac{1}{\sqrt{3}}$. 14. a) Fie $AO \perp (BCD)$, $O \in (BCD)$.

Avem $\text{pr}_{(BCD)} AB = OB = \frac{2}{3} \cdot \frac{BC\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ cm; b) Cum

$MN \parallel (ABC)$, rezultă că lungimea proiecției segmentului MN pe planul (ABC) este egală cu: $MN = AC : 2 =$

$= 6$ cm. 15. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul $A'B'D$, obținem $A'D = 5$ cm. Avem $\text{pr}_{(ABC)} A'D = AB$, deci $AB = A'D \cdot \cos u^\circ$, unde $u^\circ = \angle(A'D, (ABC))$. De aici rezul-

Autoevaluare

1. d). 2. c). 3. c). 4. d). 5. a) Cum $\frac{AB^2 \sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$, rezultă că $AB = 4$ cm. Triunghiurile ADB și ADC sunt congruente ($AB = AC$, $AD = AD$, $\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$), deci $BD = CD$. Dacă $DD' \perp BC$, $D' \in BC$, atunci $\mathcal{A}_{\triangle BDC} = \frac{BC \cdot DD'}{2}$, de unde obținem $DD' = 2\sqrt{2}$ cm. Așadar, $BD = DC = \sqrt{DD'^2 + D'B^2} = 2\sqrt{3}$ cm; b) $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = 2$ cm; c) $\angle(AB, \alpha) = \angle ABD = 30^\circ$.

Leția 14. Unghi diedru, unghi plan corespunzător diedrului; unghiul a două plane; plane perpendiculare

1. a) $\text{tg}(\angle((C'BD), (ABC))) = \text{tg}(\angle C'OC) = \frac{CC'}{OC} = \sqrt{2}$.
 2. $\angle((A'BC), (ABC)) = \angle A'BA$. Cum $\text{tg}(\angle A'BA) = \sqrt{3}$ ($\triangle A'AB$: $\angle A = 90^\circ$), rezultă că $\angle A'BA = 60^\circ$. 3. Fie M mijlocul muchiei BC . Deoarece $A'B = A'C$ și $AB = AC$, rezultă că $A'M \perp BC$ și $AM \perp BC$, deci $\angle((A'BC), (ABC)) = \angle A'MA$. În triunghiul $A'MA$, avem $A'A = AM = 3\sqrt{3}$ cm și $\angle A = 90^\circ$, deci $\angle A'MA = 45^\circ$. 4. Fie M mijlocul laturii BC . Din relațiile $(VBC) \cap (ABC) = BC$, $VM \perp BC$, $VM \subset (VBC)$, $OM \perp BC$, $OM \subset (ABC)$ rezultă că $\angle((VBC), (ABC)) = \angle VMO$. Cum $OM = \sqrt{3}$ cm și $VO = 1$ cm, avem $\text{tg}(\angle VMO) = 1 : \sqrt{3}$, deci $\angle VMO = 30^\circ$. 5. 60° . 6. a) $VA = 10$ cm; b) $\sin(\angle(VA, (ABC))) = \frac{VO}{VA} = \frac{\sqrt{13}}{5}$. 7. a) Fie M mijlocul laturii AB ;

$\cos(\angle((VAB), (ABC))) = \cos(\angle VMO) = \frac{\sqrt{21}}{7}$; b) 90° . 8. Fie

M și M' mijloacele laturilor BC , respectiv $B'C'$. Cum $(BCC') \cap (ABC) = BC$, $MM' \perp BC$, $MM' \subset (BCC')$, $OM \perp BC$, $OM \subset (ABC)$, rezultă că $\angle((BCC'), (ABC)) = \angle M'MO = 60^\circ$. 9. a) Cum $AB \perp AC$, $AB \perp CD$, $AC \cap CD = \{C\}$, rezultă că $AB \perp (ACD)$; b) $\angle((ACD), (BCD)) = \angle BCA = 60^\circ$; c) $\angle((DAB), (ABC)) = \angle DAC = 45^\circ$. 10. $VO = 6$ cm. 11. $CC' = 3$ cm. 12. a) Fie M mijlocul laturii BC . Avem $\angle((VBC), (ABC)) = \angle VMO = 30^\circ$; b) Fie $d = (VBC) \cap (VAD)$ și N mijlocul laturii AD . Cum $d \parallel BC \parallel AD$, $VN \perp AD$, $VM \perp BC$, rezultă că $VN \perp d$, $VM \perp d$, deci $\angle((VBC), (VAD)) = \angle(VM, VN)$. În $\triangle VMN$ avem $VM = VN$ și $\angle VMN = 30^\circ$, deci $\angle MVN = 120^\circ$. Prin urmare, $\angle((VBC), (VAD)) = \angle(VM, VN) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Autoevaluare

1. d). 2. c). 3. c). 4. a). 5. a) Cum $BD \perp (VAC)$ (căci $BD \perp AC$ și $BD \perp VO$), rezultă că $BD \perp VC$. Din $VC \perp BD$ și $VC \perp OM$ ($BD \cap OM = \{O\}$) rezultă că $VC \perp (BDM)$; b) Cum $BM \perp VC$ și $DM \perp VC$, rezultă că unghiul căutat este $\angle BMD$. Avem $OM = \frac{VO \cdot OC}{VC} = 2\sqrt{6}$ cm, $\text{tg}(\angle MBO) = \frac{MO}{OB} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, deci $\angle MBO = 30^\circ$ și atunci $\angle BMD = 120^\circ$.

Leția 15. Teorema celor trei perpendiculare; calculul distanței de la un punct la o dreaptă; calculul distanței de la un punct la un plan; calculul distanței dintre două plane paralele

1. d(A, CD) = $AD = 5$ cm. 2. Fie M mijlocul lui BC . Avem

$AO = 2\sqrt{3}$ cm, deci $OM = \sqrt{3}$ cm. Cum $VO \perp (ABC)$, $OM \perp BC$, rezultă că $VM \perp BC$ (teorema celor trei perpendiculare), deci $d(V, BC) = VM = 2$ cm ($VM^2 = VO^2 + OM^2$). 3. Fie $ON \perp AB$, $N \in AB$ și $OP \perp AC$, $P \in AC$. Din teorema celor trei perpendiculare rezultă că $MN \perp AB$, respectiv $MP \perp AC$. Avem $ON = 4$ cm, $MN = 5$ cm, $\mathcal{A}_{\triangle MAB} = MN \cdot AB : 2 = 15$ cm², $OP = 3$ cm, $MP = 3\sqrt{2}$ cm, $\mathcal{A}_{\triangle MAC} = 12\sqrt{2}$ cm². 4. a) Fie $AM \perp BD$, $M \in BD$. Din $A'A \perp (ABC)$ și $AM \perp BD$ rezultă că $A'M \perp BD$ (teorema celor trei perpendiculare), deci $d(A', BD) = A'M = 13$ cm ($A'A^2 + AM^2 = A'M^2$); b) Fie $C'N \perp BD$, $N \in BD$. Avem $\text{pr}_{BD} A'C' = MN = 7$ cm. 5. Fie $\{O\} = AC \cap BD$. Din relațiile $EA \perp (ABC)$ și $AO \perp BD$ rezultă că $EO \perp BD$, deci $d(E, BD) = EO$ (teorema celor trei perpendiculare). Cum $AB = AD$ și $\angle BAD = 60^\circ$, triunghiul BAD este echilateral, deci $AO = 3\sqrt{3}$ cm. Așadar, $d(E, BD) = EO = 6$ cm ($EO^2 = EA^2 + AO^2$). 6. Din relațiile $BA \perp AC$ și $BA \perp AD$ rezultă că $BA \perp (ADC)$. Conform teoremei celor trei perpendiculare, din $BA \perp (ADC)$ și $AE \perp CD$ deducem că $BE \perp CD$. 7. Din $BO \perp AB'$ ($ABB'A'$ este pătrat) și $BO \perp B'C'$ ($B'C' \perp (ABB')$) rezultă că $BO \perp (AB'C')$. Conform teoremei celor trei perpendiculare, din $BO \perp (AB'C')$ și $OE \perp AC'$ deducem că $BE \perp AC'$. 8. Conform primei reciproce a teoremei celor trei perpendiculare, din relațiile $AD \perp (DBC)$ și $AB \perp BC$ rezultă că $DB \perp BC$, deci $\mathcal{A}_{\triangle DBC} = DB \cdot BC : 2 = 8$ m². 9. Din relațiile $SB \perp (ABC)$ și $SA \perp AC$ rezultă că $BA \perp AC$ (prima reciprocă a teoremei celor trei perpendiculare). Cum triunghiul ABC este dreptunghic în A , raza cercului său circumscris este egală cu $BC : 2 = 4$ cm. 10. Din relațiile $EA \perp (ABC)$ și $EO \perp BD$ rezultă că $AO \perp BD$ (prima reciprocă a teoremei celor trei perpendiculare). Cum $ABCD$ este paralelogram și $AO \perp BD$ ($AC \perp BD$), înseamnă că $ABCD$ este romb, deci $AB = AD$. 11. Din relațiile $DA \perp (ABC)$ și $AE \perp BC$ rezultă că $DE \perp BC$ (teorema celor trei perpendiculare). Din relațiile $AE \perp BC$, $DE \perp BC$ și $AF \perp DE$ deducem că $AF \perp (BDC)$ (a doua reciprocă a teoremei celor trei perpendiculare). 12. Deoarece $AB \perp (BCD)$ și $AC \perp CD$, rezultă că $BC \perp CD$ (prima reciprocă a teoremei celor trei perpendiculare). Fie $BP \perp AC$, $P \in AC$. Cum $AC \perp CD$, $BC \perp CD$ și $BP \perp AC$, rezultă că $BP \perp (ACD)$, deci $d(B, (ACD)) = BP = AB \cdot BC : AC = \frac{120}{17}$ dm.

13. a) Fie M mijlocul lui BC și $OP \perp VM$, $P \in VM$. Din relațiile $OM \perp BC$, $VM \perp BC$ și $OP \perp VM$ rezultă că $OP \perp (VBC)$ (reciproca a doua a teoremei celor trei perpendiculare). Avem $AM = 18$ cm, $OM = 6$ cm, $VM = 10$ cm, $d(O, (VBC)) = OP = VO \cdot OM : VM = 8 \cdot 6 : 10$ cm = $4,8$ cm; b) Fie $AQ \perp VM$, $Q \in VM$. Analog, $d(A, (VBC)) = AQ = VO \cdot AM : VM = 14,4$ cm. 14. a) Fie M mijlocul laturii BC și $OP \perp VM$, $P \in VM$. Din relațiile $OM \perp BC$, $VM \perp BC$ și $OP \perp VM$ rezultă că $OP \perp (VBC)$ (reciproca a doua a teoremei celor trei perpendiculare), deci $d(O, (VBC)) = OP = VO \cdot OM : VM = 12$ cm; b) Fie N mijlocul laturii AD . Deoarece $AD \parallel (VBC)$, rezultă că $d(A, (VBC)) = d(N, (VBC)) = NQ$, unde $NQ \perp VM$, $Q \in VM$. Avem $NQ = 2OP = 24$ cm. 15. a) Din relațiile $MN \parallel BC$,

$PM \parallel A'B$ și $PM \cap MN = \{M\}$ rezultă că $(MNP) \parallel (A'BC)$; b) $d((MNP), (A'BC)) = d(M, (A'BC)) = MQ$, unde $MQ \perp A'B$, $Q \in A'B$. Avem $MQ = 3\sqrt{2}$ cm. **16.** a) Cum $VA^2 + VB^2 = AB^2$, rezultă că $\angle AVB = 90^\circ$. Deci $AV \perp VB$ și, analog, $AV \perp VC$, deci $AV \perp (VBC)$. Avem $d(A, (VBC)) = AV = 3\sqrt{2}$ cm; b) $\cos(\angle((VBC), (ABC))) = \cos(\angle VMA) = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

unde M este mijlocul lui BC . **17.** a) Fie $AE \perp BD$, $E \in BD$. Din relațiile $VA \perp (ABC)$ și $AE \perp BD$ rezultă că $VE \perp BD$ (teorema celor trei perpendiculare), deci $d(V, BD) = VE = \frac{13}{5}$ cm; b) $\tan(\angle((VBD), (ABC))) = \tan(\angle VEA) = \frac{5}{12}$.

18. a) Fie $CM \perp AB$, $M \in AB$. Din relațiile $CC' \perp (ABC)$, $CM \perp AB$ rezultă că $C'M \perp AB$, deci $\angle((ABC'), (ABC)) = \angle C'MC = 60^\circ$. Avem $CM = 5\sqrt{3}$ cm și $CC' = CM \cdot \tan 60^\circ = 15$ cm; b) Fie $CO \perp C'M$, $O \in C'M$. Din relațiile $CM \perp AB$, $C'M \perp AB$, $CO \perp C'M$ rezultă că $CO \perp (C'AB)$. Avem $d(C, (C'AB)) = CO = 7,5$ cm.

Autoevaluare

1. d). **2.** c). **3.** a). **4.** $2\sqrt{3}$ cm. **5.** 3,6 cm.

RECAPITULARE ȘI EVALUARE

1. Probleme recapitulative

1. a) $BN = DM = 2\sqrt{5}$ cm ($\angle BB'N = \angle DD'M = 90^\circ$); b) Cum $DD' \parallel BB'$ și $DD' = BB'$, rezultă că $BDD'B'$ este paralelogram, deci $BD \parallel B'D'$. Din relațiile $BD \parallel B'D'$ și $B'D' \parallel MN$ deducem că $BD \parallel MN$, deci punctele B, D, M și N sunt coplanare. **2.** a) $\mathcal{A}_{ABCD} = AB^2 = 4$ cm²; b) Desfășurăm suprafața laterală a prisme pe un plan și obținem $\min(AM + MN + NP + PA) = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$ cm. **3.** a) 72 cm; b) Cum $AC \parallel MN$, $MN \subset (MNQ)$, $AC \not\subset (MNQ)$, rezultă că $AC \parallel (MNQ)$. Din relațiile $AC \parallel (MNQ)$, $AC \subset (ACD)$ și $(ACD) \cap (MNQ) = QP$ rezultă că $AC \parallel QP$, deci $MN \parallel QP$. Analog, demonstrăm că $MQ \parallel NP$. Așadar, $MNPQ$ este paralelogram. **4.** a) $AB' = B'D' = D'A = 6\sqrt{2}$ cm, deci $\mathcal{A}_{\Delta AB'D'} = (AB')^2 \sqrt{3} : 4 = 18\sqrt{3}$ cm²; b) Fie $\{O\} = A'C' \cap B'D'$. Avem $AC \parallel A'C'$ și $AC = A'C'$ ($ACC'A'$ este paralelogram), deci $AO \parallel O'C'$ și $AO = O'C'$, ceea ce înseamnă că $AOC'O'$ este paralelogram, deci $C'O \parallel AO'$. Din relațiile $C'O \parallel AO'$, $AO' \subset (AB'D')$ și $C'O \not\subset (AB'D')$ obținem $C'O \parallel (AB'D')$. **5.** a) $\mathcal{A}_{ACC'A'} = AA' \cdot AC = 64\sqrt{2}$ cm²; b) Din relațiile $MN \parallel DC'$ (linie mijlocie în $\Delta BDC'$), $DC' \subset (A'C'D)$ și $MN \not\subset (A'C'D)$ rezultă că $MN \parallel (A'C'D)$. **6.** a) 13 cm; b) Din relațiile $BD \parallel CE$, $DD' \parallel CC'$ și $BD \cap DD' = \{D\}$ rezultă că $(BDD') \parallel (ECC')$. **7.** a) Din relațiile $MN \parallel A'B$ (linie mijlocie în $\Delta A'BB'$), $NP \parallel BC$ ($BNPC$ este dreptunghi) și $MN \cap NP = \{N\}$ rezultă că $(MNP) \parallel (A'BC)$; b) Cum $(A'BC) \parallel (MNP)$ și $MP \subset (MNP)$, rezultă că $MP \parallel (A'BC)$. **8.** a) $AO = \sqrt{VA^2 - VO^2} = 6\sqrt{2}$ cm, $AC = 12\sqrt{2}$ cm, $AB = 12$ cm; b) $d(A, VB) = 4\sqrt{6}$ cm. **9.** a) Cum $AB \parallel A'B'$, rezultă că $\angle(AB, B'C) = \angle(A'B', B'C) = 60^\circ$; b) Fie $A'M \perp AB$, $M \in AB$. Avem $AM = 3$ dm și $\cos(\angle A'AB) = \frac{AM}{AA'} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, deci $\angle A'AB = 45^\circ$. Dacă $\{V\} = AA' \cap BB'$, atunci avem $\angle(AA', BB') = \angle AVB = 180^\circ - 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$. **10.** a) $VA^2 +$

$VB^2 = AB^2$, deci $\angle AVB = 90^\circ$, $VM = AB : 2 = 6$ cm. Cum triunghiul ABC este echilateral, avem $CM = 6\sqrt{3}$ cm, deci $VM^2 + VC^2 = CM^2$, ceea ce implică $\angle CVM = 90^\circ$; b) Fie N mijlocul lui BC . Deoarece $MN \parallel AC$, $\angle(VM, AC) = \angle(VM, MN) = \angle VMN$. Cum $VM = MN = VN = 6$ cm, rezultă că triunghiul VMN este echilateral și deci $\angle(VM, AC) = 60^\circ$. **11.** a) 2 cm; b) Din relațiile $AB \perp BD$ ($ABCDEF$ este hexagon regulat), $AB \perp DD'$ ($DD' \perp (ABC)$) și $BD \cap DD' = \{D\}$ rezultă că $AB \perp (BDD')$. **12.** a) $MB = BD = MD = 2\sqrt{2}$ cm, deci triunghiul MBD este echilateral; b) Deoarece $ON \parallel BM$ și $CD \parallel AB$, rezultă că $\angle(ON, CD) = \angle(BM, AB) = \angle MBA = 45^\circ$. **13.** a) $\mathcal{A}_{ACC'A'} = (AC + A'C') \cdot OO' : 2 = 54$ cm²; b) Cum $AO = A'C' = 6\sqrt{2}$ cm și $AO \parallel A'C'$, înseamnă că $AOC'A'$ este paralelogram, deci $AA' \parallel C'O$. Din relațiile $AA' \parallel C'O$, $C'O \subset (C'BD)$ și $AA' \not\subset (C'BD)$ rezultă că $AA' \parallel (C'BD)$, deci lungimea proiecției segmentului AA' pe planul $(C'BD)$ este egală cu lungimea lui $AA' = 6$ cm (din trapezul isoscel $ACC'A'$). **14.** a) $OM = \frac{DC'}{2} = 2$ m; b) Deoarece

$OM \parallel DC'$, rezultă că $\angle(OM, (BCC')) = \angle(DC', (BCC'))$; $pr_{(BCC')} DC' = CC'$, deci $\angle(DC', (BCC')) = \angle DC'C$; $\tan(\angle DC'C) = \frac{DC}{CC'} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, așadar avem $\angle DC'C = 30^\circ = \angle(OM, (BCC'))$.

15. a) $\tan(\angle(VA, (ABC))) = \tan(\angle(VA, OA)) = \frac{VO}{AO} = \frac{4}{3}$; b) Fie

$OP \perp VC$, $P \in VC$. Cum $BO \perp (VAC)$ și $OP \perp VC$, rezultă că $BP \perp VC$ (teorema celor trei perpendiculare). Din $(VAC) \cap (VBC) = VC$, $OP \perp VC$, $OP \subset (VAC)$, $BP \perp VC$, $BP \subset (VBC)$ deducem că $\angle((VAC), (VBC)) = \angle(OP, BP) = \angle OPB$; $\tan(\angle OPB) = \frac{OB}{OP} = \frac{5}{4}$. **16.** a) 60° ; b) $6\sqrt{3}$ cm².

17. a) Fie $AE \perp BD$, $E \in BD$. Avem $BD = 20$ cm, $AE = 8$ cm. Din relațiile $AA' \perp (ABC)$, $AE \perp BD$ rezultă că $A'E \perp BD$ (teorema celor trei perpendiculare); $\mathcal{A}_{\Delta A'BD} = A'E \cdot BD : 2 = 17 \cdot 20 : 2 = 170$ cm²; b) Fie $AF \perp A'E$, $F \in A'E$. Din relațiile $AE \perp BD$, $A'E \perp BD$ și $AF \perp A'E$ rezultă că $AF \perp (A'BD)$ (a doua reciprocă a teoremei celor trei perpendiculare), deci $d(A, (A'BD)) = AF = AA' \cdot AE : A'E = \frac{120}{17}$ cm. **18.** a) $MB' \perp (BCC') \Rightarrow \angle MB'C = 90^\circ \Rightarrow CM =$

$\sqrt{MB'^2 + B'C^2} = 6$ cm; b) Fie N mijlocul lui DC și $OP \perp MN$, $P \in MN$. Din $ON \perp DC$, $MN \perp DC$, $OP \perp MN$ rezultă că $OP \perp (CMD)$, deci $d(O, (CMD)) = OP = \frac{MQ \cdot ON}{MN} = \sqrt{2}$ cm (Q este mijlocul lui AB). **19.** a) Din

$NP \parallel BC$, $PQ \parallel AB$, $NP \cap PQ = \{P\}$ rezultă că $(NPQ) \parallel (C'AB)$; b) Din $(NPQ) \parallel (C'AB)$, $NQ \subset (NPQ)$ rezultă că $NQ \parallel (C'AB)$. Lungimea proiecției segmentului NQ pe planul $(C'AB)$

este egală cu lungimea lui $NQ = \sqrt{B'N^2 + B'Q^2} = 12$ cm.

20. a) 50 cm²; b) 60° . **21.** a) 8 cm; b) 30° . **22.** a) Cum $2r = AB = 12$ cm, rezultă că $\mathcal{A}_{bazei} = \pi r^2 = 36\pi$ cm²; b) Desfășurăm suprafața laterală a cilindrului pe un plan. Drumul parcurs de furnică este mai mare sau egal cu $\sqrt{g^2 + (\pi r)^2} = \sqrt{144 + \pi^2 \cdot 36} = 6\sqrt{4 + \pi^2}$ cm >

$> 6\sqrt{13} \text{ cm} > 21 \text{ cm}$. **23.** a) $VO = 8 \text{ cm}$, $\mathcal{A}_{\Delta VAB} = 48 \text{ cm}^2$; b) Fie $VM = x \text{ cm} = MB$. Atunci $MO = (8 - x) \text{ cm}$, $OB = 6 \text{ cm}$. Din $MB^2 = MO^2 + OB^2$ rezultă $x^2 = (8 - x)^2 + 6^2$, deci $x = \frac{25}{4} \text{ cm}$ și $OM = \left(8 - \frac{25}{4}\right) = \frac{7}{4} \text{ cm}$. **24.** a) $OO' = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12 \text{ cm}$; b) $\frac{VO'}{VO} = \frac{OA'}{OA}$, $\frac{VO'}{VO + 12} = \frac{1}{4}$, $3VO' = 12$, $VO' = 4 \text{ cm}$, $VO = 16 \text{ cm}$.

2. Test de evaluare

I. 1. D. 2. C. 3. B. 4. B. 5. A. 6. B. II. 1. a) 12 cm ; b) 90° ; c) $3\sqrt{2} \text{ cm}$. **2.** a) $4\sqrt{5} \text{ cm}$; b) 60° ; c) $d(M, (VBC)) = d(O, (VBC)) : 2 = \sqrt{3} \text{ cm}$.

Unitatea de învățare 5. ARII ȘI VOLUME ALE UNOR CORPURI GEOMETRICE

Lecția 1. Cubul. Distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul cubului. Aria laterală, aria totală și volumul cubului

1. 8 cm^3 . **2.** 64 cm^2 . **3.** 2 cm . **4.** 6 cm . **5.** $3\sqrt{3} \text{ cm}$. **6.** 96 cm^2 . **7.** $l = 6 \text{ cm} \Rightarrow S_m = 72 \text{ cm}^2$. **9.** a) 60° ; b) $d(B', AB) = BB' = 6 \text{ cm}$; c) $d(B', AD) = B'A = 6\sqrt{2} \text{ cm}$. **10.** b) $l = AB = 2 \text{ cm}$, $AC = 2\sqrt{2} \text{ cm}$, $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = 2\sqrt{3} \text{ cm}^2$. **11.** a) $\gamma_{\text{cub mare}} = 216 \text{ cm}^3$; b) $\gamma_{\text{cub mic}} = 8 \text{ cm}^3$; c) $l_{\text{cubuleț}} = 2 \text{ cm}$; d) 8 cubulețe; e) 1 cubuleț; f) 6 cubulețe; g) 12 cubulețe. **12.** a) $\mathcal{A}_{\text{cub}} = \mathcal{A}_{\text{tot}} = 6l^2 = 96 \text{ cm}^2$; b) $\angle(AD', BD) = \angle(BC', BD) = \angle DBC' = 60^\circ$; c) $D'D \perp (ABC)$, $DA \perp AB$, $DA, AB \subset (ABC) \Rightarrow D'A \perp AB$; d) $D'A \perp AB \Rightarrow d(D', AB) = D'A = l\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \text{ cm}$; e) Fie $\{O\} = AC \cap BD$. Cum $ABCD$ este pătrat, avem $CO \perp BD$, $CC' \perp (ABC)$, $CO, BD \subset (ABC) \Rightarrow C'O \perp BD$. Fie $CT \perp C'O$, $T \in C'O$, $BD \perp C'O$ și $BD \perp CO \Rightarrow BD \perp (COC')$, $CT \subset (COC') \Rightarrow BD \perp CT$, $BD, C'O \subset (BDC')$ și $BD \cap C'O = \{O\}$ avem $CT \perp (BDC') \Rightarrow d(C, (BDC')) = CT = \frac{CC' \cdot CO}{C'O} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$. **13.** a) $d = BD' = l\sqrt{3} = 12\sqrt{3} \text{ cm}$; b) $\Delta ACB'$ este echilateral cu latura $AB' = 12\sqrt{2} \text{ cm} \Rightarrow \mathcal{A}_{\Delta ACB'} = 72\sqrt{3} \text{ cm}^2$; c) $MNPQ$ este pătrat cu latura $MN = 6\sqrt{2} \text{ cm} \Rightarrow \mathcal{P}_{MNPQ} = 24\sqrt{2} \text{ cm}$; d) $CD \perp (ADD')$. Fie $DO \perp PQ$, $DO, PQ \subset (ADD') \Rightarrow d(C, PQ) = CO$; ΔCDO ($\angle CDO = 90^\circ$), $CD = 12 \text{ cm}$, $DO = \frac{PQ}{2} = 3\sqrt{2} \text{ cm} \Rightarrow CO^2 = CD^2 + DO^2 = 162 \Rightarrow CO = 9\sqrt{2} \text{ cm}$; e) $MN \parallel PQ$, $BC \parallel AD \Rightarrow \angle(MN, BC) = \angle(PQ, AD) = 45^\circ$ (ΔDPQ dreptunghic isoscel); f) $\angle(MN, (ABC)) = \angle(MN, \text{pr}_{(ABC)} MN) = \angle(MN, AQ) = 45^\circ$. **14.** a) $\mathcal{A}_{\text{at}} = 4 \cdot \mathcal{A}_f = 4l^2 = 576 \text{ cm}^2$; b) $(AMN) = (ABMN)$, deoarece $AB \parallel MN$; $(ABC) = (ABCD)$, deoarece $CD \parallel AB$; $(AMN) \cap (ABC) = AB$. În planul (ABC) avem $CB \perp AB$. În planul (AMN) avem $MB \perp AB$ ($T3 \perp$), așadar $\angle((AMN), (ABC)) = \angle MBC \Rightarrow \sin(\angle MBC) = \frac{MC}{MB} = \frac{6}{6\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$; c) Fie P mijlocul muchiei $AA' \Rightarrow D'P \parallel NA$, iar $NA \subset (AMN)$, prin urmare $D'P \parallel (AMN)$. Deci $d(D', (AMN)) = d(P, (AMN))$. Fie $PQ \perp AN$, $Q \in AN$, $MN \parallel AB$ și $AB \perp (ANP)$. Avem

$MN \perp (ANP)$, dar $PQ \subset (ANP)$, deci $MN \perp PQ$, $PQ \perp AN$, $AN \cap MN = \{N\}$, $AN, MN \subset (AMN) \Rightarrow PQ \perp (AMN) \Rightarrow d(P, (AMN)) = PQ$; ΔAPN este dreptunghic în $P \Rightarrow PQ = \frac{PN \cdot PA}{AN} = \frac{12\sqrt{5}}{5} \text{ cm}$. **15.** Dacă se îndepărtează

cuburile exterioare vopsite, rămâne în interior un cub cu muchia de 3 cm . Cubulețele cu toate fețele fără vopsea vor fi în interiorul cubului mare în număr de $3^3 = 27$. **16.** Sunt 5 fețe ale cutiei care sunt în contact cu cubulețele. Pe fundul cutiei sunt în contact 16 cubulețe. Dacă facem abstracție de ele, pe două fețe laterale opuse mai avem câte $3 \cdot 4 = 12$ cubulețe în contact cu pereții cutiei, iar pe celelalte două fețe opuse au rămas câte șase cubulețe nenumărate. În total vor fi $16 + 2 \cdot 12 + 2 \cdot 6 = 52$ de cubulețe în contact cu pereții cutiei.

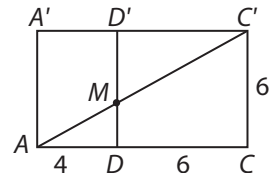
Autoevaluare

1. d). 2. c). 3. b). 4. a). 5. a).

Lecția 2. Paralelipipedul dreptunghic. Distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul paralelipipedului dreptunghic. Aria și volumul paralelipipedului dreptunghic

2. 120 m^3 . **3.** 62 cm^2 . **4.** $5\sqrt{5} \text{ cm}$. **5.** 5 cm . **6.** $a = 25 \text{ cm}$. **7.** $AB = 2 \text{ cm}$. **8.** b) $\angle(AC', (ABC)) = \angle C'AC = 45^\circ$. **9.** $\mathcal{V} = 5 \cdot 12 \cdot 20 = 1200 \text{ cm}^3$, $1 \text{ ml} = 1 \text{ cm}^3$. Se vor umple $1200 : 100 = 12$ pahare. **10.** a) $\gamma_{\text{apă}} = 132 \text{ dm}^3 = 132 \ell$ apă ($1 \text{ dm}^3 = 1 \ell$);

b) $AM + MC'$ este minimă $\Leftrightarrow \{M\} = DD' \cap AC'$ pe desfășurarea paralelipipedului; $d(M, (ABC)) = MD = 24 \text{ cm}$.



11. a) $\mathcal{V} = 864 \text{ cm}^3$; b) $PO \parallel D'C$, dar $D'C \subset (ACD')$, deci $OP \parallel (ACD')$. **12.** $\mathcal{A}_b = 80 \cdot 25 = 2000 \text{ cm}^2$. Nivelul apei se va ridica cu $5000 : 2000 = 2,5 \text{ cm}$. **13.** Cubulețele cu exact o față albastră sunt în mijlocul fiecărei fețe: $2 \cdot 2 + 6 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 22$ cubulețe. **14.** Scara se descompune în 6 paralelipipede dreptunghice identice; $\gamma_{\text{scări}} = 6 \cdot 0,2 \cdot 2 \cdot 5 = 12 \text{ m}^3$; $m = \rho \cdot \mathcal{V} = 130 \cdot 12 = 1560 \text{ kg}$. **15.** a) $\mathcal{A}_{\text{tot}} = 2250 \text{ cm}^2$; b) $BM = 10 \text{ cm}$.

Autoevaluare

1. a). 2. b). 3. b). 4. d). 5. c).

Lecția 3. Prisma dreaptă cu baza triunghi echilateral, pătrat sau hexagon regulat. Distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul prisme. Aria laterală, aria totală și volumul prisme regulate

1. $\mathcal{A}_{\text{tot}} = 320 \text{ cm}^2$, $\mathcal{V} = 384 \text{ cm}^3$. **2.** $16\sqrt{2} \text{ cm}^2$. **3.** 28 cm^3 . **4.** 18 cm . **5.** $1080\sqrt{3} \text{ cm}^3$. **6.** 27 cm . **8.** b) $d(D', AC') = 4\sqrt{3} \text{ cm}$. **9.** b) $d(D, (AD'C)) = \frac{12\sqrt{7}}{7} \text{ cm}$. **10.** 130 cm^2 . **11.** a) $\frac{4\sqrt{19}}{19}$; b) $\frac{12\sqrt{57}}{19} \text{ cm}$. **12.** a) $13824\sqrt{3} \text{ cm}^3$. **13.** a) 162 cm^2 ; b) $\angle A'MA = 60^\circ$. **14.** a) $AC = 12 \text{ cm}$; b) $\frac{4}{5}$. **15.** Latura bazei prisme este de $2\sqrt{3} \text{ cm}$, iar înălțimea cutiei de 60 cm ; $\mathcal{A}_{\text{min}} = 756\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

Autoevaluare

1. d). 2. a). 3. b). 4. c). 5. c).

Leția 4. Piramida regulată. Distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul piramidei regulate. Aria laterală, aria totală și volumul piramidei regulate

2. $l = 12$ cm, $h = 4\sqrt{6}$ cm, $\gamma = 144\sqrt{2}$ cm³. 3. a) $l = 6\sqrt{2}$ cm; b) $2\sqrt{2}$ cm; c) Fie O centrul triunghiului echilateral TEM ; atunci $TO = 2\sqrt{6}$ cm și $SO = 4\sqrt{3}$ cm; $\text{tg}(\angle(ST, (TEM))) = \text{tg}(\angle(ST, TO)) = \text{tg}(\angle STO) = \sqrt{2}$. 4. $l = 24$ cm $\Rightarrow a_p = \frac{2 \cdot \mathcal{A}_{\text{lat}}}{\mathcal{P}_b} = 16$ cm $\Rightarrow h = 4\sqrt{13}$ cm $\Rightarrow$

$\gamma_{\text{piramidă}} = 192\sqrt{39}$ cm³. 5. Fie O centrul triunghiului echilateral ABC . Atunci $\angle VAO = 60^\circ \Rightarrow \angle AVO = 30^\circ \Rightarrow AB = 10\sqrt{3}$ cm și $VO = 10\sqrt{3}$ cm; $\gamma_{VABC} = 750$ cm³; $a_p = 5\sqrt{13}$ cm $\Rightarrow \mathcal{A}_{\Delta VBC} = 25\sqrt{39}$ cm² $\Rightarrow d(A, (VBC)) = \frac{3 \cdot \gamma_{VABC}}{\mathcal{A}_{\Delta VBC}} = \frac{30\sqrt{39}}{13}$ cm. 6. a) $VO = 2$ cm, $\gamma_{\text{piramidă}} = 24\sqrt{3}$ cm³; b) Fie M mijlocul laturii BC ; atunci $\mathcal{A}_{\Delta VAM} = \frac{VO \cdot AM}{2} = \frac{d(M, AV) \cdot VA}{2} \Rightarrow d(M, VA) = \frac{6\sqrt{39}}{13}$ cm;

c) Fie $BT \perp AV$, $T \in AV$. Din $\Delta BAT \equiv \Delta CAT$ (LUL) $\Rightarrow BT = CT$ și $\angle CTA = \angle BTA = 90^\circ$, deci $\angle((AVB), (VAC)) = \angle BTC$; $TM = \frac{6\sqrt{39}}{13}$ cm, $\sin(\angle BTC) = \frac{TM \cdot BC}{TB \cdot TC} = \frac{\sqrt{39}}{8}$. 7. a) $AB = 30$ cm $\Rightarrow VO = 15$ cm; b) Fie M mijlocul lui AB ; atunci $\text{pr}_{(VOC)} VA = VM \Rightarrow \angle(VA, (VOC)) = \angle(VA, VM) = \angle AVM$. În ΔAVM – dreptunghic în M : $\text{ctg}(\angle AVM) = \frac{VM}{AM} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

8. $\mathcal{A}_{\text{tot}} = 100(1 + \sqrt{3})$ cm², $\gamma = \frac{500\sqrt{2}}{3}$ cm³. 9. $l = 12$ cm, $h = 8$ cm $\Rightarrow a_p = 10$ cm $\Rightarrow \mathcal{A}_{\text{lat}} = 240$ cm²; d) (O , față laterală) $= \frac{h \cdot a_b}{a_p} = 4,8$ cm. 10. a) $l = 12$ cm, $a_p = 10$ cm, $h = 8$ cm $\Rightarrow \gamma_{\text{piramidă}} = 384$ cm³; b) $\angle(VA, (ABC)) = \angle(VA, \text{pr}_{(ABC)} VA) = \angle(VA, AO) = \angle VAO$, unde O este centrul bazei $ABCD$; $\text{tg}(\angle VAO) = \frac{VO}{OA} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; c) Fie M mijlocul lui (BC) ; $\angle((VBC), (ABC)) = \angle(VM, OM) = \angle VMO$, $\sin(\angle VMO) = \frac{VO}{VM} = 0,8$. 11. a) $AO = 18\sqrt{2}$ cm $\Rightarrow AC = 36\sqrt{2}$ cm $\Rightarrow AB = 36$ cm, $\gamma_{\text{cutie}} = 7776\sqrt{7}$ cm³;

b) $\Delta BCF \equiv \Delta DCF$ (LUL) $\Rightarrow BF = DF \Rightarrow BF + FD = 2BF$ – minim dacă $BF \perp VC$ (respectiv $DF \perp VC$); $VC \perp BF$, $VC \perp DF$, $BF, DF \subset (BDF)$ cu $DF \cap BF = \{F\} \Rightarrow VC \perp (BDF)$, $OF \subset (BDF) \Rightarrow OF \perp VC \Rightarrow OF$ este înălțimea corespunzătoare ipotenuzei în ΔVOC dreptunghic în $O \Rightarrow OF = \frac{VO \cdot OC}{VC} = 6\sqrt{14}$ cm; $\mathcal{A}_{\Delta BFD} = \frac{FO \cdot BD}{2} = 216\sqrt{7}$ cm²; c) $VF \perp (FBD)$, $O \in (FBD) \Rightarrow \text{pr}_{(FBD)} VO = FO \Rightarrow \angle(VO, (FBD)) = \angle(VO, FO) = \angle VOF$; $\cos(\angle VOF) = \frac{OF}{VO} = \frac{\sqrt{2}}{3}$. 12. 324 cuburi de gheață. 13. a) $a_p = \sqrt{21}$ m $\Rightarrow \mathcal{A}_{\text{lat}} = 12\sqrt{21}$ m²;

cum $12\sqrt{21} \leq 56 \Leftrightarrow 189 \leq 196$ (A), deducem că ajung 56 m² de pânză; b) $\mathcal{A}_{\text{bază}} = 24\sqrt{3}$ m², iar acum $41^2 = 1681 < 1728 < 1764 = 42^2$, rezultă că $41 < \mathcal{A}_{\text{bază}} < 42$. Un pachet acoperă $4 \cdot 50^2 = 10000$ cm² = 1 m² de podea, deci sunt necesare 42 de pachete. 14. a) $AB = 8$ cm $\Rightarrow \mathcal{A}_{\text{bază}} = 96\sqrt{3}$ cm², $\gamma = 256\sqrt{3}$ cm³; b) Fie M mijlocul lui BO , atunci în triunghiul AOB echilateral, $AM \perp BE$; $VO \perp (ABC)$, $AM \subset (ABC) \Rightarrow VO \perp AM$. Cum $VO, BE \subset (VBE)$ cu $VO \cap BE = \{O\}$ și $AM \perp VO$, $AM \perp BE$, deducem că $AM \perp (VBE)$, deci $d(A, (VBE)) = AM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ cm; c) $VO = OB$, $\angle VOB = 90^\circ$ ($VO \perp (ABC)$, $OB \subset (ABC)$) $\Rightarrow \Delta VOB$ dreptunghic isoscel de bază $VB \Rightarrow \angle VBO = 45^\circ$, așadar $\angle(VB, (ABC)) = 45^\circ$. 15. a) Fie $DB \cap CO = \{T\}$; cum $AB CDEF$ hexagon regulat de centru $O \Rightarrow OBCD$ – romb $\Rightarrow T$ mijlocul lui BD și al lui OC ; $VT = 5$ cm, $OT = \frac{OC}{2} = 3$ cm, deci $VO = 4$ cm, atunci

$\gamma_{\text{piramidă}} = 72\sqrt{3}$ cm³; b) MT – linie mijlocie în $\Delta VOC \Rightarrow MT \parallel VO$ și cum $VO \perp (ABC) \Rightarrow MT \perp (ABC)$, dar $MT \subset (MBD) \Rightarrow (MBD) \perp (ABC) \Rightarrow \angle((MBD), (ABC)) = 90^\circ$; c) $MT \perp (ABC) \Rightarrow \angle(MA, (ABC)) = \angle(MA, \text{pr}_{(ABC)} MA) = \angle(MA, AT) = \angle MAT$; $\text{tg}(\angle MAT) = \frac{MT}{AT} = \frac{\frac{1}{2}VO}{AT} = \frac{2\sqrt{7}}{21}$.

Autoevaluare

1. a). 2. c). 3. b). 4. c). 5. a).

Leția 5. Trunchiul de piramida regulată. Distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul trunchiului de piramidă regulată. Aria laterală, aria totală și volumul trunchiului de piramidă regulată

2. $\frac{\gamma_{\text{tetraedru mic}}}{\gamma_{ABCD}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow \gamma_{\text{trunchi}} = \frac{7}{8} \cdot \gamma_{ABCD} = \frac{87,5}{100} \cdot \gamma_{ABCD} \Rightarrow 87,5\%$. 3. a) $\frac{h_{\text{piramidă mică}}}{h_{\text{piramidă mare}}} = \frac{l}{L} \Rightarrow$

$\Rightarrow h_{\text{piramidă mică}} = 9$ cm $\Rightarrow h_{\text{trunchi}} = 27 - 9 = 18$ cm; b) $a_b = \sqrt{3}$ cm, $a_B = 3\sqrt{3}$ cm; $a_{\text{trunchi}} = 4\sqrt{21}$ cm $\Rightarrow \mathcal{A}_{\text{lat}} = 144\sqrt{21}$ cm². 4. a) Înălțimea minimă a unui creion coincide cu înălțimea trunchiului. Din $3 \cdot AB + 3 \cdot A'B' + 3 \cdot AA' = 78 + 60\sqrt{3}$ deducem că $AA' = 26$ cm. Notăm cu O și O' centrele triunghiurilor echilaterale ABC , respectiv $A'B'C'$. În trapezul dreptunghic $OAA'O'$ cu $\angle O = \angle O' = 90^\circ$ și bazele $A'O' = 2$ cm și $AO = 18$ cm, obținem $OO' = 2\sqrt{105}$ cm; b) $\gamma = 546\sqrt{35}$ cm³. 5. a) $\mathcal{A}_b = 100\sqrt{3}$ cm², $\mathcal{A}_B = 400\sqrt{3}$ cm² $\Rightarrow \gamma_{\text{apă}} = \frac{h}{3} \cdot 700\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow h = 4\sqrt{3}$ cm; b) $a_b = O'B' = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm, $a_B = \frac{20\sqrt{3}}{3} \Rightarrow a_B = 2 \cdot a_b \Rightarrow OB = 2 \cdot O'B'$, de unde proiecția lui B' pe OB (punctul P) e mijlocul lui OB . Analog, Q este mijlocul lui OC . Atunci PQ este linie mijlocie în ΔOBC , de unde $PQ = 20$ cm și $PQ \parallel BC$. Notăm cu M mijlocul lui PQ și avem $OM = \frac{a_b}{2} = \frac{10\sqrt{3}}{3} \Rightarrow AM = \frac{50\sqrt{3}}{3}$ cm,

$AM \perp PQ$. Obținem $\mathcal{A}_{\Delta APQ} = \frac{AM \cdot PQ}{2} = \frac{500\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^2$;

c) $\angle((A'PQ), (ABC)) = \angle(A'M, AM) = \angle A'MA$. Notăm cu T proiecția lui A' pe planul (ABC) ; atunci T este mijlocul lui $AO \Rightarrow TO = a_B = \frac{20\sqrt{3}}{3} \text{ cm} \Rightarrow TM = 10\sqrt{3} \text{ cm}, A'M = 2\sqrt{87} \text{ cm} \Rightarrow \sin(\angle A'MA) = \frac{A'T}{A'M} = \frac{2\sqrt{29}}{29}$. 6. a) Notăm cu O, O' și M' centrul bazei mari, centrul bazei mici și mijlocul muchiei $B'C'$ în trunchiul de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$. Atunci $OO' \perp (A'B'C'), O'M' \perp B'C'$ și $O'M', B'C' \subset (A'B'C') \Rightarrow OM' \perp B'C' \Rightarrow d(O, B'C') = OM'$; $a_B = \frac{R_B}{2} = \frac{25\sqrt{15}}{3} \text{ cm} \Rightarrow a_b = \frac{3}{5}a_B = 5\sqrt{15} \text{ cm}, OO' = \frac{10\sqrt{21}}{3} \text{ cm} \Rightarrow OM' = \frac{5\sqrt{219}}{3} \text{ cm}$; b) $\angle(AA', (ABC)) = \angle(AA', \text{pr}_{(ABC)} AA') = \angle(AA', AO) = \angle A'AO$; $\text{tg}(\angle A'AP) = \frac{A'P}{AP} = \frac{\sqrt{35}}{10}$; c) $a_{\text{trunchi}} = 20 \text{ cm} \Rightarrow \mathcal{A}_{\text{lat}} = 2400\sqrt{5} \text{ cm}^2$.

7. $\mathcal{A}_{\text{lat}} = 512\sqrt{5} + 640 \text{ cm}^2$; $\gamma = \frac{13312}{3} \text{ cm}^3$. 8. $\gamma_{\text{piramidă mică}} = \gamma_{\text{piramidă mare}} - \gamma_{\text{trunchi}} = \frac{1}{8} \gamma_{\text{piramidă mare}} \Rightarrow \frac{\gamma_{\text{piramidă mică}}}{\gamma_{\text{piramidă mare}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow \frac{l}{L} = \frac{1}{2}$, unde l și L reprezintă muchia bazei mici, respectiv cea a bazei mari din trunchi, atunci $l = 6 \text{ cm}, a_{\text{trunchi}} = 3\sqrt{5} \text{ cm}$ și $\mathcal{A}_{\text{lat}} = 108\sqrt{5} \text{ cm}^2$. 9. Fie l muchia bazei mici a trunchiului; atunci $\frac{1}{12} = \frac{2}{3} \Rightarrow l = 8 \text{ cm}; a_{\text{trunchi}} = 2\sqrt{3} \text{ cm}; \mathcal{A}_{\text{tot}} = 80\sqrt{3} + 208 \text{ cm}^2; h_{\text{trunchi}} = 2\sqrt{2} \text{ cm} \Rightarrow \gamma_{\text{trunchi}} = \frac{608\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3$. 10. a) Trunchiurile de piramidă sunt congruente, prin urmare planul $(MNPQ)$ intersectează înălțimea OO' în mijlocul acesteia, notăm cu T acest punct. Cum $\frac{MN}{AB} = \frac{45}{90} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{MT}{AO} = \frac{1}{2}$ și $\frac{O'T}{OO'} = \frac{1}{2}$, deducem că $\frac{O'T}{O'O} = \frac{MT}{AO}$, $\angle AOO' = \angle MTO' = 90^\circ \Rightarrow \Delta O'TM \sim \Delta O'TA \Rightarrow \angle OAO' \equiv \angle TMO'$, dar $OA \parallel TM$, deci A, M, O' – coliniare; b) $MO'CP$ – paralelogram, deci $MO' \parallel PC' \Rightarrow AM \parallel PC', PC' \subset (B'C'PN) \Rightarrow AM \parallel (B'C'PN) \Rightarrow \angle(AM, (B'C'PN)) = 0^\circ$; c) $\gamma = 15 \cdot \gamma_{\text{modul}} = 6,37875 \text{ m}^3$. 11. a) Notăm cu O și O' centrele bazelor $ABCD$, respectiv $A'B'C'D'$; $AB = 2A'B' = 12 \text{ m}, AO = 6\sqrt{2} \text{ m}, A'O' = 3\sqrt{2} \text{ m}$ și $AA' = 6 \text{ m}$, de unde $OO' = 3\sqrt{2} \text{ m} \Rightarrow \gamma = 252\sqrt{2} \text{ m}^3$; b) În trapezul isoscel $ABB'A'$, $\angle A'AB = 60^\circ \Rightarrow \angle AA'B' = 120^\circ$ și cum $AA' = A'B'$ deducem că $\Delta A'AB'$ este isoscel de bază $AB' \Rightarrow \angle A'AB' = (180^\circ - 120^\circ) : 2 = 30^\circ \Rightarrow \angle B'AB = 30^\circ$. Cum $\angle B'AB = 30^\circ$ și $\angle B'BA = 60^\circ$, obținem că $\angle AB'B = 90^\circ \Rightarrow AB' \perp BB' \Rightarrow d(A, BB') = AB' = 6\sqrt{3} \text{ m}$; c) Aflăm $\sin(\angle((ABB'), (BCC')))$.

$(ABB') \cap (BCC') = BB'$
 $\left. \begin{array}{l} AB' \perp BB' \text{ cu } AB' \subset (ABB') \\ \text{Analog, } CB' \perp BB' \text{ cu } CB' \subset (BCC') \end{array} \right\} \Rightarrow \angle((ABB'), (BCC')) = \angle(AB', CB') = \angle AB'C$. $\Delta B'AC$ este isoscel de bază $AC = 12\sqrt{2} \text{ m}$. Aflăm din $\Delta OO'B'$ dreptunghic în O' , că $B'O = 6 \text{ m}$ și din $\mathcal{A}_{\Delta AB'C} = \frac{B'O \cdot AC}{2} = \frac{AB' \cdot CB' \cdot \sin(\angle AB'C)}{2}$ obținem $\sin(\angle AB'C) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. 12. a) $AB = 10 \text{ cm}, A'B' = 6 \text{ cm} \Rightarrow a_B = 5 \text{ cm}, a_b = 3 \text{ cm}; \frac{\sqrt{2}}{7} = \frac{a_B - a_b}{MM'} \Rightarrow MM' = 7\sqrt{2} \text{ cm}, BB' = \sqrt{102} \text{ cm}$; b) $\frac{5\sqrt{47}}{7} \text{ cm}$; c) $\text{pr}_{(ACC'A')} BB' = OO'$, unde O și O' sunt centrele bazei mari, respectiv bazei mici. Atunci $\angle(BB', (ACC'A')) = \angle(BB', OO')$, având cosinusul $\frac{2\sqrt{51}}{51}$. 13. a) Unghiul dintre o față laterală și planul bazei mari este unghiul dintre apotema trunchiului și apotema bazei mari. Atunci $a_B - a_b = \frac{a_{\text{trunchi}}}{2} = 4\sqrt{3} \text{ cm}$ și cum $a_b = 6\sqrt{3} \text{ cm}$, deducem că $a_B = 10\sqrt{3} \text{ cm} \Rightarrow h_{\text{trunchi}} = 12 \text{ cm} \Rightarrow \gamma_{\text{trunchi}} = 4704\sqrt{3} \text{ cm}^3$; b) $\gamma_{\text{lunăre mică}} = 8 \cdot 7 \cdot 12 = 672 \text{ cm}^3$. Trebuie să aflăm $n \in \mathbb{N}$ maxim, astfel încât $672 \cdot n \leq \gamma_{\text{trunchi}} < 672(n+1) \Leftrightarrow 672n \leq 4704\sqrt{3} < 672(n+1) \Leftrightarrow n \leq 7\sqrt{3} < n+1 \Leftrightarrow n^2 \leq 147 < (n+1)^2 \Rightarrow n = 12$; c) $\frac{\mathcal{A}_{\text{lat piramidă mică}}}{\mathcal{A}_{\text{lat piramidă mare}}} = \left(\frac{a_b}{a_B}\right)^2 = \frac{9}{25}$, $\mathcal{A}_{\text{lat trunchi}} = 768\sqrt{3} \text{ cm}^2$, $\mathcal{A}_{\text{lat piramidă mare}} = 1200\sqrt{3} \text{ cm}^2$, $\mathcal{A}_{\text{tot piramidă mare}} = 1800\sqrt{3} \text{ cm}^2$. 14. a) $A'B' = 20 \text{ cm}, AB = 40 \text{ cm}, \mathcal{A}_{\text{lat}} = 1800\sqrt{15} \text{ cm}^2$; b) $\Delta C'FB$ este isoscel cu $FC' = FB = 40\sqrt{3} \text{ cm}$ și baza $BC' = 20\sqrt{6} \text{ cm}$ are aria egală cu $600\sqrt{7} \text{ cm}^2$; c) $d(A, (C'FB)) = \frac{20\sqrt{3} \cdot 400\sqrt{3}}{600\sqrt{7}} = \frac{40\sqrt{7}}{7} \text{ cm}$. 15. a) $a_b = 12\sqrt{3} \text{ cm}, a_B = 15\sqrt{3} \text{ cm} \Rightarrow a_{\text{tr}} = 3\sqrt{7} \text{ cm} \Rightarrow \mathcal{A}_{\text{lat}} = 486\sqrt{7} \text{ cm}^2$; b) Fie P proiecția punctului A' pe AO . Atunci $A'POO'$ este dreptunghi cu $A'P = OO' = 6 \text{ cm}, PO = A'O' = 24 \text{ cm} \Rightarrow AP = 30 - 24 = 6 \text{ cm}$, deci triunghiul $A'PA$ este dreptunghic isoscel de bază $AA' \Rightarrow \angle A'AP = 45^\circ; A'P \parallel OO', OO' \perp (ABC) \Rightarrow A'P \perp (ABC) \Rightarrow \text{pr}_{(ABC)} AA' = AP \Rightarrow \angle(AA', (ABC)) = \angle(AA', AP) = \angle A'AP = 45^\circ$; c) Fie $PT \parallel AC, T \in CD$. Cum $AC \perp CD \Rightarrow PT \perp CD$ și, în plus, $\Delta DPT \sim \Delta DAC \Rightarrow \frac{PT}{AC} = \frac{DP}{AD} \Rightarrow \frac{PT}{30\sqrt{3}} = \frac{9}{10} \Rightarrow PT = 27\sqrt{3} \text{ cm}; A'P \perp (ABC), PT \perp DC, PT, DC \subset (ABC) \Rightarrow A'T \perp CD$; în $\Delta A'PT$ ($\angle P = 90^\circ$) $\Rightarrow A'T = 3\sqrt{247} \text{ cm}$.

Autoevaluare

1. a). 2. b). 3. b). 4. c). 5. b).

Leția 6. Cilindrul circular drept. Distanțe și măsuri de unghiuri pe suprafața sau în interiorul cilindrului circular drept.

Aria laterală, aria totală și volumul cilindrului circular drept

2. $G = 8$ cm, $\mathcal{A}_{lat} = 80\pi$ cm², $\mathcal{V} = 200\pi$ cm³. **3.** 54π cm³.

4. $\mathcal{A}_{carton} = 75$ cm². **5.** $\mathcal{A}_{tot} = 8\pi(3 + 2\sqrt{3})$ cm². **6.** $\mathcal{A}_{tot} = 108\pi$ cm². Sunt necesare $1,5 \cdot 108\pi = 162\pi$ g vopsea, deci 511 g vopsea ajung. **8.** a) $R = 3$ cm, $d(C, AP) = CP = 6\sqrt{3}$ cm; b) $d(B, (CAP)) = \frac{9}{2} = 4,5$ cm. **9.** a) $R = 5$ cm, $AO = 10$ cm; b) $\triangle AOB$ – echilateral $\Rightarrow \angle(AO, (DMC)) = \angle AOD = 60^\circ$; c) $\angle AOB = 60^\circ$.

Autoevaluare

1. b). **2.** a). **3.** b). **4.** c). **5.** a).

Leția 7. Conul și trunchiul de con. Distanțe și măsuri de unghiuri pe suprafața sau în interiorul conului circular drept sau trunchiului de con circular drept. Aria laterală, aria totală și volumul conului circular drept, respectiv ale trunchiului de con circular drept

1. $h = 12$ cm $\Rightarrow \mathcal{V} = 72\pi$ cm³. **2.** $h = R = 6$ cm. **3.** $\mathcal{A}_t = \pi R(G + R) \Leftrightarrow R^2 + 8R = 65 \mid +16 \Leftrightarrow (R + 4)^2 = 81 \Rightarrow R = 5$ cm $\Rightarrow \mathcal{A}_{lat} = 40\pi$ cm². **4.** $G = R\sqrt{2} \Rightarrow h = R \Rightarrow \frac{\mathcal{A}_{tot}}{\mathcal{A}_{secțiune}} = \pi(1 + \sqrt{2})$. **5.** $\angle AVB = 180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 30^\circ$.

Fie $AH \perp VB$, $H \in BV$; atunci în $\triangle VAH$ cu $\angle H = 90^\circ$ și $\angle AVH = 30^\circ$ avem $AH = \frac{AV}{2} = 10$ cm, $VH = 10\sqrt{3}$ cm, deci $BH = 20 - 10\sqrt{3}$. Aplicăm teorema lui Pitagora în $\triangle AHB$ ($\angle H = 90^\circ$) și obținem $AB = 10\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$ cm $\Rightarrow R = 5\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1) \Rightarrow h = 5\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1) \Rightarrow \frac{h}{R} = 2 + \sqrt{3}$.

6. Se obține un trunchi de con circular drept cu $G = 10$ cm, $r = 5$ cm, $R = 10$ cm și $h = 5\sqrt{3}$ cm; obținem $\mathcal{A}_{tot} = 275\pi$ cm² și $\mathcal{V} = \frac{875\sqrt{3}\pi}{3}$ cm³. **7.** a) Fie O și O'

centrul bazei mari, respectiv cel al bazei mici. Diagonalele perpendiculare AB' și $A'B$ formează cu bazele triunghiuri dreptunghice isoscele, de unde $OO' = \frac{A'B'}{2} + \frac{AB}{2} = \frac{12 + 18}{2} = 15$ cm. Notăm cu P proiecția lui A' pe AB și aplicăm teorema lui Pitagora în $\triangle A'PA$ ($\angle P = 90^\circ$), de unde $G = AA' = 3\sqrt{26}$ cm; b) $\mathcal{V} = 855\pi$ cm³; c) Unghiul dintre generatoarea AA' și planul bazei mari este $\angle A'AB$. În $\triangle A'AP$ dreptunghic în P , avem $\sin(\angle A'AP) = \frac{A'P}{AA'} = \frac{OO'}{AA'} = \frac{5\sqrt{26}}{26}$. **8.** $\frac{\mathcal{A}_{con mic}}{\mathcal{A}_{con mare}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\mathcal{V}_{con mic}}{\mathcal{V}_{con mare}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{\mathcal{V}_{trunchi}}{\mathcal{V}_{con mic}} = 2\sqrt{2} - 1$. **9.** $\frac{r}{R} = \frac{1}{2} \Rightarrow r = 6$ cm; b) $G_{trunchi} = 3\sqrt{29}$ cm; $\mathcal{A}_{lat trunchi} = \pi \cdot 54\sqrt{29}$ cm², $\mathcal{A}_{lat cilindru} = 720\pi$ cm² $\Rightarrow \frac{\mathcal{A}_{lat trunchi}}{\mathcal{A}_{lat cilindru}} = \frac{3\sqrt{29}}{40}$; c) $\mathcal{V}_{lemn eliminat} = \mathcal{V}_{cilindru} - 2 \cdot \mathcal{V}_{trunchi} = 4320\pi -$

$- 2520\pi = 1800\pi$ cm³. **10.** a) (AC este bisectoarea $\angle VAB \Rightarrow \frac{VC}{CB} = \frac{VA}{AB} = \frac{3R}{2R} = \frac{3}{2}$. Deci $\frac{VC}{VB} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{3}{5} \Rightarrow R = 10$ cm $\Rightarrow VB = 30$ cm $\Rightarrow G_{trunchi} = BC = \frac{2}{5}VB =$

$= 12$ cm; b) Fie C' punctul diametral opus lui C , în baza mică a trunchiului. În trapezul isoscel $ABCC'$ avem $AB = 2 \cdot R = 20$ cm, $BC = AC' = 12$ cm și $CC' = 2 \cdot r = 12$ cm. Notăm cu P proiecția lui C pe AB și din $\triangle CPB$ cu $\angle P = 90^\circ$ obținem $CP = 8\sqrt{2}$ cm, iar din $\triangle CPA$ dreptunghic în P găsim $AC = 8\sqrt{6}$ cm. Atunci $\mathcal{A}_{\triangle CAB} = \frac{CP \cdot AB}{2} = \frac{AC \cdot BC \sin(\angle ACB)}{2}$, de unde $\sin(\angle ACB) = \frac{5\sqrt{3}}{9}$.

Autoevaluare

1. d). **2.** b). **3.** $P_1: A; P_2: F; P_3: A; P_4: A$. **4.** a) $G = 24$ cm, $R = 12$ cm $\Rightarrow \mathcal{A}_{lat} = 288\pi$ cm²; b) $h = 12\sqrt{3}$ cm $\Rightarrow \mathcal{V} = 576\sqrt{3}$ cm³. **5.** b).

Leția 8. Sfera: arie și volum

1. $\mathcal{A} = 144\pi$ cm², $\mathcal{V} = 288\pi$ cm³. **2.** $\mathcal{V} = \frac{256\pi}{3}$ cm³. **3.** $\mathcal{A}_{sferă} = 48\pi$ cm². **4.** $R = 4$ cm. **5.** 9 cm. **6.** Raza cercului de secțiune este 5 cm $\Rightarrow \angle(OC, (ABC)) = 60^\circ$.

7. Latura cubului = 16 cm $\Rightarrow$ sunt necesari cel puțin $6 \cdot 256 = 1536$ cm². **8.** $R = 3$ unități. **9.** a) $\mathcal{A} = 4\pi r^2 = 16\pi$ cm²; b) Raza cilindrului este 2 cm, iar înălțimea lui este de $4 \cdot 3 = 12$ cm. Astfel volumul apei din cilindru este egal cu volumul cilindrului: $\mathcal{V} = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 4 \cdot 12 = 48\pi$ cm³ $> 150,7$ cm³ > 150 ml. **10.** $\mathcal{V}_{înghețată} = \mathcal{V}_{con} + \mathcal{V}_{semisferă} = 810\pi$ cm³ înghețată.

Autoevaluare

1. a). **2.** d). **3.** b). **4.** c). **5.** c).

RECAPITULARE ȘI EVALUARE

1. Probleme recapitulative

1. b) $2\sqrt{2}$ cm. **2.** b) 30° . **3.** b) 5 cm. **4.** a) $288\sqrt{2}$ cm³; b) $\frac{6\sqrt{66}}{5}$ cm. **5.** b) $\angle(A'C, (ABC)) = \angle A'CA$; $\tan(\angle A'CA) = \frac{6}{13}$. **6.** a) $\mathcal{V}_{aer} = 24$ m³; b) 40 m². **7.** a) $d(B, (CMM')) = BM = 3$ cm; b) $\angle(AC', (CMM')) = \angle(AC', MC') = \angle AC'M$ și $\sin(\angle AC'M) = \frac{AM}{AC'} = \frac{3}{10}$. **8.** a) $\angle((A'BC), (ABC)) = \angle A'BA = 60^\circ$; b) $d(A, (CDD')) = AD = 4$ cm. **9.** b) $\angle((BCE'), (ABC)) = \angle E'CE = 30^\circ$. **10.** a) $d(D, (MNP)) = DP = 4,5$ cm; b) $(MNP) \parallel (AOC)$, unde O este centrul $\triangle BCD$ – echilateral $\Rightarrow \angle(DC, (MNP)) = \angle(DC, (ACO)) = \angle DCT = 30^\circ$, cu T mijlocul lui BD . **11.** a) $3\sqrt{2}$ cm; b) $\tan(\angle(VB, (ABC))) = \tan(\angle VBO) = \frac{1}{2}$. **12.** a) $\mathcal{A}_{\triangle PBD} = \frac{128\sqrt{15}}{5}$ cm² < 100 cm²; b) $\sin(\angle BPD) = \frac{\sqrt{15}}{4}$. **13.** a) $d(M, AB) = 5\sqrt{57}$ cm, unde

M este mijlocul lui VO ; b) $\sin(\angle(VAB), \angle(VDE)) = \frac{4\sqrt{3}}{7}$.

14. a) $\gamma_{\text{piramidă inițială}} = 192\sqrt{3} \text{ cm}^3$, $\gamma_{\text{piramidă mică}} = 24\sqrt{3} \text{ cm}^3$,
 $k^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow k = \frac{1}{2} = \frac{h_{\text{piramidă mică}}}{h_{\text{piramidă mare}}}$; b) $\mathcal{A}_{\text{tot}} = 36(6 + 5\sqrt{3}) \text{ cm}^2$.

15. a) $\gamma = 117\sqrt{6} \text{ cm}^3$; b) $\angle(A'B, \angle(ACC'A')) = \angle(A'B, A'O) =$
 $= \angle BA'O$, unde O este mijlocul lui AC ; $\sin(\angle BA'O) = \frac{3\sqrt{22}}{22}$.

16. a) $L = 20 \text{ cm}$, $\gamma = 1750\sqrt{3} \text{ cm}^3$; b) $\angle(A'EC, \angle(D'EC)) =$
 $= \angle(AT, D'T) = \angle A'TD'$, unde T este mijlocul lui CE ;
 $\sin(\angle A'TD') = \frac{4\sqrt{17}}{17}$. 17. a) $R = 6 \text{ cm}$, $h = 10 \text{ cm} \Rightarrow \mathcal{A}_{\text{tot}} =$

$= 192\pi \text{ cm}^2$ în cilindru inițial; b) $\sin \alpha = \frac{4}{5}$. 18. a) 10 cm ;

b) $\sqrt{2}$. 19. a) $h = 4\sqrt{2} \text{ cm}$, $G = 8 \text{ cm}$; $\mathcal{A}_{\text{lat}} = 128\sqrt{2}\pi \text{ cm}^2$,

$\mathcal{A}_{\text{tot}} = (128\sqrt{2} + 272)\pi \text{ cm}^2$, $\frac{\mathcal{A}_{\text{lat}}}{\mathcal{A}_{\text{tot}}} = \frac{8\sqrt{2}}{8\sqrt{2} + 17} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8\sqrt{2} < 17$ (adevărat); b) $\frac{\sqrt{17}}{17}$. 20. b) $r = 3 \text{ cm}$.

2. Test de evaluare

I. 1. C. 2. B. 3. B. 4. D. 5. C. 6. B. II. 1. $\rightarrow$ c). 2. $\rightarrow$ e).

3. $\rightarrow$ a). 4. $\rightarrow$ d). III. 1. a) $\sin(\angle MOA) = \sin(\angle MAO) =$
 $= \frac{VO}{VA} = \frac{\sqrt{33}}{6}$; b) $BC \perp AO$, $VO \subset (ABC)$, $BC \subset (ABC) \Rightarrow$

$\Rightarrow VO \perp BC$, $VO, AO \subset (AMO) \Rightarrow BC \perp (AMO)$, $BC \subset (VBC) \Rightarrow$
 $\Rightarrow (VBC) \perp (AMO) \Rightarrow \angle((AMO), (VBC)) = 90^\circ$. 2. a) $\mathcal{P}_{\Delta VAB} =$
 $= 36 \text{ cm}$, ΔVAB - echilateral $\Rightarrow G = VA = 12 \text{ cm}$, $R =$
 $= \frac{AB}{2} = 6 \text{ cm}$. În desfășurarea plană a suprafeței late-

rale a conului, $\angle AVB = 90^\circ$, deci $L_{\text{fermoar}} = 6\sqrt{5} \text{ cm}$;

b) $\mathcal{A}_{\Delta VAP} = \frac{VO \cdot AP}{2} = \frac{VA \cdot VP \cdot \sin(\angle AVP)}{2}$, unde O este

centrul bazei $\Rightarrow \sin(\angle AVP) = \frac{\sqrt{39}}{26}$.

RECAPITULARE FINALĂ

1. Probleme recapitulative

Algebră

1. b). 2. d). 3. c). 4. b). 5. c). 6. c). 7. c). 8. a). 9. b).
 10. a). 11. b). 12. a). 13. b). 14. c). 15. a). 16. a) 20;
 b) $\emptyset$, 20 submulțimi cu 1 element, 190 submulțimi cu
 2 elemente. În total 211 submulțimi cu cel mult două

elemente. 17. b) $a = c = 6$; $b = 3$. 18. a) $\frac{3}{5} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} =$

$= \frac{2\sqrt{7}}{5} < \frac{7}{5}$; b) $a - b = -2\sqrt{2} \Rightarrow (a - b + 2\sqrt{2})^{1000} =$

$= 0^{1000} = 0$. 19. a) 31; b) $2^n \cdot 31 \leq 3000 \Rightarrow 2^n \leq 96 \Rightarrow n \leq$
 ≤ 6 , deci sunt 7 elemente. 20. $5 \cdot 50 - 2 \cdot (100 - 50) =$
 $= 150 < 300$; b) Fie c numărul de răspunsuri corecte;
 atunci $5c - 2(100 - c) \geq 300$, deci $c \geq 72$. 22. b) $a \in \{2, 3,$

$5, 6\}$. 23. b) $x \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right] \setminus \{-1\}$. 24. b) $\frac{2a+6}{a^2+4a+3} =$

$= \frac{2}{a+1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow a+1 \in \{-2, -1, 1, 2\} \Rightarrow a \in \{-3, -2, 0, 1\}$,

dar $a \in \mathbb{Z} \setminus \{-3, -1\} \Rightarrow a \in \{-2, 0, 1\}$. 25. a) $E(x) = 7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 12 = 7 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 5 = 0 \Rightarrow S = \{-5, -1\}$;

b) $E(x) = x^2 + 6x + 12 = (x+3)^2 + 3 \geq 3$, iar valoarea
 minimă 3 se obține pentru $x = -3$. 26. a) $m = 12$;

b) $2f\left(\frac{a-b}{2}\right) + f(b) - f(a) = \frac{a-b}{3} - 4 + \frac{b}{3} - 2 - \frac{a}{3} + 2 = -4 \in$

$\in \mathbb{Z}$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$. 27. a) $G_f \cap G_g = \{A(4, 0)\}$;

b) $\sin(\angle(G_f, G_g)) = \frac{3\sqrt{10}}{10}$. 28. $M(6+3\sqrt{2}, 6+3\sqrt{2})$,

$N(6-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}-6)$; b) $\frac{7\sqrt{6}}{3}$. 29. a) 1; b) $\{M(0, 1)\} =$

$= AB \cap Oy$. 30. a) $\left[-\frac{29}{2}, -\frac{19}{2}\right]$; b) $A(0, 3)$, $B(-2, 5)$,

$C(-6, 0) \Rightarrow \mathcal{A}_{ABCO} = \mathcal{A}_{\Delta ABO} + \mathcal{A}_{\Delta BCO} = 18 \text{ um}$.

Geometrie

1. c). 2. b). 3. d). 4. c). 5. d). 6. c). 7. b). 8. d). 9. a). 10. b).

11. a). 12. a). 13. d). 14. d). 15. d). 16. a) $\mathcal{A}_{\text{tot}} = 6l^2 =$
 $= 5400 \text{ cm}^2 > \text{Aria colii} = 5000 \text{ cm}^2$; b) $DC' \parallel AB'$ deci
 $\angle(AO, DC') = \angle(AO, AB') = \angle B'AO = 30^\circ$, deoarece AO
 este bisectoarea $\angle B'AC$ al triunghiului echilateral $AB'C$.

17. a) $\sin(\angle A'CA) = \frac{AA'}{A'C} = \frac{l}{l\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; b) $d(B', (ABC')) =$

$= B'O = \frac{l\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \text{ cm}$. 18. a) $\mathcal{A}_{\Delta ADM} = \frac{AD \cdot AB}{2} = 9 \text{ cm}^2$;

b) $DD' \perp (ABC)$, fie $DN \perp AM$, $DN, AM \subset (ABC) \stackrel{T_{3,1}}{\Rightarrow} D'N \perp$
 $\perp AM$, deci $d(D', AM) = D'N$; în ΔABM cu $\angle B = 90^\circ$ avem,

din teorema lui Pitagora, $AM = \frac{3\sqrt{17}}{2} \text{ cm}$, de unde

obținem $D'N = \frac{15\sqrt{2}}{\sqrt{17}} \text{ cm} = \frac{15\sqrt{34}}{17} \text{ cm}$. 19. a) În $\Delta CA'D'$:

$\angle D' = 90^\circ$, $AD = 12 \text{ cm} = \frac{A'C}{2}$, deci $\angle D'CA' = 30^\circ$; b) Fie

$AT \perp A'B \Rightarrow AT = d(A, (BCD')) = \frac{AB \cdot AA'}{A'B} = 4\sqrt{6} \text{ cm}$.

20. a) $\gamma = \mathcal{A}_b \cdot h = 25\sqrt{3} \cdot 10\sqrt{3} = 750 \text{ cm}^3$; b) Punctele
 A, C, N sunt coliniare $\Rightarrow \Delta ABN$ este dreptunghic în $B \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle ANB = 30^\circ \Rightarrow AN = 20 \text{ cm}$, $BN = 10\sqrt{3} \text{ cm} = B'B \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle B'NB = 45^\circ$. 21. a) $\frac{l^3\sqrt{2}}{12} = 18\sqrt{2} \Rightarrow l = 6 \text{ cm}$;

$\angle(BC, (BMN)) = \angle(BC, BN) = \angle CBN = 30^\circ$ (BN este bisec-

toare în ΔBCD echilateral. 22. a) $\mathcal{A}_{\text{lat}} = 256\sqrt{10} \text{ cm}^2$;
 $\mathcal{A}_{\text{lat}} > 800 \text{ cm}^2 = 0,08 \text{ m}^2$; b) Fie M și N mijloacele laturi-

lor UE , respectiv DC . Din $UE \parallel LC \Rightarrow \angle((DUE), (DLC)) =$

$= \angle(DM, DN) = \angle MDN \Rightarrow \sin(\angle MDN) = \frac{DO \cdot MN}{DM \cdot DN} = \frac{3}{5}$.

23. a) $d(A', BC) = 10\sqrt{2} \text{ cm}$; b) $\mathcal{A}_{\Delta A'OC} = \frac{OO' \cdot A'C'}{2} =$
 $= \frac{A'O \cdot OC' \cdot \sin(\angle A'OC')}{2} \Rightarrow \sin(\angle A'OC') = \frac{20\sqrt{2}}{33}$.

24. a) $R = 6 \text{ cm}$, $G = 12\pi \Rightarrow \mathcal{A}_{\text{tot}} = \mathcal{A}_{\text{lat}} + 2 \cdot \mathcal{A}_b = 144\pi^2 + 72\pi = 72\pi(2\pi + 1) \text{ cm}^2$; b) π . 25. a) $R = 20 \text{ cm} \Rightarrow h_{\text{con}} = 10\sqrt{5} \text{ cm}$; b) $\mathcal{A}_{\Delta VAB} = \frac{h_{\text{con}} \cdot 2R}{2} = \frac{d(A, VB) \cdot G}{2} \Rightarrow d(A, VB) = \frac{40\sqrt{5}}{3} \text{ cm} \Rightarrow d(A, VB) < 30 \text{ cm}$.

Teste finale tip Evaluare Națională

Testul 1

Subiectul I. 1. c). 2. a). 3. d). 4. b). 5. c). 6. a).

Subiectul al II-lea. 1. d). 2. b). 3. c). 4. c). 5. a). 6. a).

Subiectul al III-lea. 1. a) Nu; b) 6 apartamente cu două camere. 2. b) $a \in \{-10, -6, -4, -3, -1, 0, 6\}$. 3. a) 12; b) $d(O, G_f) = 2\sqrt{2}$ (u). 4. a) EF este linie mijlocie în ΔABG , deci $EF = 4 \text{ cm}$; G este centrul de greutate al ΔABC , de unde obținem $AG = 8 \text{ cm}$, prin urmare $AF = 4 \text{ cm}$. Astfel, $AF = EF$, deci ΔAEF este isoscel de vârf F ; b) ΔBGA este isoscel de vârf G , GE este mediană, deci GE este și înălțime, de unde $GE \perp AB$; cum C, G, E sunt puncte coliniare, rezultă că $CE \perp AB$. 5. a) $AE = 5 \text{ cm}$; b) $\mathcal{A}_{BEDP} = \mathcal{A}_{\Delta BEP} + \mathcal{A}_{\Delta EPD} = 15 \text{ cm}^2$. 6. b) $d(A, (VBC)) = 4\sqrt{6} \text{ cm}$.

Testul 2

Subiectul I. 1. a). 2. b). 3. c). 4. b). 5. c). 6. b).

Subiectul al II-lea. 1. d). 2. b). 3. b). 4. c). 5. c). 6. c).

Subiectul al III-lea. 1. a) Nu, deoarece $72 + 7 + 2 = 81 \neq 76$; b) 6 ani, respectiv 5 ani. 2. b) 400. 3. a) -20 ; b) $G_f \cap O_x = \{A(2, 0)\}$, $G_f \cap O_y = \{B(0, 4)\}$, $\mathcal{A}_{\Delta AOB} = 4 \text{ um}^2$. 4. a) ΔBDC – echilateral $\Rightarrow \angle DBC = 60^\circ$ și $BC = DC = 12 \text{ cm}$.

În ΔABC , $\angle A = 90^\circ$, $AC = \frac{BC}{2}$, deci $\angle ABC = 30^\circ \Rightarrow \angle ACB = 60^\circ$. Din $\angle DBC = \angle ACB$ (unghiuri alterne interne) rezultă $AC \parallel BD$; b) Aplicăm teorema lui Pitagora în ΔABC și obținem $AB = 6\sqrt{3} \text{ cm}$, iar din ΔDBA ($\angle DBA = 90^\circ$) aflăm $AD^2 = 252$. Cum $252 < 256$, deducem că $AD < 16 \text{ cm}$. 5. a) Aplicăm teorema lui Pitagora în ΔABC și obținem $AC = 20 \text{ cm} \Rightarrow EC = 25 \text{ cm}$; $FA \parallel DC \Rightarrow \Delta EFA \sim \Delta EDC \Rightarrow \frac{FA}{DC} = \frac{EA}{EC} \Rightarrow FA = 2\sqrt{3} \text{ cm}$; b) Cu teorema lui Pitagora în ΔFAD obținem $DF = 4\sqrt{7} \text{ cm}$. Din $\Delta EFA \sim \Delta EDC \Rightarrow \frac{EF}{ED} = \frac{EA}{EC} \Rightarrow \frac{EF}{ED} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{FD}{ED} = \frac{4}{5} \Rightarrow DE = 5\sqrt{7} \text{ cm}$; $\mathcal{P}_{\Delta DEO} = DE + EO + OD = 5(\sqrt{7} + 5) \text{ cm}$.

6. a) Fie $C'P \cap BB' = \{S\}$; atunci P este mijlocul lui $C'S$, O' mijlocul lui $C'A' \Rightarrow PO'$ linie mijlocie în $\Delta C'A'S \Rightarrow PO' \parallel A'S$, $A'S \subset (ABA') \Rightarrow PO' \parallel (ABA')$; b) $\mathcal{A}_{ABCD} = AB^2 = 108 \text{ cm}^2 \Rightarrow AB = 6\sqrt{3} \text{ cm}$. Din ΔMCB cu $\angle C = 90^\circ$, aflăm $BM = 12 \text{ cm}$, de unde $BB' = BM = MB' \Rightarrow \Delta BB'M$ este echilateral, P este mijlocul lui $B'M \Rightarrow BP \perp B'M$; $AB \perp (BCC'B')$, $B'M \subset (BCC'B') \Rightarrow AB \perp B'M$, $AB, BP \subset (PAB) \Rightarrow B'M \perp (PAB)$.

Testul 3

Subiectul I. 1. c). 2. b). 3. a). 4. b). 5. c). 6. a).

Subiectul al II-lea. 1. a). 2. b). 3. b). 4. a). 5. b). 6. a).

Subiectul al III-lea. 1. a) Nu, deoarece $100 = f + b = 2b + b = 3b$, dar $100 \nmid 3$; b) 44 de băieți. 2. a) $E(5) = 5$;

b) $E(x) = 2x - 5 \Rightarrow \frac{2x+3}{E(x)} = \frac{2x+3}{2x-5} \in \mathbb{Z}$ dacă $2x - 5 \mid 8$,

însă $2x - 5$ este număr impar, deci $2x - 5 \in \{\pm 1\} \Rightarrow x \in \{2, 3\}$. 3. a) $f(3) = -1$, $g(3) = -1 \Rightarrow G_f \cap G_g = \{A(3, -1)\}$; b) $G_f \cap O_y = \{B(0, 2)\}$, $G_g \cap O_y = \{C(0, -4)\} \Rightarrow AB^2 = 18$, $AC^2 = 18$, $BC = 6 \Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow \angle BAC = 90^\circ \Rightarrow G_f \perp G_g$. 4. a) În ΔABD , $\angle ADB = 90^\circ$, $\angle ABD = 60^\circ \Rightarrow \angle BAD = 30^\circ \Rightarrow BD = \frac{AB}{2} = 6 \text{ cm} \Rightarrow BC = BD + DC = 24 \text{ cm}$; b) Aplicând teorema bisectoarei în ΔABC avem $\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EC} \Leftrightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{1}{2} \Rightarrow AC = \frac{3}{2}CE$. Din $\mathcal{P}_{\Delta ABC} = AB + BC + AC = 36 + \frac{3}{2}CE = 36 + 12\sqrt{3} \Rightarrow CE = 8\sqrt{3} \text{ cm}$;

$CE^2 = 192 < 196 = 14^2 \Rightarrow CE < 14 \text{ cm}$. 5. a) $AC = 24\sqrt{2} \text{ cm} \Rightarrow CO = \frac{AC}{2} = 12\sqrt{2} \text{ cm}$, $OM = \frac{BD}{4} = 6\sqrt{2} \text{ cm}$. Aplicăm teorema lui Pitagora în ΔCOM cu $\angle COM = 90^\circ$ și obținem $CM = 6\sqrt{10} \text{ cm}$; b) $\frac{MB}{MD} = \frac{1}{3} = \frac{BN}{DC}$ și $\angle NBM = \angle BDC$ (unghiuri alterne interne) $\Rightarrow \Delta MBN \sim \Delta MDC \Rightarrow \angle CMD = \angle NMB$, iar cum D, M, B sunt coliniare $\Rightarrow N, M, C$ sunt coliniare. 6. a) $\mathcal{A}_b = 16 \text{ cm}^2 \Rightarrow A'B' = 4 \text{ cm} \Rightarrow a_b = 2 \text{ cm}$; $\mathcal{A}_B = 64 \text{ cm}^2 \Rightarrow AB = 8 \text{ cm} \Rightarrow a_B = 4 \text{ cm}$; $a_{\text{trunchi}}^2 = h^2 + (a_B - a_b)^2 = 12 \Rightarrow a_{\text{trunchi}} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$; b) $AB = 2A'B' \Rightarrow BD = 2B'D' \Rightarrow BO = D'B'$, $BO = B'D' \Rightarrow BOD'B'$ – paralelogram $\Rightarrow D'O \parallel BB' \Rightarrow \angle(BB', AD') = \angle(D'O, AD') = \angle AD'O$; $AC \perp BD$ și $AC \perp OO' \Rightarrow AC \perp (BDD')$, $D'O \subset (BDD') \Rightarrow AC \perp D'O$. În $\Delta AOD'$ drept-

unghic în O : $\sin(\angle AD'O) = \frac{AO}{AD'} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

